2018～2019 初中組第一輪檢測試題詳解

1. 請問代數式 $2020^2-2019^2-\sqrt{(-2018)^2}$ 的值是多少？

（A）2021　（B）2022　（C）2037　（D）4039　（E）6057

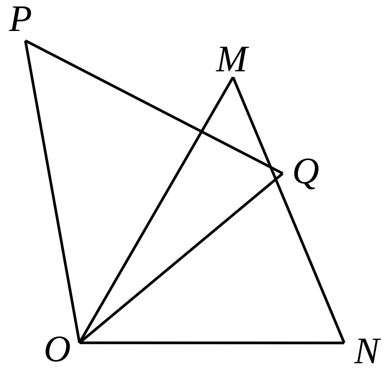
【參考解法】

$$\begin{aligned}2020^2-2019^2-\sqrt{(-2018)^2}&=(2020+2019)(2020-2019)-2018\\&=2020+2019-2018\\&=2021\end{aligned}$$

故選(A)。

答案：(A)

2. 已知 $\triangle POQ\cong\triangle MON$ 且 $\angle PON=100^\circ$、$\angle MOQ=20^\circ$，如下圖所示。請問 $\angle POQ$ 等於多少度？



（A）20　（B）30　（C）40　（D）45　（E）60

【參考解法】

由條件得 $\angle POQ=\angle MON$，又 $\angle POQ+\angle MON=\angle PON+\angle MOQ=120^\circ$，故 $\angle POQ=60^\circ$。故選(E)。

答案：(E)

3. 已知 $x=2$、$y=3$。請問 $x^4+y^4-x^3-y^3+x^2+y^2$ 的值為多少？

（A）71　（B）72　（C）75　（D）83　（E）85

【參考解法】

$$\begin{aligned}x^4+y^4-x^3-y^3+x^2+y^2&=2^4+3^4-2^3-3^3+2^2+3^2\\&=16+81-8-27+4+9\\&=75\end{aligned}$$

故選(C)。

答案：(C)

4. 有兩個正整數 m、n，其中 m 除以 35 餘 12，n 除以 21 餘 15。請問 $m-n$ 除以 7 的餘數是多少？

（A）2　（B）3　（C）4　（D）5　（E）6

【參考解法 1】
設 $m=35a+12$、$n=21b+15$，則 $m-n=35a-21b-3=7(5a-3b-1)+4$，即 $m-n$ 除以 7 之後所得的餘數為 4。故選(C)。
【參考解法 2】
因為 m 除以 35 餘 12，所以 m 除以 7 的餘數為 5。因為 n 除以 21 餘 15，所以 n 除以 7 的餘數為 1。因此 $m-n$ 除以 7 的餘數為 $5-1=4$。故選(C)。

答案：(C)

5. 已知 $x^2-4x+4+\sqrt{xy-2018}=0$，請問 y 的值是多少？
(A) 0　(B) 1009　(C) 2018　(D) 4036　(E) 無法確定

【參考解法】
化簡可得 $(x-2)^2+\sqrt{xy-2018}=0$，故 $x-2=0$、$xy-2018=0$，解得 $x=2$、$y=1009$。故選(B)

答案：(B)

6. 請問當 $x=3$ 時，$\sqrt{x-1+\sqrt{x-1+\sqrt{x-1+\sqrt{x+1}}}}$ 的值是多少？
(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5　(E) 6

【參考解法】
當 $x=3$ 時，

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1+\sqrt{x-1+\sqrt{x-1+\sqrt{x+1}}}} &= \sqrt{3-1+\sqrt{3-1+\sqrt{3-1+\sqrt{3+1}}}}\\ &= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4}}}}\\ &= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4}}}\\ &= \sqrt{2+\sqrt{4}}\\ &= \sqrt{4}=2\end{aligned}$$

故選(A)。

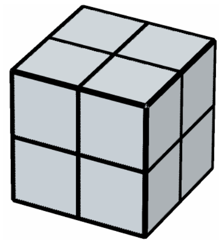
答案：(A)

7. 老師將 2 隻相同的鋼筆與 3 隻相同的鉛筆作為獎品全部分給兩名學生，每名學生至少要得到一樣獎品。請問總共有多少種不同的分獎品方式？
(A) 5　(B) 6　(C) 8　(D) 9　(E) 10

