2017/2018 小學高年級組第二輪檢測試題詳解

1. 將 80 個三角排成一列，然後依照下面的規律塗上黑色或白色，請問塗上黑色的三角形總共比塗上白色的三角形多幾個？

▲▲▲△△▲▲▲△△▲▲▲△△……

（A）10　（B）16　（C）18　（D）20　（E）32

【參考解法】

由圖可知，從第一個三角形開始，以每五個三角形為一個週期，每個週期內有 3 個黑色三角形與 2 個白色三角形，即黑色三角形比白色三角形多 1 個。可知 80 個三角形共有 16 個週期，所以黑色三角形比白色三角形總共多 16 個。故選(B)。

答案：(B)

2. 某班級的數學期末考試的結果為滿分 100 分有 4 位學生、得 90 分至 99 分有 6 位學生、得 80 分至 89 分有 18 位學生、得 70 分至 79 分有 12 位學生、得 69 分以下有 10 位學生。已知全班平均分數為 81.4 分，請問該班學生數學期末考試的總得分為多少分？

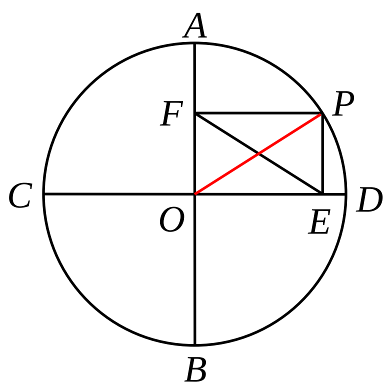
（A）4050　（B）3750　（C）4070　（D）3820　（E）不能確定

【參考解法】

由題意可知這個班級總共有 $4+6+18+12+10=50$ 位學生，所以該班學生數學期末考試的總得分為 $81.4\times 50=4070$ 分。故選（C）。

答案：(C)

3. 已知 AB、CD 是圓 O 的兩條相互垂直之直徑，過圓上的任一點 P 作這兩直徑的垂線，垂足分別為點 E、F，如下圖所示。若圓 O 的直徑為 8 cm，請問 EF 的長度是多少 cm？



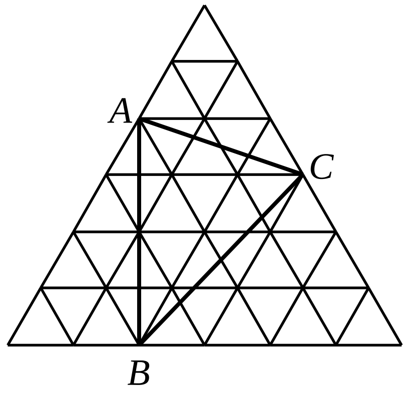
（A）8　（B）6　（C）5　（D）4　（E）2

【參考解法】

由題意可知 $AB\perp CD$ 且 $PE\perp OD$、$PF\perp OA$，所以四邊形 $PEOF$ 為矩形。連接 OP，則 $OP=EF$。注意到 OP 為圓 O 的半徑，故 $EF=4$ cm。故選（D）。

答案：(D)

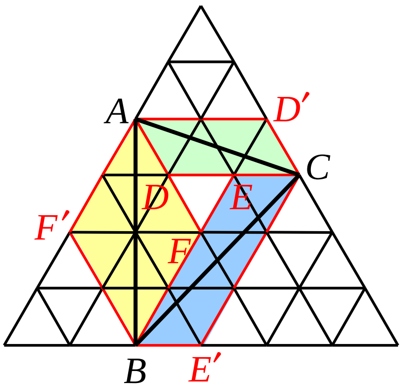
4. 已知 36 個面積為 1 cm^2 的小等邊三角形拼成一個大等邊三角形，如圖所示。請問圖中三角形 ABC 的面積是多少 cm^2？



（A）6　（B）8　（C）10　（D）12　（E）18

【參考解法 1】

如圖所示之方式標記點 D、D'、E、E'、F、F'，則三角形 ABC 被分割成三角形 ADC、BEC、AFB、DEF。注意到：



(i) 三角形 DEF 面積為 1 cm^2；

(ii) 三角形 ADC 面積為平行四邊形 $ADCD'$ 面積的一半，而平行四邊形 $ADCD'$ 是由 4 個小正三角形拼成，故三角形 ADC 面積為 $\frac{1}{2}\times 4=2$ cm^2；

