

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2018/2019 小學高年級組第二輪檢測試題詳解

1. 請問算式 $(2019-2018) \times (2019-2017) \times \cdots \times (2019-2012) \times (2019-2011)$ 的
值之質因數分解包含多少個不同的質因數？

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 8

【參考解法】

$$\begin{aligned} & (2019-2018) \times (2019-2017) \times \cdots \times (2019-2012) \times (2019-2011) \\ &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \\ &= 2 \times 3 \times (2 \times 2) \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times (2 \times 2 \times 2 \times 2) \end{aligned}$$

包含不同的質因數有 2、3、5、7，共有 4 個。故選(C)。

答案：(C)

2. 四名同學相約去爬山，往返共花費 50 元車資。在山上，他們每人各購買了一瓶 5 元的飲料。請問平均每人各總共花費多少元？

(A) 12.5 (B) 13.75 (C) 17.5 (D) 30 (E) 55

【參考解法 1】

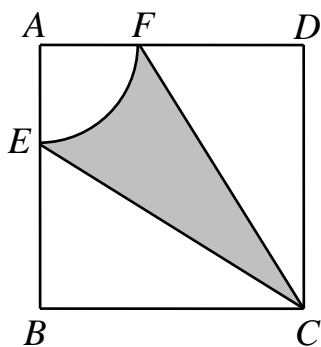
四個人總共花費了 $50 + 5 \times 4 = 70$ 元，故平均每人花費 $70 \div 4 = 17.5$ 元。故選(C)。

【參考解法 2】

每人坐車的平均花費為 $50 \div 4 = 12.5$ 元，平均每人各總共花費 $12.5 + 5 = 17.5$ 元。故選(C)。

答案：(C)

3. 已知正方形 $ABCD$ 的邊長為 8 cm，扇形 AEF 的半徑為 3 cm，如下圖所示，
請問圖中陰影部分的面積為多少 cm^2 ？（ π 取 3.14，結果保留兩位小數）



(A) 16.94 (B) 19.38 (C) 24.38 (D) 26.94 (E) 31.07

【參考解法】

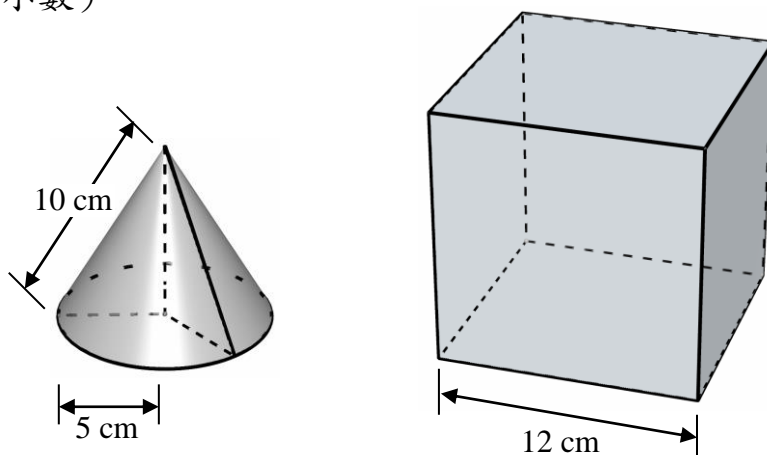
由圖可知，陰影部分的面積等於正方形的面積減去一個扇形與兩個直角三角形的面積。由題意可知 $BE = 8 - 3 = 5$ cm。故陰影部分的面積為

$$8 \times 8 - \frac{1}{4} \times 3.14 \times 3^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times 8 \times 5 \approx 16.94 \text{ cm}^2。$$

故選(A)。

答案：(A)

4. 下圖是一個圓錐形木塊與一個正方體木塊，若把這兩個物體粘在一起得到一個立體造型，請問這個立體造型的表面積至少為多少 cm^2 ？（ π 取 3.14，結果保留一位小數）



- (A) 785.5 (B) 942.5 (C) 1000.5 (D) 1021.0 (E) 1099.5

【參考解法】

為了使這個立體造型的表面積儘量小，這兩個物體重合的面要儘量大。對於圓錐，若它的側面與正方體粘在一起，則整體的表面積沒有減少，所以應該用圓錐的底面與正方體的一個面粘在一起。因為圓錐底面的直徑為 $5 \times 2 = 10 \text{ cm}$ ，而正方體的稜邊長為 12 cm ($> 10 \text{ cm}$)，所以圓錐的整個底面可以與正方體的一個面重合。故這個立體造型的表面積至少為

$$12 \times 12 \times 6 + \frac{1}{2} \times 3.14 \times 5 \times 2 \times 10 - 3.14 \times 5 \times 5 = 942.5 \text{ cm}^2。$$

