第十章　二次根式

10.1　二次根式

式子$\sqrt{a}$ ($a \ge 0$)叫做**二次根式**。例如：$\sqrt{3}$、$\sqrt{\frac{3}{5}}$、$\sqrt{b^2+1}$、$\sqrt{(a-b)^2}$ 等都是二次根式。在實數範圍內，負數沒有平方根，所以$\sqrt{-5}$、$\sqrt{a}$ ($a<0$)沒有意義。在本章裡，如果沒有特別說明，所有字母都表示正數。

我們在前一章學過，正數 a 之正的平方根，也叫做 a 的算術平方根，記作$\sqrt{a}$。這表明，$\sqrt{a}$ 是一個正數，即$\sqrt{a}>0$。零的平方根也叫做零的算術平方根，記作$\sqrt{0}$。我們有$\sqrt{0}=0$。從上面的分析可以看出，$\sqrt{a}\ge 0$ ($a\ge 0$)，即$\sqrt{a}$ ($a \ge 0$)總是一個非負數(正數與零統稱為非負數)。

根據平方根的意義，如果一個數的平方等於 2，這個數就叫做 2 的平方根。因此，可以知道

$$(\sqrt{2})^2 = 2\text{。}$$

一般地，如果一個數的平方等於 a，這個數就叫做 a 的平方根。因此，我們有

$$\boxed{(\sqrt{a})^2 = a \ \ (a \ge 0)}$$

【例 1】計算：

(1)　$(\sqrt{4})^2$；　　(2)　$(\sqrt{5})^2$；

(3)　$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2$；　　(4)　$(2\sqrt{3})^2$。[1]

解　(1)　$(\sqrt{4})^2 = 2^2 = 4$或$(\sqrt{4})^2 = 4$；

---

[1] $2\sqrt{3}$ 表示$2\times\sqrt{3}$；一般地，$b\sqrt{a}$ 表示$b\times\sqrt{a}$。

(2) $(\sqrt{5})^2 = 5$；

(3) $\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)^2 = \dfrac{3}{5}$；

(4) $(2\sqrt{3})^2 = 2^2 \times (\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$。

把上面的公式$(\sqrt{a})^2 = a\ (a \geq 0)$反過來，就得到

$$\boldsymbol{a = (\sqrt{a})^2} \quad (a \geq 0)$$

利用這個公式，可以把任何一個非負數寫成一個數的平方之形式。

【例 2】 把下面的非負數寫成平方的形式：

(1) 2； (2) 0.5； (3) $\dfrac{1}{7}$； (4) ab。

$\boxed{\text{解}}$ (1) $2 = (\sqrt{2})^2$； (2) $0.5 = (\sqrt{0.5})^2$；

(3) $\dfrac{1}{7} = \left(\sqrt{\dfrac{1}{7}}\right)^2$； (4) $ab = (\sqrt{ab})^2$。

練 習

1. 計算：

(1) $(\sqrt{0.5})^2$； (2) $\left(\sqrt{\dfrac{2}{7}}\right)^2$； (3) $(5\sqrt{7})^2$； (4) $\left(-3\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)^2$。

2. 把下面的非負數寫成平方的形式：

(1) 9； (2) 6； (3) 2.5； (4) 0.25； (5) b； (6) $4a$。

根據算術平方根的意義，我們分 $a > 0$ 、 $a = 0$ 、 $a < 0$ 三種情況來研究根式$\sqrt{a^2}$。

(1) $\sqrt{2^2} = 2$ 、 $\sqrt{3^2} = 3$；

一般地，當$a > 0$時，$\sqrt{a^2} = a$。

(2) $\sqrt{0^2}=0$ ；

也就是說，當$a=0$時，$\sqrt{a^2}=a$ 。

(3) $\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2$ ，2 與-2為相反數，即$2=-(-2)$ ；

$\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3$ ，3 與-3為相反數，即$3=-(-3)$ ；

一般地，當$a<0$時，$\sqrt{a^2}=-a$ 。

綜合上面的結果，有

$$\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & (a>0) \\ 0 & (a=0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$$

我們已經知道，

$$|a|=\begin{cases} a & (a>0) \\ 0 & (a=0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$$

比較$\sqrt{a^2}$與$|a|$，就得到

$$\boxed{\sqrt{\boldsymbol{a}^2}=|\boldsymbol{a}|=\begin{cases} \boldsymbol{a} & (\boldsymbol{a}>\mathbf{0}) \\ \mathbf{0} & (\boldsymbol{a}=\mathbf{0}) \\ -\boldsymbol{a} & (\boldsymbol{a}<\mathbf{0}) \end{cases}}$$

【例 3】計算： (1) $\sqrt{(-1.5)^2}$ ； (2) $\sqrt{(a-3)^2}$ $(a<3)$。

解 (1) $\sqrt{(-1.5)^2}=|-1.5|=1.5$ ；

(2) $\sqrt{(a-3)^2}=|a-3|$

$\because\ a<3$

$\therefore\ a-3<0$

$\therefore\ \sqrt{(a-3)^2}=|a-3|=-(a-3)=3-a$

練　習

1. (口答) 下列等式能不能成立？為什麼？

   (1) $(\sqrt{7})^2=7$；　　(2) $(-\sqrt{7})^2=-7$；

   (3) $\sqrt{6^2}=6$；　　(4) $\sqrt{(-6)^2}=-6$。

2. (口答) 說出下列各式的值：

   (1) $(\sqrt{0.8})^2$；　　(2) $\sqrt{0.8^2}$；

   (3) $\sqrt{(-0.8)^2}$；　　(4) $-\sqrt{(-0.8)^2}$。

3. 化簡下列各式：

   (1) $\sqrt{(5-9)^2}$；　　(2) $\sqrt{\left(3\frac{1}{2}-2\right)^2}$；

   (3) $\sqrt{(b-4)^2}$ $(b>4)$；　　(4) $\sqrt{(m-n)^2}$ $(m<n)$。

4. 甲、乙兩人計算$a+\sqrt{1-2a+a^2}$的值，當$a=5$的時候，得到不同的答案，甲的解答是

$$a+\sqrt{1-2a+a^2}=a+\sqrt{(1-a)^2}=a+1-a=1$$

   乙的解答是

$$\begin{aligned}a+\sqrt{1-2a+a^2}&=a+\sqrt{(a-1)^2}=a+a-1\\&=2a-1=2\times5-1=9\end{aligned}$$

   那一個答案是正確的？錯誤的解答，錯在哪裡？為什麼？

10.2　二次根式的性質

我們知道，二次根式$\sqrt{a}$ $(a\geq 0)$就是a的算術平方根之表示式，因此，研究二次根式的性質，只要研究算術平方根的性質就可以了。

1.　積的算術平方根

我們看下面的例子：

$$(\sqrt{4\times 9})^2 = 4\times 9 = 36$$

$$(\sqrt{4}\times\sqrt{9})^2 = (\sqrt{4})^2\times(\sqrt{9})^2 = 4\times 9 = 36$$

$\sqrt{4\times 9}$ 與 $\sqrt{4}\times\sqrt{9}$ 又都是正數，這就說明 $\sqrt{4\times 9}$ 與 $\sqrt{4}\times\sqrt{9}$ 都是 36 的算術平方根，而 36 的算術平方根只有一個，所以

$$\sqrt{4\times 9} = \sqrt{4}\times\sqrt{9} \text{ 。}$$

一般地，有

$$\boxed{\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad (a\ge 0\text{，}b\ge 0)}$$