【參考解法】
分配鋼筆的方式有(2, 0)、(1, 1)、(0, 2)等 3 種、分配鉛筆的方式有(3, 0)、(2, 1)、(1, 2)、(0, 3)等 4 種，故共有 12 種方式，但應去掉其中有兩種方式是其中有一名同學沒有得到任何獎品的，故有 12－2=10 種方式。故選(E)。

答案：(E)

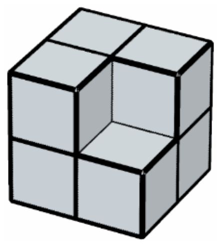
8. 用 8 個邊長為 1 cm 的小正立方體拼成一個邊長為 2 cm 的大正立方體，如圖所示。若從大正立方體中任意取走一個小正立方體，請問剩下的立體之表面積為多少 cm^2？



（A）24　（B）25　（C）26　（D）27　（E）28

【參考解法】

去掉一個正方體後，它露在表面的三個面被去掉了，但同時多出了其餘正立方體的三個面，故總表面積與原大正立方體表面積相同，為 $6\times2^2=24\,\text{cm}^2$。故選(A)。



答案：(A)

9. 設正整數 m、n 滿足 $m^2-n^2=13$，請問 m^2+n^2 的值是多少？

（A）13　（B）36　（C）49　（D）75　（E）85

【參考解法】

由題意得 $(m+n)(m-n)=13$ 而 13 為質數，故只能是 $m+n=13$、$m-n=1$，因此 $m=7$、$n=6$，所以 $m^2+n^2=49+36=85$。故選(E)。

答案：(E)

10. 將一個正整數的各位數碼以相反的順序排列後，若所得的數與原來的數相同，則稱這個數為回文數（例如 909 與 1221 都是回文數）。請問能被 9 整除的三位回文數有多少個？

（A）10　（B）12　（C）15　（D）20　（E）24

【參考解法 1】

設能被 9 整除的回文數為 $\overline{aba}$，其中 $1\le a\le 9$、$0\le b\le 9$。能被 9 整除的數的各位數碼之和也能被 9 整除，反之亦然。因此 $a+b+a=2a+b$ 能被 9 整除。

當 $2a+b=27$ 時，只有 999 一個數。

當 $2a+b=18$ 時，有 585、666、747、828、909 等五個數。

當 $2a+b=9$ 時，有 171、252、333、414 等四個數。

故符合要求的回文數共有 $1+5+4=10$ 個。故選(A)。

【參考解法 2】
設能被 9 整除的回文數為$\overline{aba}$，其中$1\le a\le 9$、$0\le b\le 9$。能被 9 整除的數的各位數碼之和也能被 9 整除，反之亦然。
當 $a=1$ 時，只有 171 一個數。
當 $a=2$ 時，只有 252 一個數。
當 $a=3$時，只有 333 一個數。
當 $a=4$ 時，只有 414 一個數。
當 $a=5$時，只有 585 一個數。
當 $a=6$時，只有 666 一個數。
當 $a=7$ 時，只有 747 一個數。
當 $a=8$ 時，只有 828 一個數。
當 $a=9$時，只有 909、999 二個數。
故符合要求的回文數共有 10 個。故選(A)。

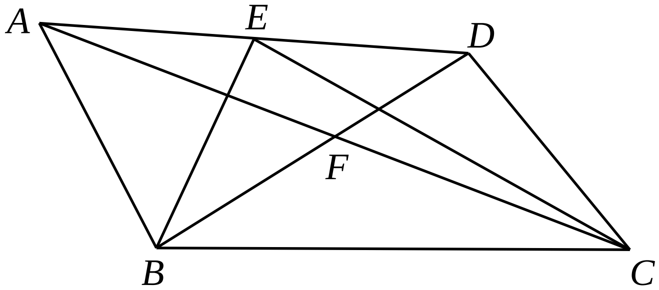
答案：(A)

11. 已知正整數 n 與 24 的最大公因數為 2，且$n+1$與 24 的最大公因數為 3。請問 n 不能取下面哪一項內的值？
（A）2　（B）14　（C）20　（D）38　（E）50

