# 2018/2019 初中組第二輪檢測試題詳解

1. 請問下面哪一項內的敘述是錯誤的？
   （A） 若 $a$ 整除 $b$ 且 $k$ 為整數，則 $a$ 整除 $kb$；
   （B） 若 $a$ 整除 $b$ 且 $b$ 整除 $c$，則 $a$ 整除 $c$；
   （C） 若 $a=bc$，且 $b$、$c$ 都為正整數，則 $a$ 能被 $b$ 或 $c$ 整除；
   （D） 若 $b$ 整除 $a$ 且 $c$ 整除 $a$，則 $bc$ 整除 $a$；
   （E） 若 $p|bc$，則必有 $p|b$ 或 $p|c$，其中 $p$ 為質數，$b$、$c$ 為整數。

【參考解法】
由於 4 整除 12，6 整除 12，但 $4\times6=24$ 不能整除 12，故 D 選項內的敘述不正確。故選（D）。

答案：（D）

2. 請問在 1～2019 這些正整數中有多少個數可以寫成 $n^3-3n^2+2n$（其中 $n$ 為正整數）的形式？
   （A）11 （B）12 （C）13 （D）44 （E）45

【參考解法】
$n^3-3n^2+2n=n(n-1)(n-2)$，此即要求該數必須為三個連續正整數之積。由於 $11\times12\times13<2019<12\times13\times14$，故 $n$ 可以取 3、4、5、…、12、13 共 11 個不同的值。故選（A）。

答案：（A）

3. 等腰三角形的周長是 32 cm，且每邊長均為整數 cm。請問滿足上述條件的不同的等腰三角形有多少個？
   （A）5 （B）6 （C）7 （D）8 （E）9

【參考解法】
設腰長為 $x$ cm，則底邊長為 $(32-2x)$ cm，得 $0<32-2x<2x$，故 $8<x<16$，因此 $x$ 共有 9、10、11、12、13、14、15 等 7 種選擇。故選（C）。

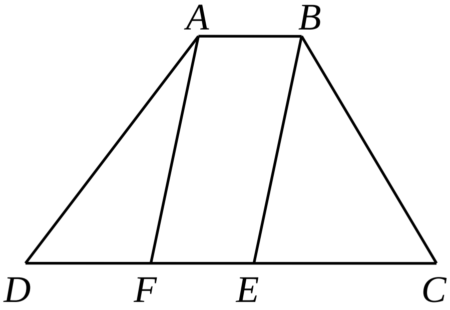
答案：（C）

4. 已知 $a$、$b$、$c$、$d$ 是不為 0 且互不相同的數碼，如果 $\overline{ab}+\overline{cd}=\overline{dc}+\overline{ba}$，則稱這個等式為回文式，而能寫成回文式的兩個數則稱為回文數，例如：$53+46=64+35=99$，兩個回文數的和稱為回文和。請問最小的回文和是什麼？
   （A）22 （B）33 （C）44 （D）55 （E）99

【參考解法】
由 $\overline{ab}+\overline{cd}=\overline{dc}+\overline{ba}$ 知 $10(a+c)+(b+d)=10(b+d)+(a+c)$，故 $a+c=b+d$。由於能用兩種方式表示成兩個不同正整數之和的最小數為 $5=1+4=2+3$，故回文和的最小值為 55，其中一個例子為 $12+43=34+21=55$。故選(D)。

答案：（D）

5. 已知梯形 $ABCD$ 的面積為 100 $\text{cm}^2$，平行四邊形 $ABEF$ 的面積為 40 $\text{cm}^2$，其下底 $CD=10\,\text{cm}$，如下圖所示。請問其上底 $AB$ 的長為多少 cm？



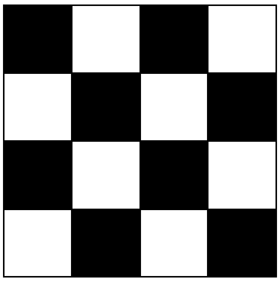

（A）2　（B）2.5　（C）4　（D）5　（E）10

【參考解法】

設 $AB=a$ cm、梯形的高為 $h$ cm，則由題意知 $ah=40\,\text{cm}^2$ 且 $\dfrac{(a+10)h}{2}=100\,\text{cm}^2$，兩式相除得 $a+10=5a$，即 $a=2.5$。故選（B）。