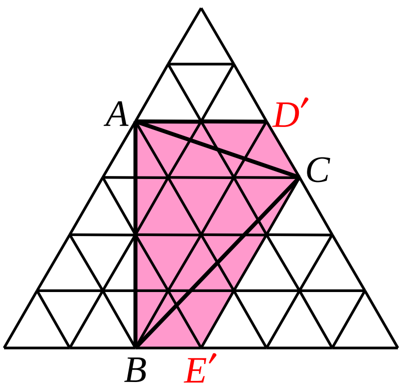
(iii) 三角形 BEC 面積為平行四邊形 $BE'CE$ 面積的一半，而平行四邊形 $BE'CE$ 是由 6 個小正三角形拼成，故三角形 BEC 面積為 $\frac{1}{2}\times 6=3$ cm^2；

(iv) 三角形 AFB 面積為平行四邊形 $AFBF'$ 面積的一半，而平行四邊形 $AFBF'$ 是由 8 個小正三角形拼成，故三角形 AFB 面積為 $\frac{1}{2}\times 8=4$ cm^2。

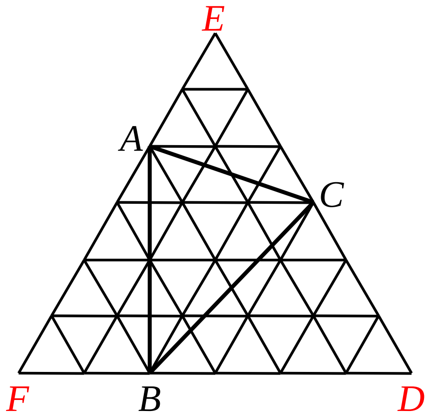
所以三角形 ABC 的面積為 $1+2+3+4=10$ cm^2。故選（C）。

【參考解法 2】

如圖所示之方式標記點 D'、E'，則三角形 ABC、ACD'、BCE' 拼成五邊形 $ABE'CD'$，而觀察知五邊形 $ABE'CD'$ 是由 13 個完整的小正三角形與 4 個被切為一半的小正三角形所拼成，故五邊形 $ABE'CD'$ 的面積為 $13\times 1+4\times\frac{1}{2}=15$ cm^2。由【參考解法 1】可判斷出三角形 ACD'、BCE' 的面積分別為 2 cm^2、3 cm^2，因此三角形 ABC 的面積為 $15-2-3=10$ cm^2。故選（C）。



【參考解法 3】



如圖所示之方式標記點 D、E、F，則三角形 DEF 的面積為 36 cm^2。注意到 $AE=\frac{1}{3}EF$ 、 $AF=\frac{2}{3}EF$ 、 $FB=\frac{1}{3}FD$ 、 $BD=\frac{2}{3}FD$ 、 $CE=CD=\frac{1}{2}DE$ ，故由共角定理可知三角形 ACE 的面積為 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times36=6\,cm^2$、三角形 AFB 的面積為 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times36=8\,cm^2$、三角形 ACE 的面積為 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times36=12\,cm^2$，因此三角形 ABC 的面積為 $36-6-8-12=10$ cm^2。故選（C）。

答案：（C）

5. 一個正數去掉小數部分後得到一個整數，將這個整數加上原來的正數所得之和，再與 5 相乘，最後得到 22.1。請問原來這個正數是多少？

（A）4.42　（B）0.42　（C）4.41　（D）4　（E）2.42

【參考解法】

可知原來的正數與其整數部分相加所得之和為 $22.1\div5=4.42$ ，因此原來的正數之小數部分為 0.42，且整數部分為 $4\div2=2$，所以原來這個正數是 2.42。故選(E)。

答案：(E)