【參考解法】
由題意可知，n 可被 2 整除，但不可被 4 整除，只有選項(C)不符合；由$n+1$有因數 3 知 n 被 3 除之後的餘數為 2，知其它各選項符合此條件。故選(C)。

答案：(C)

12. 點 E 為 AD 中點、點 F 為 AC 中點，如下圖所示。已知三角形 ABF 的面積為 8 cm^2、三角形 ADF 的面積為 6 cm^2。請問三角形 BCE 的面積為多少 cm^2？

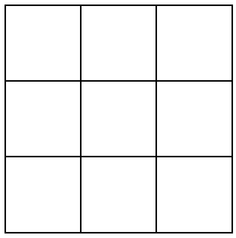


（A）12　（B）13　（C）14　（D）15　（E）16

【參考解法】
由點 F 為 AC 中點知三角形 BFC 的面積與三角形 ABF 的面積相同，即為 8 cm^2；三角形 DFC 的面積與三角形 ADF 的面積相同，即為 6 cm^2；故四邊形 $ABCD$ 的面積為$8+8+6+6=28$ cm^2。
因點 E 為 AD 中點，故知三角形 ABE 的面積為三角形 ABD 的面積之一半，即為 $\frac{1}{2}(8+6)=7$ cm^2；三角形 CDE 的面積為三角形 ACD 的面積之一半，即為 $\frac{1}{2}(6+6)=6$ cm^2；故三角形 BCE 的面積為$28-7-6=15$ cm^2。故選(D)。

答案：(D)

13. 在一個3×3的方格表中塗黑三個格子，使得有兩個同行的黑色格子，但沒有三個同行的黑色格子，且有兩個同列的黑色格子，但沒有三個同列的黑色格子。請問總共有多少種不同的塗色方式？



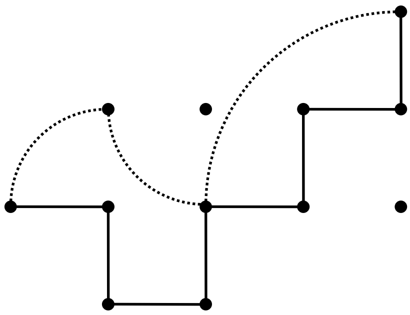
（A）6　（B）18　（C）36　（D）54　（E）72

【參考解法】

由條件知有一個黑色格子，它同行與同列各有另一個黑色格子。第一個黑色格子的選取方法有 9 種，後兩個黑色格子的選取方法各有 2 種，故共有$9\times2\times2=36$種塗色的方式。故選(C)。

答案：(C)

14. 在下圖中，八條直線段的長度都等於 1 m，三條虛線都是四分之一圓弧。請問直線段的總長度與虛線的總長度之差是多少 m？（取$\pi=3.14$）



（A）0.28　（B）0.72　（C）1.28　（D）1.72　（E）4.86

【參考解法】

易知直線段的總長度為 8 m、虛線的總長度為$\frac{2\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}+\frac{2\times2\pi}{4}=2\pi=6.28\,\text{m}$，故兩者相差$8-6.28=1.72\,\text{m}$。故選(D)。

答案：(D)

15. 從$\frac{3}{4}$開始，每次操作是將分子加上 2，或是將分母加上 3，但不能同時加，也不能對所得分數進行約分。請問至少操作多少次才能再度得到一個與$\frac{3}{4}$等值的分數？

（A）13　（B）17　（C）20　（D）26　（E）34

【參考解法】

假設分子加了 a 次 2，分母加了 b 次 3，則得$\frac{3+2a}{4+3b}=\frac{3}{4}$，化簡得$8a=9b$，因此滿足條件的最小的 a、b 為$a=9$、$b=8$，即至少需操作$9+8=17$次。故選(B)。

答案：(B)

16. 已知 a、b、c、d 是連續的正整數，滿足$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{36}+\frac{1}{45}=1$。請問 $a+b+c+d$ 的值是多少？

（A）10　（B）12　（C）14　（D）16　（E）18

【參考解法】

由題意可得$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1-\frac{1}{45}-\frac{1}{36}=\frac{19}{20}$。注意到 a、b、c、d 是連續的正整數，