這就說是：**積的算術平方根，等於積中各因式的算術平方根之積。**

【例 1】計算： (1) $\sqrt{16\times 81}$； (2) $\sqrt{0.09\times 0.25}$；

(3) $\sqrt{17^2-8^2}$ 。

解

(1) $\sqrt{16\times 81} = \sqrt{16}\times\sqrt{81} = 4\times 9 = 36$；

(2) $\sqrt{0.09\times 0.25} = \sqrt{0.09}\times\sqrt{0.25} = 0.3\times 0.5 = 0.15$；

(3) $\sqrt{17^2-8^2} = \sqrt{(17+8)(17-8)} = \sqrt{25}\times\sqrt{9} = 5\times 3 = 15$ 。

練　習

1. 計算：

(1) $\sqrt{49\times 121}$； (2) $\sqrt{81\times 169}$； (3) $\sqrt{9\times 25\times 225}$；

(4) $\sqrt{26^2-10^2}$； (5) $\sqrt{0.65^2-0.16^2}$；(6) $\sqrt{25a^4b^6c^2}$ 。

2. 下列各式的計算對不對？為什麼？

(1) $\sqrt{3^2+4^2} = 3+4 = 7$； (2) $\sqrt{41^2-40^2} = 41-40 = 1$ 。

【例 2】化簡：

(1) $\sqrt{10^2\times 2}$； (2) $\sqrt{48}$；

(3) $\sqrt{4a^2b^3}$； (4) $\sqrt{x^4+x^2y^2}$ 。

解　(1)　$\sqrt{10^2\times 2}=\sqrt{10^2}\times\sqrt{2}=10\sqrt{2}$；

(2)　$\sqrt{48}=\sqrt{4^2\times 3}=\sqrt{4^2}\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}$；

(3)　$\sqrt{4a^2b^3}=\sqrt{2^2\bullet a^2\bullet b^2\bullet b}=2ab\sqrt{b}$；

(4)　$\sqrt{x^4+x^2y^2}=\sqrt{x^2(x^2+y^2)}=x\sqrt{x^2+y^2}$。

從例 2 可以看出，根據積的算術平方根之性質，如果被開方數中有的因式能開的盡方，那麼這些因式可以用它們的算術平方根來代替而移到根號外面，從而將式子化簡。反過來，我們也可以把根號外面的非負因式平方後移到根號裡面。

【例 3】把下列各式中根號外面的因式適當改變後移到根號裡面：

(1)　$5\sqrt{3}$；　(2)　$-3\sqrt{a}$；

(3)　$4b\sqrt{bc}$。

解　(1)　$5\sqrt{3}=\sqrt{5^2\times 3}=\sqrt{75}$；

(2)　$-3\sqrt{a}=-\sqrt{3^2\bullet a}=-\sqrt{9a}$；

(3)　$4b\sqrt{bc}=\sqrt{(4b)^2\bullet bc}=\sqrt{16b^3c}$。

想一想：$-3\sqrt{a}$ 為什麼不能寫成 $\sqrt{(-3)^2a}=\sqrt{9a}$？

【例 4】把下列各式中根號外面的因式適當改變後移到根號裡面：

(1)　$10\sqrt{0.1}$；　(2)　$5\sqrt{\frac{1}{5}}$。

解　(1)　$10\sqrt{0.1}=\sqrt{10^2\times 0.1}=\sqrt{10}$；

(2)　$5\sqrt{\frac{1}{5}}=\sqrt{5^2\times\frac{1}{5}}=\sqrt{5}$。

練　習

1. 化簡：

(1) $\sqrt{18}$；　(2) $-\sqrt{27\times 15}$；　(3) $\sqrt{21^2-4^2}$；

(4) $\sqrt{9x}$；　(5) $\sqrt{5a^3}$；　(6) $\sqrt{8x^2y^3}$；

(7) $\dfrac{1}{6}\sqrt{9a^2bc^3}$；　(8) $\sqrt{16(x+2)^3}$。

2. 把下列各式中根號外面的因式適當改變後移到根號裡面：

(1) $5\sqrt{2}$；　(2) $-7\sqrt{3}$；　(3) $6\sqrt{5}$；

(4) $2\sqrt{0.5}$；　(5) $-12\sqrt{\dfrac{c}{2}}$；　(6) $a\sqrt{\dfrac{b}{a}}$。

3. (口答) 下面的計算對不對，為什麼？

(1) $2a\sqrt{b}=\sqrt{2a^2b}$；　(2) $-3\sqrt{2}=\sqrt{(-3)^2\times 2}=\sqrt{18}$；

(3) $3\sqrt{\dfrac{a}{3}}=\sqrt{a}$。

2.　商的算術平方根

我們看下面的例子：

$$\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2=\frac{2}{5}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{5})^2}=\frac{2}{5}$$

$\sqrt{\dfrac{2}{5}}$ 與 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ 又都是正數，這就說明 $\sqrt{\dfrac{2}{5}}$ 與 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ 都是 $\dfrac{2}{5}$ 的算術平方根，而 $\dfrac{2}{5}$ 的算術平方根只有一個，所以

$$\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\ 。$$

一般地，有

$$\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\quad (a\geq 0，b>0)}$$

這就是說：**商的算術平方根，等於被除式的算術平方根除以除式的算術平方根。**

【例 5】計算：

(1) $\sqrt{\frac{4}{9}}$；　　(2) $\sqrt{1\frac{15}{49}}$；

(3) $\sqrt{\frac{3}{100}}$；　　(4) $\sqrt{\frac{25x^4}{81y^2}}$。

解　(1) $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$；

(2) $\sqrt{1\frac{15}{49}}=\sqrt{\frac{64}{49}}=\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{49}}=\frac{8}{7}=1\frac{1}{7}$；

(3) $\sqrt{\frac{3}{100}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{100}}=\frac{1}{10}\sqrt{3}$；

(4) $\sqrt{\frac{25x^4}{81y^2}}=\frac{\sqrt{25x^4}}{\sqrt{81y^2}}=\frac{5x^2}{9y}$。

再看一個例子：

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{a\bullet b}{b\bullet b}}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2}}=\frac{1}{b}\sqrt{ab}\ 。$$

這就是說，如果被開方數是一個分式(或分數)，就可以用一個適當的代數式同乘分子與分母，使分母開的盡方，然後把分母用它的算術平方根來代替而移到根號外面，從而化去分號內的分母。

【例 6】 化去下列各式中根號內的分母：(1) $\sqrt{\frac{2}{3}}$；

(2) $\sqrt{1\frac{1}{7}}$； (3) $\sqrt{\frac{4x}{3y}}$； (4) $\sqrt{\frac{a-5}{a+5}}$ $(a>5)$。

解

(1) $\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2\times3}{3\times3}}=\frac{1}{3}\sqrt{6}$；

(2) $\sqrt{1\frac{1}{7}}=\sqrt{\frac{8}{7}}=\sqrt{\frac{8\times7}{7\times7}}=\sqrt{\frac{2^2\times2\times7}{7\times7}}=\frac{2}{7}\sqrt{14}$；

(3) $\sqrt{\frac{4x}{3y}}=\sqrt{\frac{4x\bullet3y}{3y\bullet3y}}=\frac{2}{3y}\sqrt{3xy}$；

(4) $\sqrt{\frac{a-5}{a+5}}=\sqrt{\frac{(a-5)(a+5)}{(a+5)^2}}=\frac{1}{a+5}\sqrt{a^2-25}$。