答案：（B）

6. 如圖，在 $4\times4$ 的黑白相間塗色的棋盤中，放入 4 枚相同的棋子。規定每個小方格內至多放一枚棋子，所有的棋子都必須放在同一種顏色的小方格內，且沒有任何兩枚棋子放在同一行或同一列。請問總共有多少種不同的放法？



【參考解法】

若將所有棋子放在黑色格中，易知第 1、3 行的棋子有兩種放法，第 2、4 行的棋子也有兩種放法，故共有 4 種方法。同理，將所有棋子放在白色格中也有 4 種方法，故總共有 8 種不同的放法。

答案：8 種

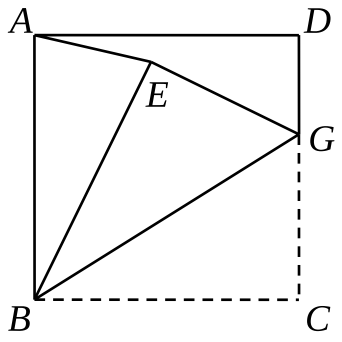
7. 已知對於任意的 $x\neq\pm\dfrac{1}{2}$，都有 $\dfrac{a}{x+\frac{1}{2}}+\dfrac{b}{x-\frac{1}{2}}=\dfrac{24x+4}{4x^2-1}$，請問 $a+b$ 的值是多少？

【參考解法】

兩邊乘上 $4x^2-1$ 得 $2a(2x-1)+2b(2x+1)=24x+4$，將左式展開並比較 $x$ 項的係數得 $4a+4b=24$，故 $a+b=6$。

答案： 6

8. 在正方形 $ABCD$ 中，點 $G$ 為邊 $CD$ 上的點，將三角形 $BCG$ 沿 $BG$ 翻摺後變為三角形 $BEG$，已知 $\angle CBG=32^\circ$，如圖所示，請問 $\angle DAE$ 為多少度？




【參考解法】

$\angle ABE=90^\circ-2\angle CBG=26^\circ$。由於 $AB=BC=BE$，三角形 $BEA$ 為等腰三角形，故 $\angle BAE=\dfrac{180^\circ-26^\circ}{2}=77^\circ$，因此 $\angle DAE=90^\circ-77^\circ=13^\circ$。

答案： $13^\circ$

9. 請問方程 $|ab|+|bc|+|ca|=9$ 有多少組整數解 $(a, b, c)$？

【參考解法】

顯然 $a$、$b$、$c$ 中最多只有一個 0。若 $a=0$，則 $bc=\pm 9$，易知 $b$ 只能取 $\pm 1$、$\pm 3$、$\pm 9$，而 $b$ 取定後，$c$ 有 2 種取法，因此共有 12 組解。同理，若 $b=0$ 或 $c=0$ 的情況時均各有 12 組解。

若 $a$、$b$、$c$ 均不為 0，則 $|ab|$、$|bc|$、$|ca|$ 之中必有一個小於等於 3，即 $|a|$、$|b|$、$|c|$ 之中必有一個等於 1，不妨設 $|a|=1$，則 $(|b|+1)(|c|+1)=10$，故 $|b|$、$|c|$ 一個為 1，一個為 4，故 $|a|$、$|b|$、$|c|$ 有兩個為 1，一個為 4，此時有 $2^3\times 3=24$ 組解。

綜上，原方程共有 $12\times 3+8\times 3=60$ 組解。

答案：60 組

10. 已知 $x$、$y$、$z$ 為實數且 $x+y=\sqrt{4z-1}$、$y+z=\sqrt{4x-1}$、$z+x=\sqrt{4y-1}$，請問 $x+y+z$ 之值是什麼？

【參考解法】

將三個等式相加，得

$$2x+2y+2z=\sqrt{4x-1}+\sqrt{4y-1}+\sqrt{4z-1}$$

移項，得

$$2x+2y+2z-\sqrt{4x-1}-\sqrt{4y-1}-\sqrt{4z-1}=0 \qquad (1)$$

將(1)式兩邊同時除以 2，得

$$x+y+z-\sqrt{x-\frac{1}{4}}-\sqrt{y-\frac{1}{4}}-\sqrt{z-\frac{1}{4}}=0 \qquad (2)$$