故選 (B)。

答案：(B)

5. 已知 a 、 b 、 c 、 d 是不為 0 且互不相同的數碼，如果 $\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{dc} + \overline{ba}$ ，則稱這個等式為回文式，而能寫成回文式的兩個數則稱為一對回文數，例如： $54 + 12 = 21 + 45 = 66$ ，一對回文數的和稱為回文和。請問最小的回文和是什麼？

- (A) 22 (B) 33 (C) 44 (D) 55 (E) 99

【參考解法】

由 $\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{dc} + \overline{ba}$ 知 $10(a+c) + (b+d) = 10(b+d) + (a+c)$ ，故 $a+c = b+d$ 。由於能用兩種方式表示成兩個不同正整數之和的最小數為 $5 = 1+4 = 2+3$ ，故回文和的最小值為 55，其中一個例子為 $12 + 43 = 34 + 21 = 55$ 。故選(D)。

答案：(D)

6. 某班有 40 位學生，其中會騎單車的有 23 位，會游泳的有 33 位，兩項運動都不會的有 5 位，請問這個班只會騎單車不會游泳的學生共有多少位？

【參考解法】

由題意可知，兩項運動至少會一項的有 $40 - 5 = 35$ 位。因此，兩項運動都會的有 $23 + 33 - 35 = 21$ 位。故只會騎單車不會游泳的學生共有 $23 - 21 = 2$ 位。

答案：2 位

7. 某日，甲開汽車從 A 地到 B 地，速度為 60 km/h，行駛 1 個小時後汽車故障不能再開動了，甲立刻打電話向乙求助，乙接到電話後馬上開車從 A 地出發沿相同的路線前往甲所在的地點，速度為 80 km/h。乙到達甲所在的地點後，馬上拖著甲的車繼續前往 B 地，速度為 40 km/h。已知 A、B 兩地的距離為 180 km，請問甲從 A 地到 B 地共用了多少小時？

【參考解法】

由題意可知乙到達甲的汽車發生故障的地點用了 $60 \div 80 = \frac{3}{4}$ 小時，接著乙拖著甲的車到達 B 地用了 $(180 - 60 \times 1) \div 40 = 3$ 小時。因此甲從 A 地到 B 地共用了 $1 + \frac{3}{4} + 3 = 4\frac{3}{4} = 4.75$ 小時。

答案： $4\frac{3}{4} = 4.75$ 小時

8. 若 a 為質數，且 $a+20$ 與 $a+40$ 也都為質數，請問這樣的 a 值共有多少個？

【參考解法 1】

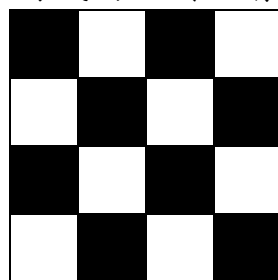
因為 20、40 都是偶數，而 $a+20$ 、 $a+40$ 都為質數，所以 $a \neq 2$ 。又因為 20 除以 3 餘 2，所以 a 除以 3 的餘數不能為 1，否則 $a+20$ 能被 3 整除，即為合數，不符合題意。同理， a 除以 3 的餘數不能為 2，否則 $a+40$ 為合數，不符合題意。因此， a 必定能被 3 整除，又是質數，所以只能 $a=3$ ，即這樣的 a 值共有 1 個。

【參考解法 2】

無論 a 的值為何， a 、 $a+20$ 、 $a+40$ 這三個數中一定有一個數能被 3 整除。但是 a 為質數，且 $a+20$ 與 $a+40$ 也都為質數，因此， a 必定能被 3 整除，又是質數，所以只能 $a=3$ ，即這樣的 a 值共有 1 個。

答案：1 個

9. 如圖，在 4×4 的黑白相間塗色的棋盤中，放入 4 枚相同的棋子。規定每個小方格內至多放一枚棋子，所有的棋子都必須放在同一種顏色的小方格內，且沒有任何兩枚棋子放在同一行或同一列。請問總共有多少種不同的放法？

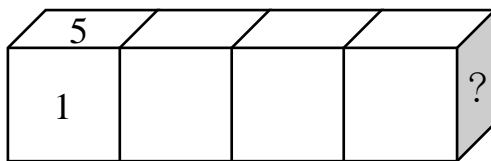


【參考解法】

若將所有棋子放在黑色格中，易知第 1、3 行的棋子有兩種放法，第 2、4 行的棋子也有兩種放法，故共有 4 種方法。同理，將所有棋子放在白色格中也有 4 種方法，故總共有 8 種不同的放法。