練 習

1. 計算：

(1) $\sqrt{\frac{25}{64}}$； (2) $\sqrt{\frac{4}{225}}$； (3) $\sqrt{\frac{0.01}{0.16}}$；

(4) $\sqrt{\frac{36\times9}{121}}$； (5) $\sqrt{\frac{0.04\times144}{0.49\times169}}$； (6) $\sqrt{4\frac{1}{9}}$；

(7) $\sqrt{\frac{6}{4a^2}}$； (8) $\sqrt{\frac{49m^2n}{9c^2}}$。

2. 化去下列各式中根號內的分母：

(1) $\sqrt{\frac{1}{2}}$； (2) $\sqrt{\frac{7}{12}}$； (3) $\sqrt{5\frac{1}{3}}$；

(4) $6\sqrt{\frac{5}{6}}$； (5) $\sqrt{\frac{27}{2x}}$； (6) $\sqrt{\frac{n}{3m^2}}$。

(7) $\sqrt{\frac{a}{50}}$； (8) $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ $(a>b)$。

練　習

3. (口答) 下面的計算對不對？為什麼？

(1) $\sqrt{\dfrac{3}{4}}=2\sqrt{3}$；　　(2) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{3}$；

(3) $\sqrt{\dfrac{8}{2}}=\sqrt{2}$；　　(4) $\sqrt{\dfrac{a}{9b}}=\dfrac{1}{3b}\sqrt{a}$。

10.3　最簡二次根式與同類二次根式

1.　最簡二次根式

我們看下面的例子：

$$\sqrt{a^3b}=\sqrt{a^2\bullet ab}=\sqrt{a^2}\bullet\sqrt{ab}=a\sqrt{ab}$$

$$a^2\sqrt{\frac{b}{a}}=a^2\sqrt{\frac{ab}{a^2}}=\frac{a^2}{a}\sqrt{ab}=a\sqrt{ab}$$

二次根式 $\sqrt{a^3b}$ 與 $a^2\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ [2]的形式雖然不同，但是它們都可以化成形式比較簡單的二次根式 $a\sqrt{ab}$ 。與二次根式 $\sqrt{a^3b}$ 與 $a^2\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 比較，二次根式 $a\sqrt{ab}$ 滿足下列兩個條件：

(1)　被開方數的每一個因式的指數都小於根指數 2；

(2)　被開方數不含分母。

我們把符合這兩個條件的二次根式，叫做**最簡二次根式**。例如：$4\sqrt{5a}$ 、$\dfrac{\sqrt{y}}{2}$ 、$\sqrt{a^2+b}$ 等都是最簡二次根式；而 $\sqrt{4a^3}$ 、$\sqrt{\dfrac{c}{3}}$ 、$\sqrt{8}$ 等就不是最簡二次根式。

---

[2] 為了方便，我們把形如 $b\sqrt{a}$ ($a\geq 0$)的式子也叫做二次根式，例如 $10\sqrt{2}$ 、$-\sqrt{3}$ 、 $2ab\sqrt{c^2+1}$ 等。

一個二次根式，如果不是最簡二次根式，可以用上節所說的方法，化去根號內的分母，並把被開方數中能開得盡方的因式用算術平方根代替移到根號外面，把它化成最簡二次根式。

【例】 把下列根式化成最簡二次根式：

(1) $\sqrt{12}$；　(2) $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$；

(3) $4\sqrt{1\dfrac{1}{2}}$；　(4) $x^2\sqrt{\dfrac{y}{x}}$。

解

(1) $\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times 3}=2\sqrt{3}$；

(2) $\sqrt{\dfrac{1}{3}}=\sqrt{\dfrac{3}{3\times 3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；

(3) $4\sqrt{1\dfrac{1}{2}}=4\sqrt{\dfrac{3}{2}}=4\sqrt{\dfrac{6}{4}}=2\sqrt{6}$；

(4) $x^2\sqrt{\dfrac{y}{x}}=x^2\sqrt{\dfrac{xy}{x^2}}=x\sqrt{xy}$。

注意：把二次根式化成最簡二次根式時，往往需要把被開方數分解質因數(或分解因式)。

練　習

1. 下列根式中，那些是最簡二次根式？哪些不是？如果不是，就把它化成最簡二次根式。

(1) $\sqrt{45}$；　(2) $\sqrt{25a^3}$；　(3) $\sqrt{\dfrac{ab}{4}}$；

(4) $\sqrt{14}$；　(5) $\sqrt{\dfrac{b}{a}}$；　(6) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

(7) $\sqrt{6a^2b^3}$；　(8) $\sqrt{\dfrac{4y}{5x}}$；　(9) $\sqrt{a+b^2}$。

練　習

2. 把下列根式化成最簡二次根式：

(1) $3\sqrt{216}$；　(2) $\sqrt{32}$；　(3) $\sqrt{\dfrac{8}{9}}$；

(4) $\sqrt{1\dfrac{1}{3}}$；　(5) $\sqrt{\dfrac{20a^2b}{a}}$；　(6) $2\sqrt{a^3b^3}$；

(7) $x^2\sqrt{\dfrac{1}{8x^3}}$；　(8) $\sqrt{\dfrac{ab}{(a+b)^2}}$；　(9) $(a-b)\sqrt{\dfrac{1}{a-b}}$ $(a>b)$

2. 同類二次根式

把$\sqrt{12}$與$\sqrt{\dfrac{1}{3}}$化成最簡二次根式，得到

$$\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times 3}=2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{3}{3\times 3}}=\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

二次根式$2\sqrt{3}$與$\dfrac{1}{3}\sqrt{3}$的被開方數相同，都是 3。幾個二次根式化成最簡二次根式以後，如果被開方數相同，這幾個二次根式就叫做**同類二次根式**。例如，$\sqrt{12}$、$\sqrt{\dfrac{1}{3}}$、$\dfrac{1}{2}\sqrt{3}$是同類二次根式；$a\sqrt{ab}$、$3\sqrt{ab}$也是同類二次根式。而$\sqrt{2}$與$\sqrt{3}$則不是同類二次根式；$\sqrt{a}$與$\sqrt{3a}$也不是同類二次根式。

我們知道，在多項式中，遇到同類項就可以合併。同樣，在幾個二次根式的和裡，遇到同類二次根式也可以合併。

【例 1】 下列二次根式中，哪些是同類二次根式？

$\sqrt{2}$ 、$\sqrt{75}$ 、$\sqrt{\frac{1}{50}}$ 、$\sqrt{\frac{1}{27}}$ 、$\sqrt{3}$ 、$\frac{2}{3}\sqrt{8ab^3}$ 、$6b\sqrt{\frac{a}{2b}}$ 。

解

$\because$ $\sqrt{75}=\sqrt{5^2\times 3}=5\sqrt{3}$

$\sqrt{\frac{1}{50}}=\sqrt{\frac{2}{50\times 2}}=\frac{1}{10}\sqrt{2}$

$\sqrt{\frac{1}{27}}=\sqrt{\frac{3}{27\times 3}}=\frac{1}{9}\sqrt{3}$

$\frac{2}{3}\sqrt{8ab^3}=\frac{2}{3}\bullet 2b\sqrt{2ab}=\frac{4b}{3}\sqrt{2ab}$

$6b\sqrt{\frac{a}{2b}}=6b\sqrt{\frac{a\bullet 2b}{2b\bullet 2b}}=3\sqrt{2ab}$

$\therefore$ $\sqrt{2}$ 、$\sqrt{\frac{1}{50}}$ 是同類二次根式；

$\sqrt{75}$ 、$\sqrt{\frac{1}{27}}$ 、$\sqrt{3}$ 是同類二次根式；

$\frac{2}{3}\sqrt{8ab^3}$ 、$6b\sqrt{\frac{a}{2b}}$ 是同類二次根式。

【例 2】 合併下列各式中的同類二次根式：

(1) $2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ；

(2) $3\sqrt{xy}-a\sqrt{xy}+b\sqrt{xy}$ 。

解

(1) $2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$=\left(2+\frac{1}{3}-1\right)\sqrt{2}+\left(-\frac{1}{2}+1\right)\sqrt{3}=\frac{4}{3}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}$