因為 $x-\frac{1}{4}-\sqrt{x-\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}=(\sqrt{x-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2})^2$，所以(2)式可變形為

$$(\sqrt{x-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2})^2+(\sqrt{y-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2})^2+(\sqrt{z-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2})^2=0$$

所以 $\sqrt{x-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}=\sqrt{y-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}=\sqrt{z-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}=0$，故 $x=y=z=\frac{1}{2}$，從而 $x+y+z=\frac{3}{2}$。

答案：$\dfrac{3}{2}$

11. 將九個互不相同的正整數填入如下圖的$3\times3$小方格內(每個小方格內恰填一個數),使得任意一個$2\times2$的正方形內四個數的和都恰好等於 50。請問這九個正整數的總和之最小值是多少?

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |

【參考解法】

用字母來代表每個小方格內所填的數,如下圖所示。

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ |
| $d$ | $e$ | $f$ |
| $g$ | $h$ | $i$ |

計算四個$2\times2$的正方形內四個數的和得

$$a+b+d+e=50$$
$$d+e+g+h=50$$
$$b+c+e+f=50$$
$$e+f+h+i=50$$

將四式相加可得$(a+c+g+i)+2(b+d+f+h)+4e=200$。

設九個數之和為 $S$,則

$$\begin{aligned}4S&=4(a+c+g+i)+4(b+d+f+h)+4e\\&=200+3(a+c+g+i)+2(b+d+f+h)\\&=200+(a+c+g+i)+2(a+b+c+d+f+g+h+i)\end{aligned}$$

而

$$a+b+c+d+f+g+h+i\ge1+2+3+4+5+6+7+8=36$$
$$a+c+g+i\ge1+2+3+4=10$$

故$4S\ge200+10+2\times36=282$,因此$S\ge70.5$。由於 $S$ 是整數,所以$S\ge71$。

另一方面,如下的構造滿足$S=71$。

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 9 | 2 |
| 6 | 34 | 5 |
| 3 | 7 | 4 |

答案:71

12. 一個銳角三角形的三邊之長度為三個連續的正整數,其中一條邊上的高為 12 cm,請問這個三角形的面積是多少 $\text{cm}^2$?

【參考解法】

設另兩條邊長分別為 $a$、$b$,則由勾股定理得知高為 12 cm 的這條邊長為 $\sqrt{a^2-12^2}+\sqrt{b^2-12^2}$。易知兩個根號內都必須是正整數,故考慮$x^2-12^2=y^2$的

正整數解。化簡可得$(x+y)(x-y)=12^2=2^4\times3^2$，易解出$x=13$、15、20 或 37，其中僅有 13、15 可能是三個連續正整數中的兩個，經檢驗$\sqrt{13^2-12^2}+\sqrt{15^2-12^2}=5+9=14$，故三角形的面積為$\dfrac{14\times12}{2}=84\ \text{cm}^2$。

答案： $84\ \text{cm}^2$

13. 將所有小於 30 且不被 3 整除的正整數由小至大排成一列，然後計算每連續三個數的乘積的倒數，並將這些倒數相加得到 $S$，即

$$S=\frac{1}{1\times2\times4}+\frac{1}{2\times4\times5}+\cdots+\frac{1}{26\times28\times29}。$$

將 $S$ 化成最簡分數後，請問分子是多少？

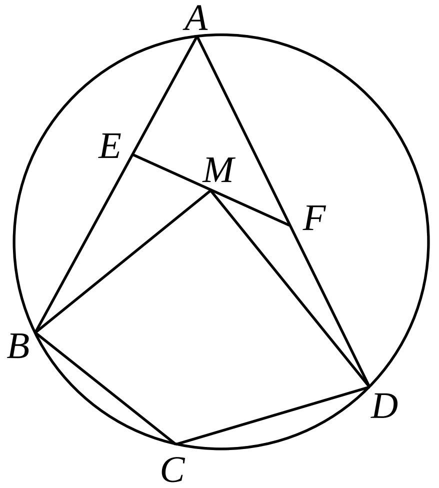
【參考解法】

$$\begin{aligned}3S&=\frac{3}{1\times2\times4}+\frac{3}{2\times4\times5}+\cdots+\frac{3}{26\times28\times29}\\&=(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times4})+(\frac{1}{2\times4}-\frac{1}{4\times5})+\cdots+(\frac{1}{26\times28}-\frac{1}{28\times29})\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{28\times29}\\&=\frac{14\times29-1}{28\times29}=\frac{405}{812}\end{aligned}$$

