第十一章　一元二次方程

一、一元二次方程

11.1　一元二次方程

我們已經學過一元一次方程的解法及其應用，現在來看下面的問題：

要剪一塊面積是 150 cm^2 的長方形鐵片，使它的長比寬多出 5 cm，應該怎樣剪法？

要解決這個問題，就要求出鐵片的長與寬，我們可以設寬是 x cm，那麼長是 $x+5$ cm。根據題意，得

$$x(x+5)=150\ ，$$

去括號，得

$$x^2+5x=150\ 。$$

上面這個方程的兩邊都是關於未知數的整式，這樣的方程是一個**整式方程**。在這個整式方程中，只含有一個未知數，並且未知數的最高次數是 2，這樣的整式方程叫做一元二次方程。

上面的方程，經過移項可以化成下面的形式：

$$x^2+5x-150=0\ 。$$

任何一個關於 x 的一元二次方程，經過整理，都可以化成

$$ax^2+bx+c=0\quad(a\neq 0)$$

的形式。這種形式叫做一元二次方程的一般形式。其中 ax^2 叫做二次項，a 叫做二次項係數；bx 叫做一次項，b 叫做一次項係數；c 叫做常數項。一次項係數 b 與常數項 c 可以是任何實數，二次項係數 a 是不等於零的實數。因為如果 a 等於零，那麼這樣的方程就不是二次方程了。

【例】　把方程 $4x(x+3)=5(x-1)+8$ 化成一般形式，並寫出它的二次項係數、一次項係數及常數項。

解　去括號，得

$$4x^2+12x=5x-5+8\text{ ，}$$

移項，合併同類項，得

$$4x^2+7x-3=0\text{ 。}$$

方程的二次項係數是 4，一次項係數是 7，常數項是 -3。

練　習

1. (口答) 說出一元二次方程

$$2x^2+x+4=0$$

的二次項係數、一次項係數及常數項。

2. 寫出下列一元二次方程的二次項係數、一次項係數及常數項：

(1) $4x^2+3x-2=0$；　(2) $3x^2-5=0$。

3. 把下列方程先成一元二次方程的一般形式，再寫出它的二次項係數、一次項係數及常數項：

(1) $3x^2=5x+2$；　(2) $(x+3)(x-4)=-6$；

(3) $3x(x-1)=2(x+2)-4$；　(4) $(2x-1)(3x+2)=x^2+2$；

(5) $(t+1)^2-2(t-1)^2=6t-5$；

(6) $(y+\sqrt{6})(y-\sqrt{6})+(2y+1)^2=4y-5$。

11.2　一元二次方程的解法

1.　直接開平方法

我們來解方程

$$x^2=4\text{ ，}$$

因為 x 就是 4 的平方根，所以

$$x=\pm\sqrt{4}\text{ ，}$$

即

$$x_1 = 2 \text{、} x_2 = -2 \text{。}$$[3]