(2) $3\sqrt{xy}-a\sqrt{xy}+b\sqrt{xy}=(3-a+b)\sqrt{xy}$ 。

練　習

1. 下列各組裡的二次根式是不是同類二次根式？

   (1) $\sqrt{63}$ 、$\sqrt{28}$ ；　　(2) $\sqrt{12}$ 、$\sqrt{27}$ 、$4\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ ；

   (3) $\sqrt{4x^3}$ 、$2\sqrt{2x}$ ；　　(4) $\sqrt{18}$ 、$\sqrt{50}$ 、$2\sqrt{\dfrac{2}{9}}$ ；

   (5) $\sqrt{2x}$、$\sqrt{2a^2x^3}$ 、$\sqrt{50xy^2}$ 。

2. 合併下列各式中的同類二次根式：

   (1) $6\sqrt{a}+2\sqrt{b}-4\sqrt{a}+3\sqrt{b}$ ；

   (2) $\sqrt{5}+\sqrt{3}+2\sqrt{5}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}-3\sqrt{5}$ ；

   (3) $6\sqrt{3}+\sqrt{0.12}+\sqrt{48}$ ；

   (4) $\dfrac{5}{2}\sqrt{xy}-2\sqrt{xy}-\dfrac{\sqrt{xy}}{2}$ 。

習　題　三

1. a 是怎樣的實數時，下列各式在實數的範圍內有意義？

$$\sqrt{a-2} \text{ 、} \sqrt{2-a} \text{ 、} \sqrt{a+2} \text{ 、} \sqrt{(a-2)^2}$$

2. 把下列各式寫成平方差的形式，再分解因式：

   (1) x^2-9 ；　　(2) a^2-3 ；

   (3) $4a^2-7$ ；　　(4) $16b^2-11$ 。

3. 計算：

   (1) $(\sqrt{11})^2$ ；　　(2) $\sqrt{(-13)^2}$ ；　　(3) $-\sqrt{(5\times 6)^2}$ ；

   (4) $\sqrt{a^6}$ ；　　(5) $\left(-7\sqrt{\dfrac{2}{7}}\right)^2$ ；　　(6) $\sqrt{(x+5)^2}$ ；

(7) $\sqrt{x^2-2x+1}$ ($x\geq 1$)；　(8) $(\sqrt{x-y})^2$ ($x\geq y$)；

(9) $\sqrt{x^2-4x+4}$ ($x<2$)；

(10) $x+y+\sqrt{x^2-2xy+y^2}$ ($x<y$)。

4. 計算：

(1) $\sqrt{9\times 25}$ ；　(2) $\sqrt{36\times 256}$ ；

(3) $\sqrt{25\times 81\times 289}$ ；　(4) $\sqrt{13^2-12^2}$ ；

(5) $\sqrt{65^2-16^2}$ ；　(6) $\sqrt{9a^2}$ ；

(7) $\sqrt{(x+y)^2c^2}$ ；　(8) $\sqrt{(a+b)^2(a-b)^2}$ ($a<b$)。

5. 化簡：

(1) $\sqrt{5^6\times 3}$ ；　(2) $\sqrt{242\times 49}$ ；　(3) $\sqrt{(-32)(-15)}$ ；

(4) $\sqrt{4x^3}$ ；　(5) $\sqrt{7a^4}$ ；　(6) $\sqrt{5a(x+a)^3}$ ；

(7) $\sqrt{8(a+b)^4(c-d)^4}$ ；　(8) $\sqrt{a^{2n}}$ (n 是正整數)。

6. 把下列各式中根號外面的因式適當改變到後移到根號裡面：

(1) $2\sqrt{6}$ ；　(2) $-5\sqrt{7}$ ；　(3) $4\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ ；

(4) $-2a\sqrt{b}$ ；　(5) $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ ；　(6) $ab\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$ 。

7. 計算：

(1) $\sqrt{\dfrac{9}{49}}$ ；　(2) $\sqrt{2\dfrac{34}{81}}$ ；　(3) $\sqrt{\dfrac{0.16}{0.0225}}$ ；

(4) $\sqrt{\dfrac{0.01\times 64}{0.36\times 4}}$ ；　(5) $\sqrt{\dfrac{27}{100}}$ ；　(6) $\sqrt{\dfrac{25y^4}{121x^6}}$ ；

(7) $\sqrt{\dfrac{18a^2}{4b^2}}$ ；　(8) $\sqrt{\left(1\dfrac{1}{25}\right)^2-\left(\dfrac{2}{5}\right)^2}$　(9) $\sqrt{130^2-66^2}$ 。

8. 化去下列各式中根號內的分母：

(1) $\sqrt{\dfrac{1}{6}}$；　(2) $\sqrt{2\dfrac{3}{11}}$；　(3) $\sqrt{\dfrac{127}{32}}$；

(4) $8\sqrt{\dfrac{3}{128}}$；　(5) $\sqrt{\dfrac{n^3}{9m}}$；　(6) $a\sqrt{\dfrac{b}{a^5}}$；

(7) $\sqrt{\dfrac{7(a-b)}{27(a+b)}}$ ($a>b$)；　(8) $a\sqrt{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}}$ ($a<b$)；

(9) $\sqrt{\dfrac{a+b}{(a-b)^2}}$ ($a<b$)。

9. 把下列根式化成最簡二次根式：

(1) $\sqrt{72}$；　(2) $6\sqrt{\dfrac{1}{8}}$；

(3) $10\sqrt{1\dfrac{4}{5}}$；　(4) $\sqrt{(-8)^2-4\times(-4)}$；

(5) $\sqrt{\left(3\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}$；　(6) $\sqrt{\dfrac{x}{y}}$；

(7) $\sqrt{25m^3+50m^2}$；　(8) $\dfrac{2a^2}{3b}\sqrt{\dfrac{b^3}{a^4}-\dfrac{b^2}{a^4}}$ ($b>1$)；

(9) $\dfrac{a}{a-2b}\sqrt{\dfrac{a^2b-4ab^2+4b^3}{a}}$ ($a<2b$)。

10. 求當 $a=1$、$b=10$、$c=-15$ 時，代數式 $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 的值(用最簡二次根式表示)。

11. 求當 $a=2$、$b=-8$、$c=5$ 時，代數式 $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 的值(用最簡二次根式表示)。

12. 下列二次根式中，哪些是同類二次根式？

$\sqrt{8}$ 、$\sqrt{20}$ 、$-\sqrt{\dfrac{5}{16}}$ 、$\sqrt{\dfrac{1}{18}}$ 、$3\sqrt{\dfrac{4}{5}}$ 、$-\sqrt{121a^3}$ 、$a\sqrt{\dfrac{1}{a}}$ 、$2\sqrt{a^3b^3c}$ 、