答案：8 種

10. 將 1、2、3、4、5、6 這六個數不重複地分別寫在每個正立方體的六個面上，且任意兩個相對面上的數之和等於 7，將四個正立方體如下圖所示連接在一起，相鄰兩個正立方體相連接的面上數之和等於 8，請問圖中“？”處的數是多少？

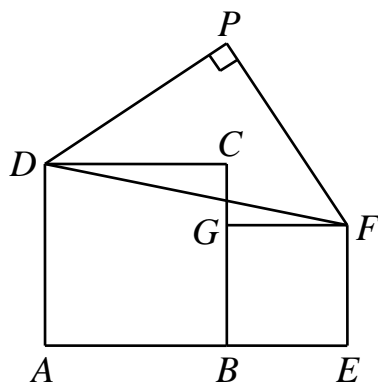


【參考解法】

由於每個正立方體任意兩個相對面上數之和等於 7，所以 1 與 6 相對、2 與 5 相對、3 與 4 相對，則左邊第一個正立方體右側面上的數可以是 3 或 4；若該數是 3，則第二個正立方體左側面的數是 5，右側面的數是 2；第三個正立方體左側面的數是 6，右側面的數是 1；第四個正立方體左側面的數是 7，矛盾。因此左邊第一個正立方體右側面的數是 4，則第二個正立方體左側面的數是 4，右側面的數是 3；第三個正立方體左側面的數是 5，右側面的數是 2；第四個正立方體左側面的數是 6，可得右邊第一個正立方體右側面的數是 1。

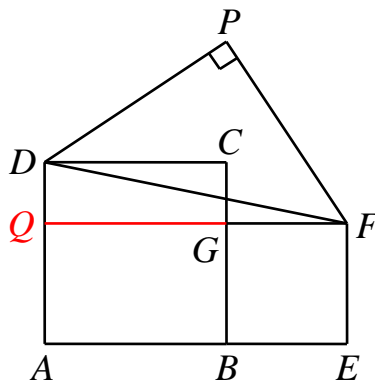
答案：1

11. 已知正方形 $ABCD$ 、 $BEFG$ 的邊長分別為 6 cm、4 cm，三角形 DFP 為等腰直角三角形，如下圖所示。請問三角形 DFP 的面積為多少 cm^2 ？



【參考解法】

延長 FG 交 AD 於點 Q ，易知三角形 DQF 為直角三角形，且 $DQ = 6 - 4 = 2 \text{ cm}$ 、 $QF = 6 + 4 = 10 \text{ cm}$ 。



由勾股定理可得 $DP^2 + PF^2 = DF^2 = DQ^2 + QF^2 = 2^2 + 10^2 = 104$ 。由於 $DP = PF$ ，故 $DP^2 = 52$ 。所以三角形 DFP 的面積為 $\frac{1}{2} \times DP \times PF = \frac{1}{2} \times DP^2 = 26 \text{ cm}^2$ 。

答案：26 cm^2

12. 一隻老鼠從左上角標有“*I*”的小方格開始，按照“*IMAS2019*”的路徑從一個小方格走到下一個有公共邊的小方格，請問行走這八個小方格的不同路徑總共有多少條？

<i>I</i>	<i>M</i>	<i>A</i>	<i>S</i>	
<i>M</i>	<i>A</i>	<i>S</i>	2	0
<i>A</i>	<i>S</i>	2	0	1
<i>S</i>	2	0	1	9
	0	1	9	

【參考解法】

下面表格中的每個數表示到達該小方格的路徑數，該數可以通過遞歸得出：每個正方形用先前已經填入數的相鄰正方形內的數之和填入。
從表格中可知，長度為八的不同路徑總共有 $34 + 34 = 68$ 條。

1	1	1	1	
1	2	3	4	4
1	3	6	10	14
1	4	10	20	34
	4	14	34	

答案：68 條

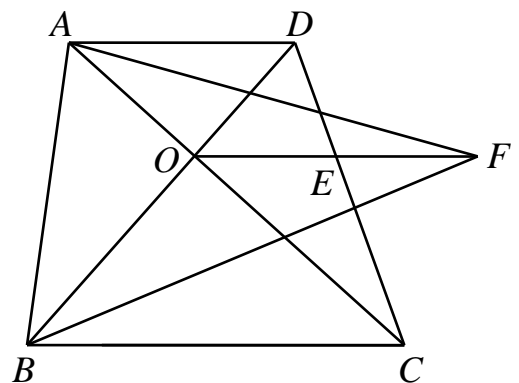
13. 已知正整數 a 、 b 滿足 $1 \leq a < b \leq 60$ 且 $a \times b$ 能被 5 整除，請問符合此條件的不同正整數對 (a, b) 總共有多少對？