這種解一元二次方程的方法叫做**直接開平方法**。

【例 1】 解方程 $x^2 - 25 = 0$。

$\boxed{解}$ 移項，得

$$x^2 = 25 \text{，}$$

所以

$$x = \pm\sqrt{25} \text{，}$$

即

$$x_1 = 5 \text{、} x_2 = -5 \text{。}$$

【例 2】 解方程 $(x+3)^2 = 2$。

分析： 原方程中 $x+3$ 是 2 的平方根，因此，也可運用直接開平方法來解。

$\boxed{解}$ $x+3 = \pm\sqrt{2}$，

即

$$x+3 = \sqrt{2} \text{ 或 } x+3 = -\sqrt{2} \text{，}$$

$\therefore \quad x_1 = -3+\sqrt{2}$、$x_2 = -3-\sqrt{2}$。

這就是說，如果一元二次方程的一邊是含有未知數的式子之平方，另一邊是一個非負數，同樣可以直接開平方法來解。

練　習

用直接開平方法解下列方程：

(1) $x^2 = 256$； (2) $4y^2 = 9$； (3) $16x^2 - 49 = 0$；

(4) $t^2 - 45 = 0$； (5) $(2x-3)^2 = 5$； (6) $(x+1)^2 - 12 = 0$。

[3] 通常用 x_1、x_2 表示未知數為 x 的一元二次方程的兩個根。

2. 配方法

我們已經解過方程

$$(x+3)^2 = 2 \text{ ，}$$

因為方程中 $x+3$ 是 2 的平方根，所以運用了直接開平方法來解。如果我們把方程

$$(x+3)^2 = 2$$

的左邊展開並整理，就得

$$x^2 + 6x + 7 = 0 \text{ ，}$$

因此，要解方程

$$x^2 + 6x + 7 = 0 \text{ ，}$$

我們可以先把它化成

$$(x+3)^2 = 2$$

來解，化法如下：把方程

$$x^2 + 6x + 7 = 0$$

的常數項移到右邊，得

$$x^2 + 6x = -7 \text{ 。}$$

為了使左邊成為一個完全平方式，在方程的兩邊各加上一次項係數一半的平方。

$$x^2 + 6x + 3^2 = -7 + 3^2$$

$$(x+3)^2 = 2$$

解這個方程，得

$$x + 3 = \pm\sqrt{2} \text{ ，}$$

所以

$$x = -3 \pm \sqrt{2} \text{ ，}$$

即

$$x_1 = -3 + \sqrt{2} \text{ 、 } x_2 = -3 - \sqrt{2} \text{ 。}$$

這種解一元二次方程的方法叫做**配方法**。這個方法就是先把常數項移到方程的右邊，再把左邊配成一個完全平方式，如果右邊是非負數，就可以進一步通過直接開平方法來求出它的根。

【例 3】 解方程 $x^2-4x-3=0$ 。

$\boxed{解}$ 移項，得

$$x^2-4x=3$$

配方，得

$$x^2-4x+(-2)^2=3+(-2)^2$$

$$(x-2)^2=7$$

解這個方程，得

$$x-2=\pm\sqrt{7}\ ,$$

$\therefore\quad x=2\pm\sqrt{7}$

即

$$x_1=2+\sqrt{7}\ 、\ x_2=2-\sqrt{7}\ 。$$

【例 4】 解方程 $2x^2+5x-1=0$ 。

分析： 這個方程的二次項係數是 2，為了便於配方，可以先把二次項係數化為 1，為此方程的各項都除以 2。

$\boxed{解}$ 把方程的各項都除以 2，得

$$x^2+\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}=0$$

移項，得

$$x^2+\frac{5}{2}x=\frac{1}{2}$$

配方，得

$$x^2+\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{1}{2}+\left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{33}{16}$$

解這個方程，得

$$x+\frac{5}{4}=\pm\frac{\sqrt{33}}{4}\ ,$$

$$\therefore\quad x=-\frac{5}{4}\pm\frac{\sqrt{33}}{4}=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{4}$$

即

$$x_1=\frac{-5+\sqrt{33}}{4}\text{、}x_2=\frac{-5-\sqrt{33}}{4}\text{ 。}$$

練　習

1. 用適當的數填空：
   (1) $x^2+6x+\quad=(x+\quad)^2$；(2) $x^2-4x+\quad=(x-\quad)^2$；
   (3) $x^2+3x+\quad=(x+\quad)^2$；(4) $x^2-\frac{5}{2}x+\quad=(x-\quad)^2$；
   (5) $x^2+px+\quad=(x+\quad)^2$；(6) $x^2+\frac{b}{a}x+\quad=(x+\quad)^2$。
2. 用配方法解下列方程：
   (1) $x^2-6x+4=0$；(2) $2t^2-7t-4=0$；
   (3) $3x^2-1=6x$。

3. 公式法

現在我們用配方法解一般形式的一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0\ \ (a\neq 0)\text{。}$$

因為$a\neq 0$，所以就可以根據方程的同解原理，把一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的兩邊都除以二次項的係數a，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0\text{ 。}$$

把常數項移到方程的右邊，得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}\text{ 。}$$

在方程的兩邊各加上一次項係數一半的平方，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

即

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\text{。}$$

因為 $a\neq 0$，所以 $4a^2>0$，當 $b^2-4ac\geq 0$ 時，得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore\quad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