$3\sqrt{a^3bc^3}$ 、$4\sqrt{\dfrac{c}{ab}}$ 、$\sqrt{\dfrac{1}{mn-np}}$ $(m>p)$、$\sqrt{\dfrac{n^3}{m-p}}$ $(m>p)$。

13. 合併下列各式中的同類二次根式：

(1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ；

(2) $\sqrt{125}+3\sqrt{\dfrac{2}{27}}-4\sqrt{216}-3\sqrt{\dfrac{1}{5}}$ ；

(3) $5\sqrt{xy}-7\sqrt{x}-3\sqrt{yx}+4\sqrt{x}$ ；

(4) $2a\sqrt{3ab^2}-\left(\dfrac{b}{5}\sqrt{27a^3}-2ab\sqrt{\dfrac{3a}{4}}\right)$ 。

10.4 二次根式的加減

二次根式的加減同整式的加減類似，只要合併同類二次根式就可以了。為了合併同類二次根式，應當先把各個二次根式化成最簡二次根式。也就是說，二次根式相加減，先把各個二次根式化成最簡二次根式，再把同類二次根式分別合併。

【例 1】計算 $2\sqrt{12}-4\sqrt{\dfrac{1}{27}}+3\sqrt{48}$ 。

解

$$2\sqrt{12}-4\sqrt{\frac{1}{27}}+3\sqrt{48}=4\sqrt{3}-\frac{4}{9}\sqrt{3}+12\sqrt{3}$$

$$=\left(4-\frac{4}{9}+12\right)\sqrt{3}$$

$$=\frac{140}{9}\sqrt{3}$$

【例 2】計算 $\frac{2}{3}\sqrt{9x}+6\sqrt{\frac{x}{4}}-2x\sqrt{\frac{1}{x}}$ 。

解 $\frac{2}{3}\sqrt{9x}+6\sqrt{\frac{x}{4}}-2x\sqrt{\frac{1}{x}}=2\sqrt{x}+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}=3\sqrt{x}$ 。

【例 3】計算 $\left(\sqrt{32}+\sqrt{0.5}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{75}\right)$

解

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{32}+\sqrt{0.5}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{75}\right)\\
&=\sqrt{32}+\sqrt{\frac{1}{2}}-2\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{75}\\
&=4\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\sqrt{2}+5\sqrt{3}\\
&=\left(4+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\sqrt{2}+\left(5-\frac{2}{3}\right)\sqrt{3}\\
&=\frac{17}{4}\sqrt{2}+\frac{13}{3}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

練 習

1. 計算：

(1) $5\sqrt{2}+\sqrt{8}-7\sqrt{18}$ ；

(2) $\sqrt{28}+9\sqrt{112}$ ；

(3) $3\sqrt{40}-\sqrt{\frac{2}{5}}-2\sqrt{\frac{1}{10}}$ ；

(4) $\sqrt{12}+\sqrt{\frac{1}{27}}-\sqrt{\frac{1}{3}}$ ；

(5) $\frac{1}{3}\sqrt{32}+\frac{\sqrt{8}}{2}-\frac{1}{5}\sqrt{50}$ ；

(6) $\sqrt{2x}-\sqrt{8x^3}+2\sqrt{2xy^2}$ ；

(7) $x\sqrt{\frac{1}{x}}+\sqrt{4y}-\frac{\sqrt{x}}{2}+y\sqrt{\frac{1}{y}}$ ；

(8) $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $(b^2>4ac)$。

練　習

2. 計算：

   (1) $\sqrt{18}-(\sqrt{98}-2\sqrt{75}+\sqrt{27})$；

   (2) $(\sqrt{45}+\sqrt{108})+\left(\sqrt{1\frac{1}{3}}-\sqrt{125}\right)$；

   (3) $\left(\sqrt{24}-\sqrt{0.5}-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{6}\right)$；

   (4) $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\frac{3}{4}(\sqrt{2}-\sqrt{27})$；

   (5) $a^2\sqrt{8a}+3a\sqrt{50a^3}-\frac{a}{2}\sqrt{18a^3}$；

   (6) $\left(4b\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{2}{a}\sqrt{a^3b}\right)-\left(3a\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{9ab}\right)$。

3. 求下列各式的近似值 (精確到 0.01)：

   (1) $\sqrt{2\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{1}{5}\sqrt{54}$；

   (2) $\left(5\sqrt{\frac{1}{5}}+\frac{1}{2}\sqrt{20}\right)-\left(\frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}-\sqrt{45}\right)$。

4. 下面的計算是否正確？為什麼？

   (1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$；

   (2) $2+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$；

   (3) $a\sqrt{x}-b\sqrt{x}=(a-b)\sqrt{x}$；

   (4) $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{18}}{2}=\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5$。

10.5　二次根式的乘法

把公式$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\bullet\sqrt{b}$反過來，就得

$$\boldsymbol{\sqrt{a}\bullet\sqrt{b}=\sqrt{ab}}\text{ 。}$$

運用這個公式，可以進行二次根式的乘法運算。就是說，二次根式相乘，仍得二次根式，把被開方數的積作為積的被開方數。

【例 1】計算：　(1)　$\sqrt{14}\bullet\sqrt{7}$ ；　　(2)　$3\sqrt{5a}\bullet 2\sqrt{10b}$ 。

解　(1)　$\sqrt{14}\bullet\sqrt{7}=\sqrt{14\times 7}=\sqrt{7^2\times 2}=7\sqrt{2}$ ；

(2)　$3\sqrt{5a}\bullet 2\sqrt{10b}=3\times 2\sqrt{5a\bullet 10b}=30\sqrt{2ab}$ 。

注意：二次根式運算的結果，如果含有二次根式，一般要化成最簡二次根式。

【例 2】計算：　(1)　$\left(\sqrt{\dfrac{8}{27}}-5\sqrt{3}\right)\bullet\sqrt{6}$ ；

(2)　$(5+\sqrt{6})(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})$ 。

解　(1)

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\frac{8}{27}}-5\sqrt{3}\right)\bullet\sqrt{6}&=\sqrt{\frac{8}{27}}\bullet\sqrt{6}-5\sqrt{3}\bullet\sqrt{6}\\&=\sqrt{\frac{8}{27}\times 6}-5\sqrt{3\times 6}\\&=\frac{4}{3}-15\sqrt{2}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(5+\sqrt{6})(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})&=25\sqrt{2}-10\sqrt{3}+5\sqrt{12}-2\sqrt{18}\\&=25\sqrt{2}-10\sqrt{3}+10\sqrt{3}-6\sqrt{2}\\&=19\sqrt{2}\end{aligned}$$

二次根式的和相乘，與多項式的乘法相類似。遇到適用多項式乘法公式的時候，也可以運用乘法公式。

【例 3】計算：　(1)　$(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})$；

(2)　$(4+3\sqrt{5})^2$；

(3)　$(\sqrt{6}-3\sqrt{3})^2$。

解　(1)　$(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})=(2\sqrt{3})^2-(3\sqrt{2})^2$

$=12-18$

$=-6$

(2)　$(4+3\sqrt{5})^2=4^2+2\bullet 4\bullet 3\sqrt{5}+(3\sqrt{5})^2$

$=16+24\sqrt{5}+45$

$=61+24\sqrt{5}$

(3)　$(\sqrt{6}-3\sqrt{3})^2=(\sqrt{6})^2-2\bullet\sqrt{6}\bullet 3\sqrt{3}+(3\sqrt{3})^2$