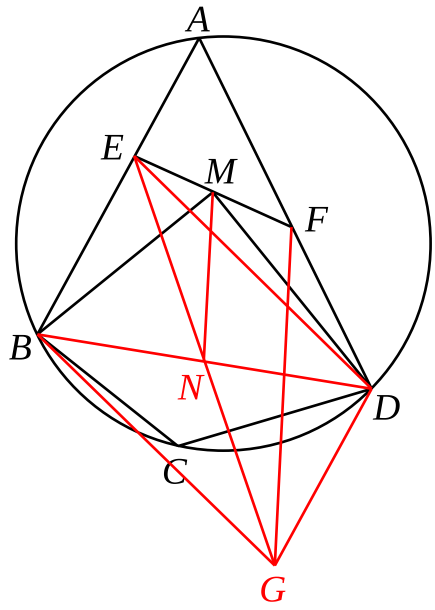
故得知$S=\dfrac{135}{812}$。

答案： 135

14. 凸四邊形 $ABCD$ 內接於圓 $O$。點 $E$、$F$ 分別在線段 $AB$、$AD$ 上且滿足 $BE=CD$、$DF=BC$。點 $M$ 是線段 $EF$ 的中點，如下圖所示。請證明 $BM\perp DM$。



【參考解法】




如圖，連接 $BD$ 並取 $BD$ 的中點 $N$，延長 $EN$ 至點 $G$，使得 $EN=NG$。(5 分)連接 $ED$、$DG$、$FG$、$BG$，則 $BEDG$ 是平行四邊形。此時可知 $DG=BE=CD$，且 $\angle GDF=180^\circ-\angle A=\angle DCB$，又 $DF=BC$，所以 $\triangle GDF\cong\triangle DCB$，所以 $FG=BD$。(5 分)

連接 $MN$。因為 $MN$ 是三角形 $EFG$ 的中位線，所以 $MN=\frac{1}{2}FG$。(5 分)

故 $MN=\frac{1}{2}BD=BN=ND$，所以 $BM\perp DM$。(5 分)

15. 有一個機器人可以根據使用者的合理指令生成一組數位編碼。小偉提出的指令如下：

（1）生成的每個編碼均為四位數（最左側的數碼不為 0）；

（2）任意兩個編碼至多在兩個數位上的數碼是對應相同的。

請問這個機器人至多可以生成多少個符合以上指令的編碼？

【參考解法 1】

由題意可知，任兩個編碼至少在兩個數位的數碼是對應不同的。因此，編碼數量不能超過 900 個。因為千位數只能為 1 至 9 這九個數碼，百位數與十位數可以為 0 至 9 這十個數碼，從而前面三位數碼總共可以構成 $9\times10\times10=900$ 個不同的三位數。若編碼數量大於或等於 901，由抽屜原理，至少有兩個編碼的前面三位數碼對應相同，矛盾。(5 分)

現在構造 900 個編碼：前面三位數碼取遍 100 至 999 這個 900 個號碼，第四位數碼取前面三位數碼之和的個位數。(5 分)

下面說明這 900 個編碼符合指令。對於任意兩個編碼，若前面三位數碼已經對應不同，則它們已經滿足要求；若前面三位數碼只有一個對應不同，另外兩個對應相同，則第四位數碼肯定不同。假設後面一種情況第四位數碼相同，不妨設這二個編碼分別為 $\overline{abce}$、$\overline{abde}$，其中 $0\le c<d\le 9$，由構造的方法可知，只能是 $a+b+d=a+b+c+10$，因此 $d-c=10$，不可能。故第四位數碼不同。(10 分)

【參考解法 2】

正確列出所有 900 個符合指令的編碼。(10 分，如有任何一個缺漏或不符合指令一律給 0 分)

證明至多有 900 個符合指令的編碼。(10 分)

答案：900 個

【評註】

這 900 個編碼也可以這樣構造：前面三位數碼取遍 100 至 999 這個 900 個號碼，第四位數碼取法為使得所有四個數碼之和為 10 的倍數。若前面三位數碼只有一個對應不同，另外兩個對應相同，則第四位數碼肯定不同。