【參考解法】

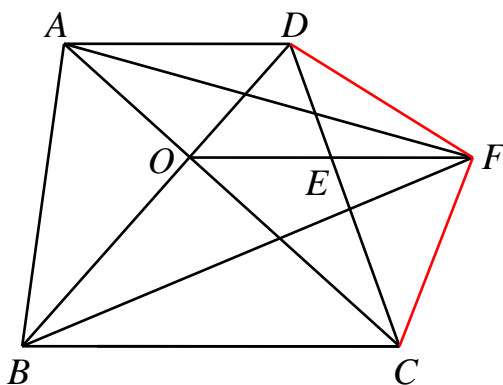
從 1 到 60 的 60 個數之中，有 12 個數能被 5 整除，有 48 個數不能被 5 整除。若 a 、 b 都能被 5 整除，則可從能被 5 整除的 12 個數中選取二個，將較小的數當作 a ，將較大的數當作 b ，此情況的數對有 $\frac{12 \times 11}{2} = 66$ 對；若 a 、 b 中只有一個能被 5 整除，則可從能被 5 整除的 12 個數中選取一個，從不能被 5 整除的 48 個數中選取一個，將較小的數當作 a ，將較大的數當作 b ，此情況的數對有 $12 \times 48 = 576$ 對。故符合此條件的不同正整數對 (a, b) 總共有 $66 + 576 = 642$ 對。

答案：642 對

14. 已知 $ABCD$ 為梯形，邊 AD 平行於 BC ，對角線 AC 與 BD 交於點 O ，過 O 作 OE 平行於 BC 交 CD 於點 E ，且延長 OE 至點 F ，使得 $OE = EF$ ，如圖所示。若 $AD = 6\text{cm}$ 、 $BC = 10\text{cm}$ ，梯形 $ABCD$ 的面積為 64cm^2 ，請問三角形 ABF 的面積為多少 cm^2 ？



【參考解法 1】



連接 DF 與 CF ，由平行線的性質可知三角形 AOF 與三角形 DOF 的面積相等、三角形 BOF 與三角形 COF 的面積相等，所以四邊形 $AOBF$ 與四邊形 $DOCF$ 的面積相等。由題意可知點 E 是線段 OF 的中點，所以三角形 DOC 與三角形 DCF 的面積相等，因此四邊形 $DOCF$ 面積為三角形 DOC 面積的 2 倍。(5 分)

因為 $\frac{\text{三角形 } ACD \text{ 的面積}}{\text{三角形 } ABC \text{ 的面積}} = \frac{\text{三角形 } ABD \text{ 的面積}}{\text{三角形 } BCD \text{ 的面積}} = \frac{AD}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ ，所以三角形 ABD

面積為梯形 $ABCD$ 面積的 $\frac{3}{5+3} = \frac{3}{8}$ 倍，即 $64 \times \frac{3}{8} = 24 \text{ cm}^2$ 。(5 分)

由三角形 DOA 與三角形 BOC 相似可知 $\frac{DO}{OB} = \frac{AD}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ 。

(或由共邊定理可知 $\frac{DO}{OB} = \frac{\text{三角形 } ACD \text{ 的面積}}{\text{三角形 } ABC \text{ 的面積}} = \frac{3}{5}$)

從而 $\frac{\text{三角形 } ADO \text{ 的面積}}{\text{三角形 } ABO \text{ 的面積}} = \frac{DO}{OB} = \frac{3}{5}$ 。因此

三角形 ABO 面積為三角形 ABD 面積的 $\frac{5}{5+3} = \frac{5}{8}$ 倍，即 $24 \times \frac{5}{8} = 15 \text{ cm}^2$ 。(5 分)

由題意可知 $AD \parallel BC$ ，因此三角形 ABD 與三角形 ACD 的面積相等，兩邊同時減去三角形 AOD 的面積後可得知三角形 ABO 與三角形 DOC 的面積相等。

綜上可得，因三角形 ABF 的面積為三角形 ABO 與四邊形 $AOBF$ 的面積和，而四邊形 $AOBF$ 與四邊形 $DOCF$ 的面積相等，且四邊形 $DOCF$ 的面積為三角形 DOC 面積的 2 倍，再因三角形 ABO 與三角形 DOC 的面積相等，故三角形 ABF 的面積為三角形 ABO 面積的 3 倍，即 $15 \times 3 = 45 \text{ cm}^2$ 。(5 分)