$=6-18\sqrt{2}+27$

$=33-18\sqrt{2}$

【例 4】計算：　(1)　$(\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{6})$；

(2)　$(2\sqrt{ax}-5\sqrt{by})(2\sqrt{ax}+5\sqrt{by})$。

解　(1)　$(\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{6})=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{6})^2=3-6=-3$；

(2)　$(2\sqrt{ax}-5\sqrt{by})(2\sqrt{ax}+5\sqrt{by})=(2\sqrt{ax})^2-(5\sqrt{by})^2$

$=4ax-25by$

練　習

1. 計算：

(1)　$\sqrt{5}\bullet\sqrt{3}$；　　(2)　$6\sqrt{27}\bullet(-2\sqrt{3})$；

(3)　$9\sqrt{45}\times\frac{3}{2}\sqrt{2\frac{2}{3}}$；　　(4)　$\sqrt{6x}\bullet\sqrt{2x}$；

(5)　$\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}\bullet\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}$；　　(6)　$10x\sqrt{y}\bullet\sqrt{\frac{1}{x}}$。

練　習

2. 計算：

(1) $(\sqrt{12}-3\sqrt{75})\bullet\sqrt{3}$；　(2) $2\sqrt{5}(\sqrt{10}+4\sqrt{12})$；

(3) $(\sqrt{2}+2\sqrt{12}-\sqrt{6})\bullet 2\sqrt{3}$；(4) $3\sqrt{6}(3\sqrt{2}-\sqrt{15})$。

3. 計算：

(1) $(2\sqrt{3}-2)(3\sqrt{2}-3)$；

(2) $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}-2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$；

(3) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{c})$；　(4) $(2\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$。

4. 計算：

(1) $(4-3\sqrt{5})(4+3\sqrt{5})$；　(2) $(7\sqrt{2}+2\sqrt{6})(2\sqrt{6}-7\sqrt{2})$；

(3) $(\sqrt{4x+3}-\sqrt{2x})(\sqrt{4x+3}+\sqrt{2x})$；

(4) $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})^2$；　(5) $\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)^2$；

(6) $(4\sqrt{7}-7\sqrt{3})^2$；　(7) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$；

(8) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$；

(9) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6})^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$；

(10) $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})$。

10.6　二次根式的除法

把公式 $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 反過來，就得

$$\frac{\sqrt{\boldsymbol{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{b}}}=\sqrt{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}}\ 。$$

運用這個公式，可以進行一些簡單的二次根式之除法運算。就是說，二次根式相除，仍得二次根式，把被開方數相除所得的商作為商的被開方數。

【例 1】計算：　(1)　$\sqrt{72}\div\sqrt{6}$ ；　　(2)　$\sqrt{1\frac{1}{2}}\div\sqrt{\frac{1}{6}}$ 。

$\boxed{解}$　(1)　$\sqrt{72}\div\sqrt{6}=\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\dfrac{72}{6}}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ ；

(2)　$\sqrt{1\dfrac{1}{2}}\div\sqrt{\dfrac{1}{6}}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{3}{2}}}{\sqrt{\dfrac{1}{6}}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}\times 6}=\sqrt{9}=3$ 。

二次根式的除法運算，還可以利用化去分母中的根號之方法來進行。例如，計算 $\sqrt{3}\div\sqrt{2}$ 。先將 $\sqrt{3}\div\sqrt{2}$ 寫成 $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ，然後把分子與分母都乘以 $\sqrt{2}$ ，化去分母中的根號，就得

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{6}\ 。$$

同樣，在計算 $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ 的時候，也是先把分母中的根號化去。

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}&=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\\&=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}\\&=\sqrt{3}+\sqrt{2}\end{aligned}$$

把分母中的根號化去，叫做**分母有理化**。把分母有理化時，一般是把分子與分母都乘以同一個適當的代數式，使分母不含根號。

兩個含有二次根式的代數式相乘，如果它們的積不含有二次根式，我們說這兩個代數式互為**有理化因式**。在上面例子中，$\sqrt{2}$ 與 $\sqrt{2}$ 、$\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 與 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 互為有理化因式。

【例 2】 把下列各式的分母有理化：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ ；　　(2) $\dfrac{4}{3\sqrt{7}}$ ；

(3) $\dfrac{a}{\sqrt{a+b}}$ ；　　(4) $\dfrac{\sqrt{5}a}{\sqrt{20a}}$ 。

$\boxed{解}$ (1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\bullet\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ；

(2) $\dfrac{4}{3\sqrt{7}}=\dfrac{4\bullet\sqrt{7}}{3\sqrt{7}\bullet\sqrt{7}}=\dfrac{4}{21}\sqrt{7}$ ；

(3) $\dfrac{a}{\sqrt{a+b}}=\dfrac{a\bullet\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}\bullet\sqrt{a+b}}=\dfrac{a}{a+b}\sqrt{a+b}$ ；

(4) $\dfrac{\sqrt{5}a}{\sqrt{20a}}=\dfrac{\sqrt{5}(\sqrt{a})^2}{2\sqrt{5}\bullet\sqrt{a}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{a}$ 。

從上例第(1)~(3)小題可以看出，$\sqrt{a}$ 的有理化因式是 $\sqrt{a}$ 。在分母有理化時，有時也可直接利用約分，例如第(4)小題。

【例 3】 把下列各式的分母有理化：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ ；　　(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}}$ ；

(3) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ($x\neq y$)；　　(4) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ 。

$\boxed{解}$ (1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1$；

(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{9-3}=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}$；

(3) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\dfrac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y}$；

(4) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$=\sqrt{x}-\sqrt{y}$

從上例第(1)~(3)小題可以看出，$a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$ 與 $a\sqrt{x}-b\sqrt{y}$ 互為有理化因式。在分母有理化時，有時也可先分解因式，再約分，例如第(4)小題。

【例 4】計算： (1) $(6\sqrt{7}-4\sqrt{2})\div\sqrt{3}$；

(2) $(\sqrt{12}-5\sqrt{8})\div(\sqrt{6}+\sqrt{2})$。

$\boxed{解}$ (1) $(6\sqrt{7}-4\sqrt{2})\div\sqrt{3}=\dfrac{(6\sqrt{7}-4\sqrt{2})\bullet\sqrt{3}}{\sqrt{3}\bullet\sqrt{3}}$

$=2\sqrt{21}-\dfrac{4}{3}\sqrt{6}$

(2) $(\sqrt{12}-5\sqrt{8})\div(\sqrt{6}+\sqrt{2})=\dfrac{\sqrt{12}-5\sqrt{8}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

$=\dfrac{(2\sqrt{3}-10\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$

$=\dfrac{6\sqrt{2}-2\sqrt{6}-20\sqrt{3}+20}{4}$

$=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{6}-5\sqrt{3}+5$

一般地，對於二次根式的除法，可以先寫成分式的形式，然後通過分母有理化進行運算。

練　習

1. 計算：

(1) $-\sqrt{54}\div\sqrt{3}$ ；　(2) $\sqrt{1\frac{3}{5}}\div\sqrt{3\frac{1}{5}}$ ；

(3) $6\sqrt{3}\div 3\sqrt{6}$ ；　(4) $\frac{1}{2}\sqrt{6}\bullet 4\sqrt{\frac{1}{12}}\div\frac{2}{3}\sqrt{1\frac{1}{2}}$ ；