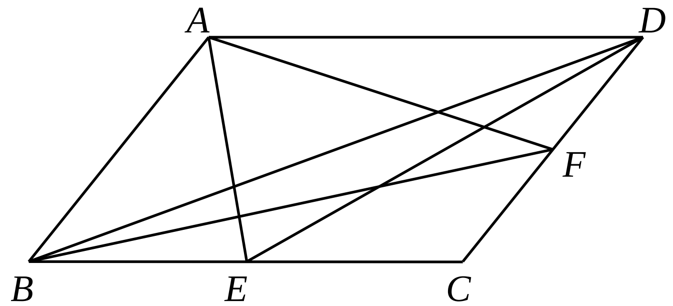
6. 箱子內有大小完全相同的黑色小球 7 顆、白色小球 5 顆、紅色小球 8 顆。從箱子內依次取出小球，請問至少需要取出多少顆小球，才能保證取出小球中黑、白、紅三種顏色都有？

【參考解法】

為了保證取出三種顏色的球，最壞的情況是先取完數量較多的兩種顏色的小球，即黑球與紅球，共有 $7+8=15$ 顆，再取出一顆球即可保證取出三種顏色的小球，故至少需要取出 $15+1=16$ 個小球。

答案：16 顆

7. 在平行四邊形 $ABCD$ 中，點 E、F 分別為 BC、CD 的中點。分別連接 AE、AF、DE、BF、BD，如下圖所示。若平行四邊形 $ABCD$ 的面積為 4 cm^2，請問圖中以點 A、B、C、D、E、F 中三個點為頂點、以現有的線段為邊且面積為 1 cm^2 的三角形共有多少個？



【參考解法】

可知圖中的三角形有 ABD、ABE、ABF、ADE、ADF、BCD、BCF、BDE、BDF、CDE 共 10 個三角形，由平行四邊形 $ABCD$ 的面積為 4 cm^2 可知：

(i) 三角形 ABD、ABF、ADE、BCD 的面積為 $\frac{1}{2}\times4=2\text{cm}^2$；

(ii) 因點 E 為 BC 的中點，故三角形 ABE、CDE、BDE 的面積為 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times4=1\text{cm}^2$；

(iii) 因點 F 為 CD 的中點，故三角形 ADF、BCF、BDF 的面積為 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times4=1\text{cm}^2$。

故圖中面積為 1 cm^2 的三角形總共有 6 個。

答案：6 個

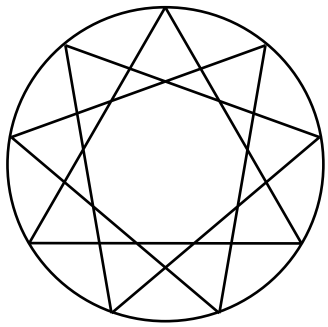
8. 一張圓桌有 20 個座位，其中有些座位已經有人入坐。此時若新來一個人，他無論坐在哪個空位，都至少有一個已入坐的人與他相鄰，即他們之間沒有空著的座位，請問原來至少有多少個座位已經有人入坐？

【參考解法】

由題意可知，原來僅隔著空座位的兩個人之間最多有 2 個空座位，因此 3 個依次相鄰的座位至少有 1 個座位已有人入坐。因 $20=3\times6+2$，所以原來至少有 $6+1=7$ 個座位已經有人入坐。

答案：7 個

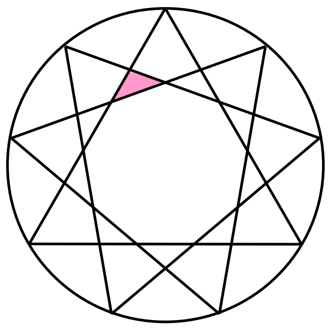
9. 將圓內的一個內接正三角形分別以順時針、逆時針各旋轉 $40°$，如圖所示。請問圖中總共有多少個不在相同位置的三角形？