故$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}<\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=\frac{4}{a}$。所以$\frac{4}{a}>\frac{19}{20}$，即$a<4\frac{4}{19}$。又因為$\frac{19}{20}<1$，

故 $a>1$。所以$a=2$、3 或 4。

當$a=2$時，$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{30}{60}+\frac{20}{60}+\frac{15}{60}+\frac{12}{60}=\frac{77}{60}>1>\frac{19}{20}$，故不合；

當$a=3$時，$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{20}{60}+\frac{15}{60}+\frac{12}{60}+\frac{10}{60}=\frac{57}{60}=\frac{19}{20}$，滿足題意；

當$a=4$時，$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}<\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{19}{20}$，故不合；

所以$a=3$、$b=4$、$c=5$、$d=6$，故$a+b+c+d=3+4+5+6=18$。故選(E)。

答案：(E)

17. 用數碼 1、2、3、…、9 替換代數式$a+\frac{c}{b}+d+\frac{f}{e}+g+\frac{i}{h}$中的九個字母，每個數碼恰各用一次，請問所得的最大結果為多少？

（A）25　（B）$31\frac{2}{3}$　（C）$33\frac{2}{3}$　（D）$33\frac{5}{6}$　（E）$34\frac{1}{6}$

【參考解法】

顯然 b、e、h 應當選最小的三個數，不妨設$b=1$、$e=2$、$h=3$。則

$$a+\frac{c}{b}+d+\frac{f}{e}+g+\frac{i}{h}=a+c+d+g+\frac{f}{2}+\frac{i}{3}=a+c+d+g+f+i-(\frac{f}{2}+\frac{2i}{3})。$$

故應選$i=4$、$f=5$（剩下四個數任意選擇），經計算知此時結果為$33\frac{5}{6}$。故選(D)。

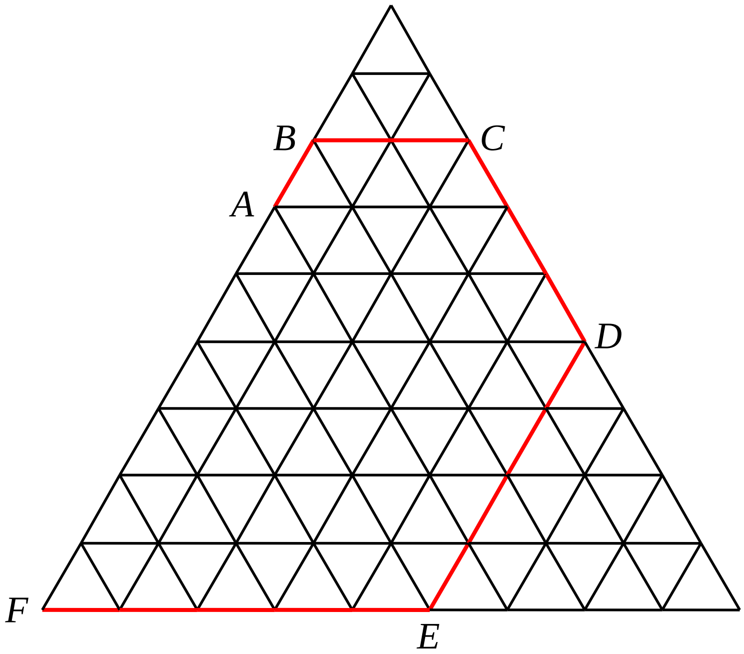
答案：(D)

18. 一隻螞蟻在平面上爬行，它從點 A 出發先爬行了 1 cm，然後右轉$60°$，接著爬行 2 cm 並右轉$60°$，再爬行 3 cm 並右轉$60°$，接下來爬行 4 cm 並右轉$60°$，最後爬行 5 cm 抵達點 F。請問它的起點 A 與終點 F 之間的距離是多少 cm？

（A）0　（B）3　（C）$3\sqrt{3}$　（D）6　（E）$6\sqrt{3}$

【參考解法】

可將此螞蟻的路徑移到三角形網格上，即可發現起點 A 與終點 F 之間的距離是 6 cm。故選(D)。



答案：(D)

19. 將所有真分數按照分母由小到大的順序排成一列，分母相同的按分子由小到大順序排列，形成數列 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{2}{4}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{1}{5}$、⋯。已知這個數列的前 n 項的和是整數，請問 n 的值可能為下面哪一項內的數？