(5) $4\sqrt{6a^{3}}\div 2\sqrt{\frac{a}{3}}$ ；　(6) $a^{2}x\div\sqrt{ax^{3}}$ 。

2. 把下列各式的分母有理化：

(1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ；　(2) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{40}}$ ；　(3) $\frac{x^{2}}{\sqrt{4xy}}$ ；

(4) $\frac{2n}{3\sqrt{n}}$ ；　(5) $\frac{a^{2}-b^{2}}{\sqrt{a+b}}$ 。

3. 計算：

(1) $\sqrt{3}\div(5-\sqrt{7})-(2\sqrt{3}-5\sqrt{7})^{2}$ ；

(2) $(2\sqrt{3}-2)(3\sqrt{6}+\sqrt{2})+(3\sqrt{3}+5\sqrt{2})\div(3\sqrt{3}-5\sqrt{2})$ 。

習　題　四

1. 計算：

(1) $3\sqrt{8}+2\sqrt{32}-\sqrt{50}$ ；　(2) $9\sqrt{3}-7\sqrt{12}+5\sqrt{48}$ ；

(3) $6-\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{2}{3}}$ ；　(4) $2\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{1}{6}}-\frac{1}{5}\sqrt{54}$ ；

(5) $\sqrt{\frac{1}{5}}+2\sqrt{20}-4\sqrt{\frac{1}{5}}-\frac{1}{5}\sqrt{5}$ ；

(6) $\sqrt{12}+3\sqrt{1\frac{1}{3}}-\sqrt{5\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}\sqrt{48}$ ；

(7) $2a\sqrt{27a}+6a\sqrt{\frac{3a}{4}}$ ；

(8) $\frac{1}{a}\sqrt{x^3}-\sqrt{\frac{1}{x}}$ ；

(9) $2a\sqrt{3ab^2}-\frac{b}{6}\sqrt{27a^3}+2ab\sqrt{\frac{3}{4}a}$ ；

(10) $5\sqrt{x^3y}-2y\sqrt{xy}-6\sqrt{xy}+\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}$ 。

2. 計算：

(1) $(\sqrt{18}-\sqrt{98})+(2\sqrt{75}-\sqrt{27})$ ；

(2) $(\sqrt{45}+\sqrt{18})-(\sqrt{8}-\sqrt{125})$ ；

(3) $\left(\sqrt{12}-\sqrt{\frac{1}{2}}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-2\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{18}\right)$ ；

(4) $\left(5\sqrt{\frac{1}{5}}-\frac{1}{2}\sqrt{20}\right)+\left(\frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}-\sqrt{45}\right)$ ；

(5) $7\sqrt{a}-\left(a\sqrt{\frac{1}{a}}-4\sqrt{ab^2}\right)$ ；

(6) $\left(\frac{2}{3}x\sqrt{9x}+6x\sqrt{\frac{y}{x}}\right)+\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-x^2\sqrt{\frac{1}{x}}\right)$ 。

3. (1) 當 $x=7$ 時，求下列代數式的值：

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}-\sqrt{4x-1}$$

(2) 當 $x=4$ 、 $y=16$ 時，求下列代數式的值：

$$\sqrt{x^3+x^2y+\frac{1}{4}xy^2}+\sqrt{\frac{1}{4}x^2y+xy^2+y^3}$$

4. 計算：

(1) $\sqrt{15}\bullet\sqrt{1\dfrac{2}{3}}$ ；

(2) $6\sqrt{1\dfrac{3}{5}}\bullet\left(-5\sqrt{2\dfrac{2}{5}}\right)$ ；

(3) $\dfrac{1}{2}\sqrt{12x}\bullet 2\sqrt{3x}$ ；

(4) $10a^{2}\sqrt{ab}\bullet 5\sqrt{\dfrac{1}{a}}$ ；

(5) $\dfrac{1}{3}\sqrt{30}\bullet 40\sqrt{\dfrac{1}{2}}\bullet\dfrac{3}{2}\sqrt{2\dfrac{2}{3}}$ ；

(6) $3\sqrt{\dfrac{a}{x}}\bullet\left(-2\sqrt{\dfrac{x}{a}}\right)\bullet\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 。

5. 計算：

(1) $(\sqrt{12}+5\sqrt{8})\bullet\sqrt{3}$ ；

(2) $3\sqrt{2}\bullet\left(2\sqrt{12}-4\sqrt{\dfrac{1}{8}}+3\sqrt{48}\right)$ ；

(3) $\left(\sqrt{xy}-2\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)\bullet\sqrt{xy}$ ；

(4) $(\sqrt{a^{3}b}+\sqrt{ab^{3}}-ab)\bullet\sqrt{ab}$ ；

(5) $\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}-2\sqrt{3}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-4\sqrt{3}+3\sqrt{5})$ 。

6. 計算：

(1) $(2\sqrt{3}-2)(3\sqrt{6}+\sqrt{2})$ ；

(2) $(\sqrt{27}+\sqrt{28})(\sqrt{12}-\sqrt{63})$ ；

(3) $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{6}-5\sqrt{3})$ ；

(4) $(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-2\sqrt{3}+\sqrt{2})$ ；

(5) $(\sqrt{x}+\sqrt{3})(2\sqrt{x}+3\sqrt{2})$ ；

(6) $(x+y+2\sqrt{xy})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$ 。

7. 計算：

(1) $(5\sqrt{3}+4\sqrt{2})(5\sqrt{3}-4\sqrt{2})$ ；

(2) $(7\sqrt{5}+6\sqrt{7})(6\sqrt{7}-7\sqrt{5})$ ；

(3) $(3\sqrt{2}+\sqrt{48})(\sqrt{18}-4\sqrt{3})$ ；

(4) $\left(\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$ $(b^2-4ac>0)$；

(5) $(7\sqrt{3}+2\sqrt{7})^2$ ；　(6) $(4-5\sqrt{3})^2$ ；

(7) $\left(3\sqrt{a}+2\sqrt{\dfrac{x}{a}}\right)^2$ ；　(8) $\left(3\sqrt{1\dfrac{2}{3}}-\sqrt{1\dfrac{4}{5}}\right)^2$ ；

(9) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6})$ ；

(10) $(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})^2+(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})^2$ $(x>y)$。

8. 把下列各式的分母有理化：

(1) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ ；　(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{40}}$ ；　(3) $\dfrac{7n}{3\sqrt{n}}$ ；

(4) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$ $(x>1)$；　(5) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$ ；

(6) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ；　(7) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{\sqrt{3}-\sqrt{15}}$ ；

(8) $\dfrac{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{5}+2\sqrt{3}}$ ；　(9) $\dfrac{2\sqrt{x+2}+3\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}$ $(x>2)$。

9. 計算：

(1) $\sqrt{\dfrac{1}{45}}\div\dfrac{3}{2}\sqrt{2\dfrac{2}{3}}$ ；　(2) $\sqrt{20a}\div\dfrac{2}{3}\sqrt{b}$ ；

(3) $\sqrt{15}\bullet\sqrt{1\dfrac{2}{3}}\div\sqrt{24}$ ；　(4) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}\bullet\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}\div\sqrt{\dfrac{1}{b}}\right)$ $(x>1)$；

(5) $\left(\sqrt{48}+\dfrac{1}{2}\sqrt{1\dfrac{1}{2}}\right)\div\sqrt{27}$　(6) $\left(\dfrac{3}{4}\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)\div(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ ；

(7) $(7\sqrt{2}+2\sqrt{6})\div(2\sqrt{6}-7\sqrt{2})$；

(8) $\sqrt{15}\div\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$；

10. 求下列各式的值 (精確到 0.01)：

(1) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$； (2) $\dfrac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}}$；