即

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\text{。}$$

由此得到

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$的求根公式是

$$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad(b^2-4ac\geq 0)}$$

我們看到，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根是由係數 a、b、c 確定的。因此，在解一元二次方程時，只要先把方程化成一般形式，然後把各項的係數 a、b、c 的值代入求根公式，就可以求得方程的根。

這種解一元二次方程的方法叫做**公式法**。

【例 5】 解方程 $2x^2+7x-4=0$。

解　　這裡 $a=2$、$b=7$、$c=-4$。

$$b^2-4ac=7^2-4\times 2\times(-4)=81,$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{81}}{2\times2}=\frac{-7\pm9}{4}$$

$\therefore\quad x_1=\dfrac{-7+9}{4}=\dfrac{1}{2}$ 、 $x_2=\dfrac{-7-9}{4}=-4$ 。

【例 6】 解方程 $x^2+2=2\sqrt{2}x$ 。

$\boxed{解}$ 移項，得

$$x^2-2\sqrt{2}x+2=0$$

這裡 $a=1$ 、 $b=-2\sqrt{2}$ 、 $c=2$ 。

$b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4\times1\times2=0$ ，

$$x=\frac{2\sqrt{2}\pm0}{2}=\sqrt{2}$$

$\therefore\quad x_1=x_2=\sqrt{2}$ 。

注意：這個方程裡有兩個相等的實根。

【例 7】 解方程 $x^2+x-1=0$ (結果精確到 0.001)。

$\boxed{解}$ 這裡 $a=1$ 、 $b=1$ 、 $c=-1$ 。

$b^2-4ac=1^2-4\times1\times(-1)=5$ ，

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 。

利用電子計算器，得 $\sqrt{5}=2.236$ ，所以

$x_1=\dfrac{-1+2.236}{2}=0.618$ 、 $x_2=\dfrac{-1-2.236}{2}=-1.618$ 。

這是所謂的「黃金數」。

【例 8】 解關於 x 的方程 $x^2-a(3x-2a+b)-b^2=0$ 。

$\boxed{解}$ 整理原方程，得

$$x^2-3ax+(2a^2-ab-b^2)=0$$

這裡，可以看出 x^2 的係數是 1、x 的係數是 $-3a$ 、常數

項是 $2a^2-ab-b^2$ 。而

$$(-3a)^2-4\times1\times(2a^2-ab-b^2)=a^2+4ab+4b^2$$
$$=(a+2b)^2$$

$$x=\frac{3a\pm\sqrt{(a+2b)^2}}{2}=\frac{3a\pm(a+2b)}{2}$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{3a+a+2b}{2}=2a+b \text{ 、 } x_2=\frac{3a-a-2b}{2}=a-b \text{ 。}$$

練　習

1. 把下列方程化成 $ax^2+bx+c=0$ 的形式，並寫出其中 a、b、c 的值：
   (1) $x^2+9x=6$ ；　(2) $2x^2+1=7x$ ；
   (3) $5x^2=3x+2$ ；　(4) $8x=3x^2-1$ 。
2. 用公式法解下列方程：
   (1) $2x^2+5x-3=0$ ；　(2) $6x^2-13x-5=0$ ；
   (3) $2y^2-4y-1=0$ ；　(4) $t^2+2t=5$ ；
   (5) $p(p-8)=16$ ；　(6) $\frac{5}{2}y^2+2y=1$ ；
   (7) $0.3x^2+x=0.8$ ；　(8) $x^2+3=2\sqrt{3}x$ 。
3. 用公式法解下列方程，並求根的近似值(精確到 0.01)：
   (1) $x^2+3x-5=0$ ；　(2) $x^2-6x+4=0$ 。
4. 解下列關於 x 的方程：
   (1) $2x^2-mx-m^2=0$ ；
   (2) $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0$ $(ab\neq0)$ 。