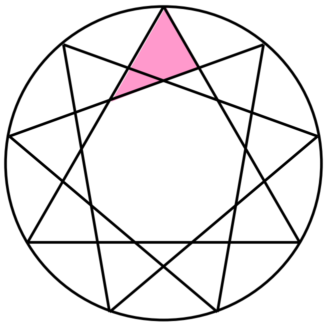
【參考解法】

觀察可知

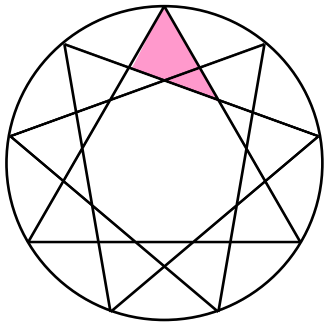
(i) 與下圖中陰影三角形相同但位置不同的三角形共有 9 個：



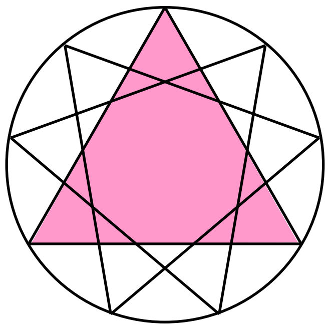
(ii) 與下圖中陰影三角形相同但位置不同的三角形共有 9 個：



(iii) 與下圖中陰影三角形相同但位置不同的三角形共有 9 個：



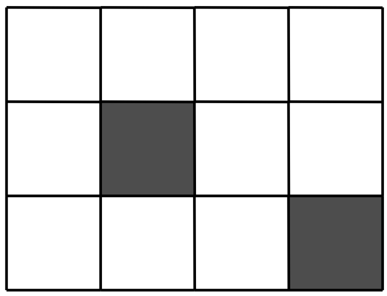
(iv) 與下圖中陰影三角形相同但位置不同的三角形共有 3 個：



因此圖中總共有9+9+9+3=30個不在相同位置的三角形。

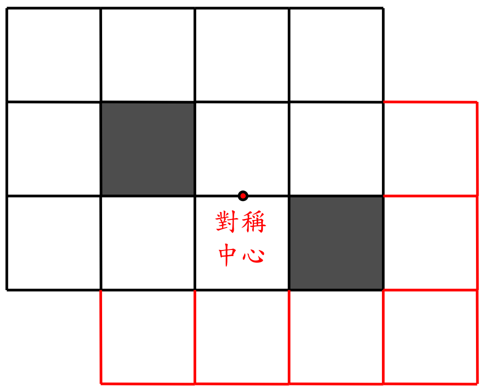
答案：30 個

10. 有 12 個大小相同的小正方形拼成一個矩形，其中 10 個為白色、2 個為黑色，如下圖所示。請問至少要再加入多少個同樣大小且僅為白色的小正方形才能使得所得到的圖形是中心對稱的圖案？



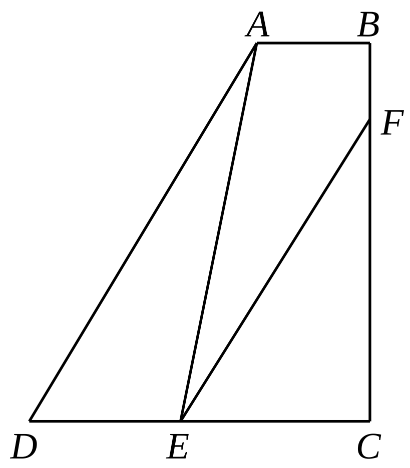
【參考解法】

由於僅有 2 個黑色小正方形，故所得圖形的對稱中心必為這兩個黑色小正方形的對稱中心。從而可知在原圖的右方與下方共加入 6 個白色小正方形，如圖所示，即可成為中心對稱的圖案。



答案： 6 個

11. 在直角梯形 $ABCD$ 中，已知 $\angle ABC=\angle BCD=90^\circ$、$AB=3\text{cm}$、$CD=9\text{cm}$ 且點 E、F 分別位於底邊 CD 與直角邊 BC 上，如下圖所示。若 $BF=2\text{cm}$ 且 AE、EF 將梯形面積三等分，請問直角梯形 $ABCD$ 的面積是多少 cm^2？