(3) $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}-\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}$； (4) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$；

(5) $\left(\dfrac{2}{x+1}\right)^2$，其中 $x=\sqrt{3}$；

(6) $\dfrac{a-4b}{\sqrt{a}-2\sqrt{b}}$，其中 $a=6$、$b=5$。

11. (1) 已知 $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$，求 x^2-x+1 的值；

(2) 已知 $x=2+\sqrt{3}$，求 $\dfrac{3x^2-2x+5}{2x-7}$ 的值。

12. 化簡：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$；

(2) $\dfrac{5}{4-\sqrt{11}}+\dfrac{1}{3+\sqrt{7}}-\dfrac{6}{\sqrt{7}-2}-\dfrac{\sqrt{7}-5}{2}$；

(3) $\dfrac{1}{y}\sqrt{x-y}+\dfrac{x}{\sqrt{x-y}}-\dfrac{1}{x-y}\sqrt{(x-y)^3}$ $(x>y)$；

(4) $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$。

小　结

一、本章主要內容是二次根式的性質與運算。

二、根據算術平方根的意義，二次根式有下列性質：

$$(\sqrt{a})^2 = a \qquad (a \geq 0)$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \bullet \sqrt{b} \qquad (a \geq 0、b \geq 0)$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad (a \geq 0、b > 0)$$

三、二次根式的性質是二次根式運算與化簡的根據。

最簡二次根式就是滿足下列條件的二次根式：

(1) 被開方數的每一個因式的指數都小於根指數 2；

(2) 被開方數不含分母。

同類二次根式就是幾個化成最簡二次根式以後，被開方數相同的二次根式。

二次根式的加減法就是去括號與合併同類二次根式。

二次根式的乘法就是運用公式 $\sqrt{a} \bullet \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ($a \geq 0$ 、 $b \geq 0$) 並參照多項式乘法法則進行運算。

二次根式的除法有時可以運用公式 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ ($a \geq 0$ 、 $b > 0$) 進行運算；一般是先寫成分式的形式，然後通過分母有理化或約分進行運算。

運算結果中的二次根式，一般都要化成最簡二次根式。

複習參考題十

1. x 是什麼值的時候，下列各式在實數範圍內才有意義？

(1) $\sqrt{x-3}$；　(2) $\sqrt{3-x}$；　(3) $\sqrt{1+x^2}$；

(4) $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}}$；　(5) $\sqrt{x}+\sqrt{-x}$；　(6) $\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$。

2. 在實數範圍內把下列各多項式分解因式：

(1) x^2-7；　(2) $4a^4-1$；　(3) a^4-6a^2+9；

(4) $m^4-10m^2n^2+25n^4$。

3. 下面的推導錯在哪裡？

(1) $\because$ $(-3)^2=3^2$

$\therefore$ $\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{3^2}$

$\because$ $\sqrt{(-3)^2}=-3$、$\sqrt{3^2}=3$

$\therefore$ $-3=3$

(2) $\because$ $-2\sqrt{3}=\sqrt{(-2)^2\times 3}=\sqrt{12}$

而 $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\therefore$ $-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$\therefore$ $-2=2$

4. 什麼叫做最簡二次根式？把下列各式化成最簡二次根式：

(1) $\sqrt{500}$；　(2) $\sqrt{4\dfrac{2}{3}}$；　(3) $\sqrt{12x}$；

(4) $\sqrt{3a^2b^2}$ $(b<0)$　(5) $\sqrt{\dfrac{2}{3ab^2}}$；　(6) $x^2\sqrt{\dfrac{y}{8x}}$。

(7) $\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{a}}$ $(x>y)$；　(8) $(x-y)\sqrt{\dfrac{b^2}{x^2-y^2}}$ $(x>y)$

(9) $\sqrt{(a^2-b^2)(a^4-b^4)}$ $(a>b)$；(10) $\sqrt{a^{2n+1}b^3}$。

5. 什麼叫做同類二次根式？下列二次根式裡，哪幾個是同類二次根式？

$$\sqrt{44}、\sqrt{\frac{1}{x}}、-\sqrt{1\frac{5}{11}}、\sqrt{x^3y^2}、\sqrt{175}、2\sqrt{a^2x}、\frac{1}{2}\sqrt{63}、$$

$$-\sqrt{99}、5\sqrt{3\frac{4}{7}}、\sqrt{\frac{m}{1-2x+x^2}}\ (x>1)、\sqrt{225m^3}。$$

6. 計算：

(1) $\left(\sqrt{24}-\sqrt{\frac{1}{2}}+2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}+\sqrt{6}\right)$；

(2) $7\sqrt{a}+5\sqrt{a^2x}-4\sqrt{\frac{b^2}{a}}-6\sqrt{\frac{b^2x}{9}}$；

(3) $2\sqrt{12}\bullet\frac{1}{4}\sqrt{3}\div5\sqrt{2}$；

(4) $9\sqrt{45}\div3\sqrt{\frac{1}{5}}\times\frac{3}{2}\sqrt{2\frac{2}{3}}$；

(5) $\left(6\sqrt{\frac{3}{2}}-5\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{4}\sqrt{8}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$；

(6) $(\sqrt{2x}-3\sqrt{8x^3})\div8\sqrt{\frac{x}{4}}$；

(7) $(10\sqrt{48}-6\sqrt{27}+4\sqrt{12})\div\sqrt{6}$；

(8) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{6})(2\sqrt{3}-3\sqrt{6})$；

(9) $(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})\ \ (x>1)$；

(10) $(8\sqrt{5}+6\sqrt{3})^2$；

(11) $\left(\frac{3}{2}\sqrt{1\frac{2}{3}}-\sqrt{1\frac{1}{4}}\right)^2$；

(12) $(\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{6})(\sqrt{2}-2\sqrt{3}+3\sqrt{6})$；

(13) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+1}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$；

(14) $\dfrac{4\sqrt{5}+3\sqrt{6}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ ；

(15) $(5\sqrt{3}+2\sqrt{5})\div(2\sqrt{3}-\sqrt{5})$ ；

(16) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{30})$ ；

(17) $\dfrac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}}+\dfrac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}$ $(n>2)$。

7. 當 $x=2-\sqrt{3}$ 時，求代數式 $(7+4\sqrt{3})x^2+(2+\sqrt{3})x+\sqrt{3}$ 的值。

8. 已知 $x=\dfrac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5})$ 、 $y=\dfrac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})$ ，求下列各式的值：

(1) x^2-xy+y^2 ；　　(2) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ 。

9. 已知 $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 、 $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ，其中 a、b、c 都是實數，並且 $b^2-4ac\geq 0$ ，試計算下列各式的值：

(1) x_1+x_2 ；　　(2) $x_1\bullet x_2$ ；

(3) $ax_1^2+bx_1+c$ ；　　(4) $ax_2^2+bx_2+c$ 。

10. 解下列方程：

(1) $\sqrt{6}(x+1)=\sqrt{7}(x-1)$ ；　　(2) $\dfrac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}+1=\dfrac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}$ 。

11. 解下列方程組：

(1) $\begin{cases}\sqrt{3}x-\sqrt{2}y=1\\ \sqrt{2}x-\sqrt{3}y=0\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\sqrt{2}x+\sqrt{3}y=\sqrt{7}\\ \sqrt{6}x-\sqrt{7}y=\sqrt{5}\end{cases}$