(A) 2015　(B) 2016　(C) 2017　(D) 2018　(E) 2019

【參考解法】

由於 $2016=1+2+3+\cdots+63$，故前 2016 項之和為

$$\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{2}{3})+(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4})+\cdots+(\frac{1}{64}+\frac{2}{64}+\cdots+\frac{63}{64})=\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\cdots+\frac{63}{2}=1008。$$

易知其餘答案均不正確，故 n 僅可能為 2016。故選(B)。

答案：(B)

20. 將數 1、2、3、4、5、6、7、8 各一個排成一行，要求 1 與 2 之間有一個數，2 與 4 之間有二個數，3 與 6 之間有三個數，4 與 8 之間有四個數。請問總共有多少種滿足要求的不同排法？

(A) 12　(B) 24　(C) 36　(D) 48　(E) 60

【參考解法】

首先注意到 2 與 8 不能在 4 的兩側，否則 2 與 8 之間將有 $2+1+4=7$ 個數，不可能。因此 2 與 8 在 4 的同側。

首先考慮 2 與 8 在 4 的右側的情況，此時排列形如 $4ab2c8$，1 只能放 a 的位置，即為 $41b2c8$。

若 4 是左起第一個，則形如 $41b2c8de$，則 3 與 6 只能放在 b、d 位，有 2 種放法，剩下 5 與 7 有 2 種放法；

若 4 是左起第二個，則形如 $d41b2c8e$，則 3 與 6 只能放在 b、e 位，有 2 種放法，剩下 5 與 7 有 2 種放法；
若 4 是左起第三個，則形如 $de41b2c8$，則 3 與 6 只能放在 b、d 位，有 2 種放法，剩下 5 與 7 有 2 種放法。
因此全部的放法數為 $(2\times 2+2\times 2+2\times 2)\times 2=24$ 種。故選(B)。

答案：(B)

21. 已知一個正整數既是 7 的倍數且是 3 的倍數，且在它的所有因數中，7 的倍數的因數個數比 3 的倍數的因數個數多 1 個，請問這個正整數最小是多少？

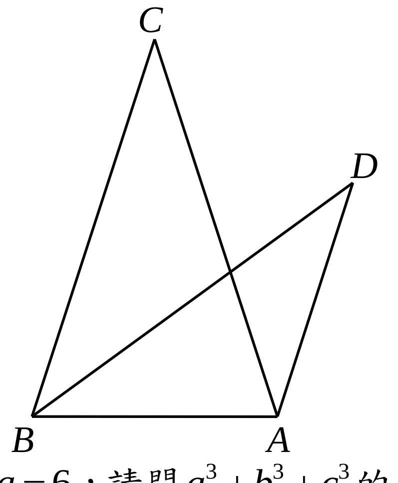
【參考解法 1】
由題意，該數的因數中，不是 7 的倍數的因數比不是 3 的倍數的因數少 1 個。
設該數為 $3^{\alpha}7^{\beta}p_1^{a_1}\cdots p_k^{a_k}$，則不是 7 的倍數的因數有 $(\alpha+1)(a_1+1)\cdots(a_k+1)$ 個，
不是 3 的倍數的因數有 $(\beta+1)(a_1+1)\cdots(a_k+1)$ 個，故 $(\beta-\alpha)(a_1+1)\cdots(a_k+1)=1$，
故 $k=0$、$\beta=\alpha+1$，因此這個正整數最小為 $3\times 7^2=147$。

【參考解法 2】
若該數不是 7^2 的倍數，則它恰有一半的因數為 7 的倍數。但該數至少有一半的因數為 3 的倍數（每個不是 3 的倍數的因數都可以通過乘以 3 變成一個是 3 的倍數的因數），矛盾。故該數是 7^2 的倍數，故此數最少為 $3\times 7^2=147$，經檢驗 147 滿足題目條件。

【參考解法 3】
易知該數為 21 的倍數，逐一試驗知 147 為最小的滿足條件的數。

答案：147

22. 已知 $BC//AD$、$BC=AC$、$BA=AD$、$\angle C=\angle D$，如下圖所示。請問 $\angle BAC$ 的度數是多少？