【參考解法】

在三角形 ADE 中，DE 邊上的高之長度與 BC 之長度相同且三角形 ADE 面積等於梯形 $ABCD$ 面積的三分之一，故由面積關係可判斷出 $\dfrac{\frac{1}{2}DE\times BC}{\frac{1}{2}(AB+CD)\times BC}=\dfrac{1}{3}$，即 $DE=\dfrac{1}{3}(AB+CD)=4\text{cm}$，且由此可知 $CE=CD-DE=5\text{cm}$。接著由三角形 ADE 面積與三角形 CEF 相等可知 $\dfrac{1}{2}DE\times BC=\dfrac{1}{2}CE\times CF$，將 DE、CE 長度代入並化簡可得 $CF=\dfrac{4}{5}BC$。因 $BF=BC-CF=\dfrac{1}{5}BC$ 且 $BF=2\text{cm}$，故 $BC=10\text{cm}$，因此直角梯形 $ABCD$ 的面積為 $\dfrac{1}{2}\times(AB+CD)\times BC=\dfrac{1}{2}(3+9)\times10=60\text{cm}^2$。

答案：60 cm^2

12. 某工廠生產一批零件。若每小時比原來計畫的生產速度多生產 4 個零件，則所用的時間比原預估的時間少 $\dfrac{1}{10}$；若每小時比原來計畫的生產速度少生產 6 個零件，則所用時間比原預估的時間多 $\dfrac{1}{5}$。請問該工廠原來計畫的生產速度是每小時生產多少個零件？

【參考解法 1】

設該工廠原來計畫的每小時生產速度是生產 v 個零件且原預估的時間為 t 小時。則由題意可知

$$(v+4)(1-\frac{1}{10})t=(v-6)(1+\frac{1}{5})t$$
$$\frac{9}{10}(v+4)=\frac{6}{5}(v-6)$$
$$45(v+4)=60(v-6)$$
$$60v-45v=45\times4+60\times6$$
$$15v=540$$
$$v=36$$

所以該工廠原來計畫的每小時生產速度是生產 36 個零件。

【參考解法 2】

每小時比原來計畫的生產速度多生產 4 個零件的情況比每小時比原來計畫的生產速度少生產 6 個零件的情況每小時多生產了 10 個零件，且所花費的時間比為 $\dfrac{1-\frac{1}{10}}{1+\frac{1}{5}}=\dfrac{\frac{9}{10}}{\frac{6}{5}}=\dfrac{3}{4}$，即可判斷出在每小時比原來計畫的生產速度多生產 4 個零件的情況下，每小時生產 $10\div(1-\frac{3}{4})=40$ 個零件，在每小時比原來計畫的生產速度少生產 6 個零件的情況下，每小時生產 $40-10=30$ 個零件，因此該工廠原來計畫的每小時生產速度是生產 $40-4=30+6=36$ 個零件。

【參考解法 3】

可知生產速度與生產時間成反比，故若設該工廠原來計畫的每小時生產速度是生產 v 個零件，則由題意可得知：

$$\frac{v}{v+4}=\frac{9}{10}$$
$$9v+36=10v$$
$$v=36$$

且

$$\frac{v}{v-6}=\frac{6}{5}$$
$$6v-36=5v$$
$$v=36$$

所以該工廠原來計畫的每小時生產速度是生產 36 個零件。

答案：36 個

13. 若一個三位數可以被 6 整除，且將它的十位碼與個位碼交換後所得到的三位數也可以被 6 整除，我們稱這樣的三位數為「幸運數」。請問總共有多少個不同的「幸運數」？

【參考解法】

被 6 整除等價於同時可被 2 與 3 整除，故知「幸運數」的末兩位數碼均為偶數，且三個數碼之和可被 3 整除。在「幸運數」的末兩位數碼中，每一位都可選擇 0、2、4、6、8 共有 5 種選法。而在非零數碼中，被 3 除之後餘數為 1 的數共有 1、4、7 這三個數、被 3 除之後餘數為 2 的數共有 2、5、8 這三個數、被 3 除之後餘數為 0 的數共有 3、6、9 這三個數，因此當末兩位數碼選定並得知它們的數碼和除以 3 的餘數後，選擇首位數碼時都有 3 種選法使得三個數碼之和可被 3 整除。故不同的「幸運數」總共有 $5\times5\times3=75$ 個。

答案：75 個

14. 有五個正整數排成一列，從第二個數起，每一個數都不小於前一個的兩倍。已知這五個數之和是 2018，請問最後一個數的最小可能值是多少？

【參考解法】

設最後一個數為 x，則前四個數依序至多分別為 $\frac{x}{16}$、$\frac{x}{8}$、$\frac{x}{4}$、$\frac{x}{2}$，故