4. 因式分解法

我們知道，一元二次方程都可以用公式法來解。對於某些係數較為特殊的方程，例如 $x^2=4$ ，用直接開方法就比較簡便。現

在我們再來學習一種簡便的方法------因式分解法。

例如，對於方程

$$x^2=4$$

除了直接用直接開方法來解以外，也可用下面的方法來解。

移項，得

$$x^2-4=0\text{ 。}$$

這個方程的右邊是 0，左邊可以分解成兩個一次因式的積，就是

$$x^2-4=(x-2)(x+2)\text{ 。}$$

因此，這個方程可變形為

$$(x-2)(x+2)=0\text{ 。}$$

我們知道，如果兩個因式的積等於零，那麼這兩個因式至少要有一個等於零；反過來，如果兩個因式有一個等於零，它們的積也就等於零。例如：要使 $(x-2)(x+2)$ 等於零，必須並且只需 $x-2$ 等於零或 $x+2$ 等於零。因此，解方程

$$(x-2)(x+2)=0$$

就相當於解方程 $x-2=0$ 或 $x+2=0$ 了。進一步解這兩個一次方程，得到 $x=2$ 或 $x=-2$ 。

所以，原方程 $x^2=4$ 的兩個根為

$$x_1=2\text{ 、 }x_2=-2\text{ 。}$$

這種解一元二次方程的方法叫做**因式分解法**。在一元二次方程的一邊是零而另一邊易於分解成兩個一次因式時，就可以用因式分解法來解。

【例 9】 解方程：(1) $x^2-3x-10=0$ ； (2) $(x+3)(x-1)=5$ 。

解 (1) 把方程的左邊分解因式，得

$$(x-5)(x+2)=0$$

$$x-5=0\text{ 或 }x+2=0$$

$$\therefore \quad x_1=5\text{ 、 }x_2=-2\text{ 。}$$

(2) 原方程可變形為

$$x^2+2x-3=5\text{ ，}$$

即

$$x^2+2x-8=0 \text{。}$$

把方程的左邊分解因式，得

$$(x-2)(x+4)=0$$

$$x-2=0 \text{或} x+4=0$$

$\therefore \quad x_1=2$、$x_2=-4$。

【例 10】 解方程： (1) $3x(x+2)=5(x+2)$；

(2) $(3x+1)^2-4=0$。

$\boxed{\text{解}}$ (1) 原方程就是

$$3x(x+2)-5(x+2)=0 \text{。}$$

把方程的左邊分解因式，得

$$(x+2)(3x-5)=0$$

$$x+2=0 \text{或} 3x-5=0$$

$\therefore \quad x_1=-2$、$x_2=\dfrac{5}{3}$。

(2) 把方程的左邊分解因式，得

$$[(3x+1)+2][(3x+1)-2]=0 \text{，}$$

即

$$(3x+3)(3x-1)=0 \text{。}$$

$$x+1=0 \text{或} 3x-1=0$$

$\therefore \quad x_1=-1$、$x_2=\dfrac{1}{3}$。

練 習

1. (口答) 說出下列方程的根是什麼？
   (1) $x(x-2)=0$； (2) $(y+2)(y-3)=0$；
   (3) $(3x+2)(2x-1)=0$； (4) $x^2=x$。
2. 用因式分解法解下列方程：
   (1) $5x^2+4x=0$； (2) $\sqrt{2}y^2=3y$；
   (3) $x^2+7x+12=0$； (4) $x^2-10x+16=0$；

練　習

(5) $x^2+3x-10=0$；　(6) $x^2-6x-40=0$；

(7) $t(t+3)=28$；　(8) $(x+1)(x+3)=15$。

3. 用因式分解法解下列方程：

(1) $(y-1)^2+2y(y-1)=0$；　(2) $6(x+5)=x(x+5)$；

(3) $(2y-1)^2-9=0$；　(4) $(3x+2)^2=4(x-3)^2$。

如果學過十字相乘法分解因式，就可以用來解一些二次項係數不是 1 的一元二次方程。

【例 11】 解方程：　(1) $3x^2-16x+5=0$；

(2) $2x(4x+13)=7$。

$\boxed{解}$ (1)