【參考解法】
由條件知 $\angle CBA=\angle CAB$、$\angle CBD=\angle BDA=\angle ABD$。
設 $\angle C=\angle D=x$，則 $\angle CAB=\angle ABC=2x$，故
$x+2x+2x=180°$，解得 $x=36°$，故 $\angle BAC=2x=72°$。

答案：072

23. 已知實數 a、b、c 滿足 $abc=1$、$a+b+c=ab+bc+ca=6$，請問 $a^3+b^3+c^3$ 的值是多少？

【參考解法】
由條件得 $(a-1)(b-1)(c-1)=abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1=0$。
因此 a、b、c 中至少有一個為 1，不妨設 $a=1$，於是 $bc=1$、$b+c=5$。
故 $a^3+b^3+c^3=1+(b+c)((b+c)^2-3bc)=111$。

答案：111

24. 已知 a 是正整數，且 $2018-a^2$ 也是正整數，請問 $2018-a^2$ 最多有多少個不同的因數？

【參考解法】

由於 2018 除以 4 餘 2、除以 3 餘 2、除以 5 餘 3，而任何一個平方數除以 4 不可能餘 2、除以 3 不可能餘 2、除以 5 不可能餘 3，故 $2018-a^2$ 最多只有一個 2 的因數，且沒有 3 與 5 的因數。

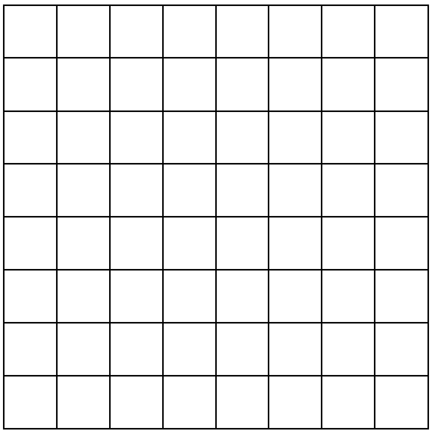
由於 $7^4>2018>2018-a^2$，故 $2018-a^2$ 最多只能有 3 個奇質因數(重複的也算)。

因此 $2018-a^2$ 最多只能有 $2^4=16$ 個不同的因數。

而當 $a=4$ 時，$2018-a^2=2002=2\times7\times11\times13$ 有 16 個不同的因數。故所求為 16。

答案：016

25. 將一個 8×8 方格表沿格線剪成若干個長方形(把正方形也視為長方形)，使得這些長方形的形狀都互不相同，且剪出的相異長方形越多個越好。請問最多可以剪出多少個長方形？



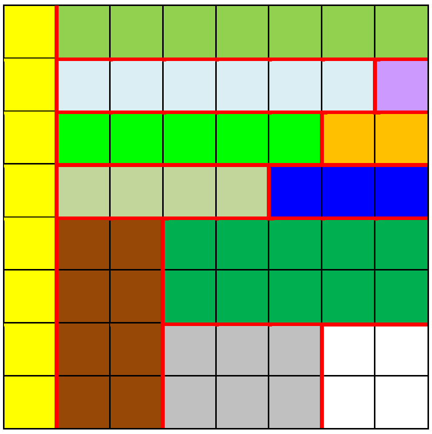
【參考解法】

為了剪出更多的長方形，所以剪出的長方形面積要盡可能的小。面積為 1 的長方形只有 1×1 一種，面積為 2 的長方形只有 1×2 一種，面積為 3 的長方形只有 1×3 一種，面積為 4 的長方形有 1×4 與 2×2 兩種，面積為 5 的長方形只有 1×5 一種，面積為 6 的長方形有 1×6 與 2×3 兩種，面積為 7 的長方形只有 1×7 一種，面積為 8 的長方形有 1×8 與 2×4 兩種，面積為 9 的長方形有 1×9 與 3×3 兩種(但是 1×9 的長方形不符合條件)。以上這些長方形為面積前十三小的長方形。由於

$$1+2+3+4+4+5+6+6+7+8+8+9=63<8\times8=64，$$

$$8\times8=64<1+2+3+4+4+5+6+6+7+8+8+9+9=72，$$

故知最多可剪出十二個不同的長方形。下圖為其中一種剪法。



答案：012