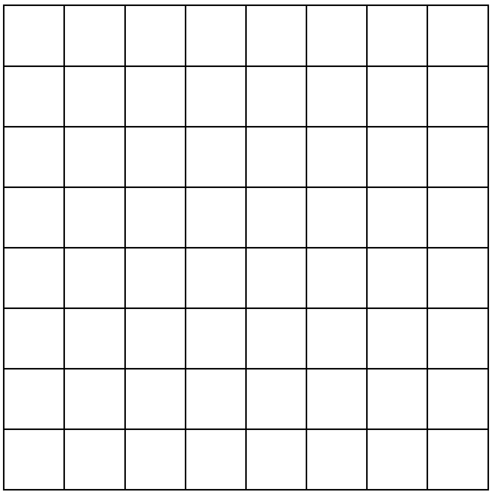
$\frac{x}{16}+\frac{x}{8}+\frac{x}{4}+\frac{x}{2}+x \ge 2018$，(5 分)即 $x \ge \frac{2018\times 16}{31}=1041\frac{17}{31}$，故 $x \ge 1042$。(5 分)

另一方面，將這五個數取為 65、130、260、521、1042 時滿足題目要求，(5 分)

故所求為 1042。(5 分)

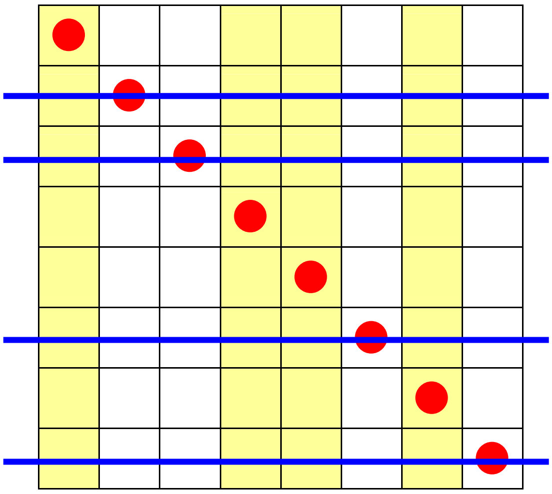
答案： 1042

15. 在一個8×8棋盤的每個小方格內最多放置 1 枚棋子。現將放置好棋子的棋盤任意取出 4 行與 4 列上的所有棋子後，在棋盤內至少還剩有 1 枚棋子。請問原來棋盤上至少放置有多少枚棋子？



【參考解法】

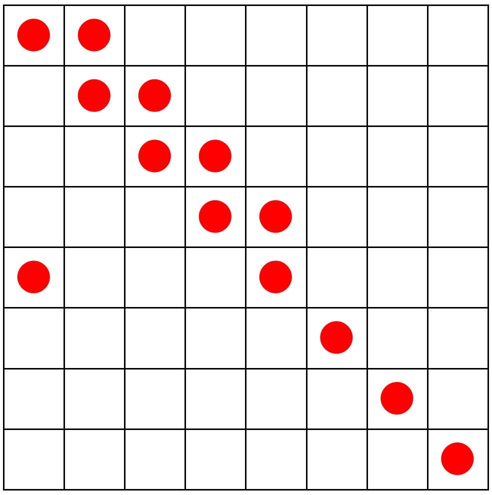
首先考慮棋盤上每行每列都有一枚棋子的情況。可不妨假設在棋盤對角線上的格子中各放入一枚棋子，如圖一。