【參考解法 2】

由題意可知 $AD \parallel BC$ ，因此三角形 AOD 與三角形 COB 相似，即

$$\frac{DO}{OB} = \frac{AO}{OC} = \frac{AD}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \text{ 且 } \frac{\text{三角形 } AOD \text{ 的面積}}{\text{三角形 } COB \text{ 的面積}} = \frac{AD^2}{BC^2} = \left(\frac{6}{10}\right)^2 = \frac{9}{25} \text{。(5 分)}$$

令三角形 AOD 的面積為 $9x$ ，則三角形 COB 的面積為 $25x$ 。而三角形 AOB 與三角形 COD 的面積都是 $9x \times \frac{5}{3} = 15x$ 。

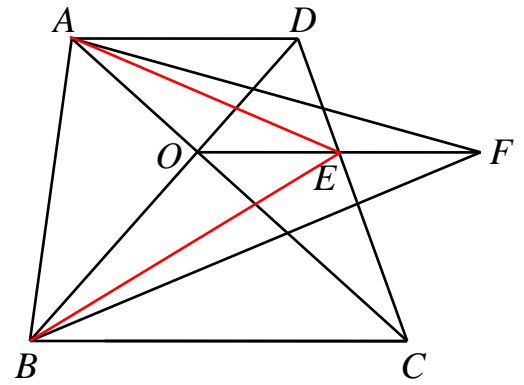
故梯形 $ABCD$ 的面積為 $9x + 25x + 15x + 15x = 64x$ ，即 $x = 1$ 。因此三角形 AOB 、 DOC 的面積都為 15 cm^2 (5 分)

連接 AE 與 BE 。由平行線的性質以及 $OE = EF$ 可知三角形 DOE 、 AOE 、 AEF 的面積都相等，即三角形 AOF 面積為三角形 DOE 面積的 2 倍。同樣地，也可以得知三角形 COE 、 BOE 、 BEF 的面積都相等，即三角形 BOF 面積為三角形 COE 面積的 2 倍。(5 分)

而三角形 ABF 的面積是三角形 ABO 、 AOF 、 BOF 的面積總和，即為

$$15 + 2 \times (\text{三角形 } DOE \text{ 面積} + \text{三角形 } COE \text{ 面積}) = 15 + 2 \times 15 = 45 \text{ cm}^2。 (5 \text{ 分})$$

答案： 45 cm^2



15. 有一個機器人可以根據使用者的合理指令生成一組數位編碼。小偉提出的指令如下：

- (1) 生成的每個編碼均為三位數（最左側的數碼不為 0）；
- (2) 任意兩個編碼至多在一個數位上的數碼是對應相同的。

請問這個機器人至多可以生成多少個符合以上指令的編碼？

【參考解法 1】

由題意可知，任兩個編碼至少在兩個數位的數碼是對應不同的。因此，編碼數量不能超過 90 個。因為百位數只能為 1 至 9 這九個數碼，十位數可以為 0 至 9 這十個數碼，從而前面兩位數碼總共可以構成 $9 \times 10 = 90$ 個不同的兩位數。若編碼數量大於或等於 91，由抽屜原理，至少有兩個編碼的前面兩位數碼對應相同，矛盾。(5 分)

現在構造 90 個編碼：前面兩位數碼取遍 10 至 99 這個 90 個號碼，第三位數碼取前面兩位數碼之和的個位數。(5 分)

下面說明這 90 個編碼符合指令。對於任意兩個編碼，若前面兩位數碼已經對應不同，則它們已經滿足要求；若前面兩位數碼只有一個對應不同，另外一個對應相同，則第三位數碼肯定不同。假設後面一種情況第三位數碼相同，不妨設這兩個編碼分別為 \overline{abd} 、 \overline{acd} ，其中 $0 \leq c < b \leq 9$ ，由構造的方法可知，只能是 $a + b = a + c + 10$ ，因此 $b - c = 10$ ，不可能。所以第三位數碼不同。(10 分)

【參考解法 2】

正確列出所有 90 個符合指令的編碼。(10 分，如有任何一個缺漏或不符合指令一律給 0 分)

證明至多有 90 個符合指令的編碼。(10 分)

答案： 90 個

【評註】

這 90 個編碼也可以這樣構造：前面兩位數碼取遍 10 至 99 這個 90 個號碼，第三位數碼取法為使得所有三個數碼之和為 10 的倍數。若前面兩位數碼只有一個對應不同，另外一個對應相同，則第三位數碼肯定不同。