圖一

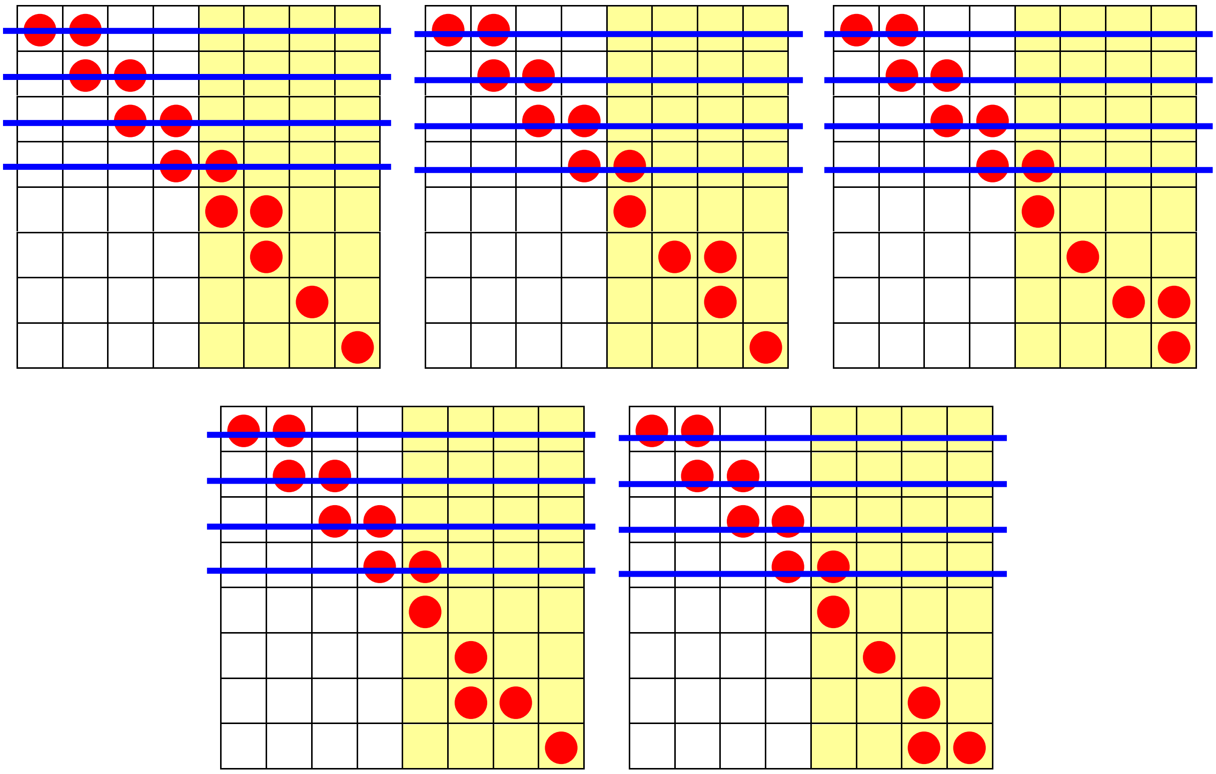
由於任意劃掉 4 行 4 列的棋子後，在剩下的格子中至少還有 1 枚棋子，故每次劃掉的棋子數量愈多愈好。在圖一中，劃掉 4 列中的 4 枚棋子後，還剩下 4 枚棋子分佈在 4 行中，若再劃掉 4 行，則棋盤中棋子可能便不剩了。因此至少放入 9 枚棋子，且知在棋盤中必然有某些行或列至少應放入 2 枚棋子。為了使棋盤中放入的棋子盡可能少，且調換劃行與劃列的順序後並不影響結果，可考慮在每放入 1 枚棋子後，棋盤中含有 2 枚棋子的行與列都增加。因每一次都取出 4 列的棋子，故至少有 4 列是放入 2 枚棋子，即至少放入 12 枚棋子(5 分)。若恰放入 12 枚可滿足題意，則可先劃去列內棋子數最多的四列，此時其餘四列內的棋子必分散在相異的五行內，即其餘四列內共至少有 5 枚棋子，由抽屜原理可知其中至少有一列有 2 枚棋子，因此可判斷出所劃去的四列，每一列內都至少有 2 枚棋子，因此所劃

去的四列共至少有 8 枚棋子，即原先棋盤內共有5+8=13枚棋子，矛盾。因此至少需有 13 枚棋子(5 分)，如圖二為其中一種放置方法。(5 分)



圖二

需要指出的是：在放入第 13 枚棋子後，下面這幾種放法是不合題意的，因為如以下方式先劃掉 4 列後，只有 4 行含有棋子，故再劃掉 4 行就可能不剩棋子。



綜上所述，棋盤上總共至少有 13 枚棋子(5 分)。

答案：13 枚