$$(3x-1)(x-5)=0$$

$3x-1=0$ 或 $x-5=0$

$$\therefore\quad x_1=\frac{1}{3}\text{、}x_2=5\text{。}$$

(2) 整理原方程，得

$$8x^2+26x-7=0$$

$$(4x-1)(2x+7)=0$$

$4x-1=0$ 或 $2x+7=0$

$$\therefore\quad x_1=\frac{1}{4}\text{、}x_2=-\frac{7}{2}\text{。}$$

練　習

解下列方程 (第 1～2 題)：

1. (1) $3x^2-7x+2=0$；　(2) $2x^2-11x-21=0$；

(3) $14x^2+3x-5=0$；　(4) $15x^2-14x-8=0$。

2. (1) $6(2x^2+1)=17x$；　(2) $2x(4x-7)=15$。

3. 解下列關於 x 的方程：

(1) $5m^2x^2-17mx+14=0$；　(2) $10a^2x^2-7abx+b^2=0$。

11.3　一元二次方程的根的判別式

我們已經知道，利用配方法就可以把任何一個一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$變形為

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\text{。}$$

因為 $a\neq 0$，所以 $4a^2>0$，這樣，我們有：

(1)　當 $b^2-4ac>0$ 時，方程右邊是一個正數，因此，方程有兩個不相等的實數根

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\text{、}x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\text{。}$$

(2)　當 $b^2-4ac=0$ 時，方程右邊是 0，因此，方程有兩個相等的實數根

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}\text{。}$$

(3)　當 $b^2-4ac<0$ 時，方程右邊是一個負數，而 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ 不可能為負數，因此，方程沒有實數根。

由此可知，根據 b^2-4ac 的值之符號可以判定一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 之根的情況。故我們把 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 之**根的判別式**，通成用符號「Δ」[4]來表示。

綜上所述，**一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 在 $\Delta>0$ 時有兩個不相等的實數根，在 $\Delta=0$ 時有兩個相等的實數根，在 $\Delta<0$ 時沒有實數根。**

【例 1】不解方程，判斷下列方程之根的情況：

(1)　$2x^2+3x-4=0$；　　(2)　$16y^2+9=24y$；

(3)　$5(x^2+1)-7x=0$。

---

[4] 「Δ」是希臘字母，讀作 delta。

$\boxed{解}$ (1) $\because \quad \Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-4) = 9 + 32 > 0$

$\therefore$ 原方程有兩個不相等的實數根。

(2) 移項，得

$$16y^2 - 24y + 9 = 0$$

$\because \quad \Delta = (-24)^2 - 4 \times 16 \times 9 = 576 - 576 = 0$

$\therefore$ 原方程有兩個相等的實數根。

(3) 原方程就是

$$5x^2 - 7x + 5 = 0$$

$\because \quad \Delta = (-7)^2 - 4 \times 5 \times 5 = 49 - 100 < 0$

$\therefore$ 原方程沒有實數根。

【例 2】 k 取什麼值時，方程

$$2x^2 - (4k+1)x + 2k^2 - 1 = 0$$

(1) 有兩個不相等的實數根？

(2) 有兩個相等的實數根？

(3) 沒有實數根？

$\boxed{解}$ $\Delta = [-4(k+1)]^2 - 4 \times 2(2k^2 - 1) = 8k + 9$

(1) 當 $8k + 9 > 0$，即 $k > -\dfrac{9}{8}$ 時，方程有兩個不相等的實數根；

(2) 當 $8k + 9 = 0$，即 $k = -\dfrac{9}{8}$ 時，方程有兩個相等的實數根；

(3) 當 $8k + 9 < 0$，即 $k < -\dfrac{9}{8}$ 時，方程沒有實數根。

【例 3】 求證方程 $(m^2+1)x^2 - 2mx + (m^2+4) = 0$ 沒有實數根。

證明： $\Delta = (-2m)^2 - 4(m^2+1)(m^2+4)$

$= 4m^2 - 4m^4 - 20m^2 - 16$

$= -4(m^4 + 4m^2 + 4)$

$= -4(m^2 + 2)^2$

不論 m 為任何實數，$(m^2+2)^2$ 一定不等於零且一定是正數，從而可以得知 $-4(m^2+2)^2$ 一定是負數，這就是說

$$\Delta<0，$$

所以方程 $(m^2+1)x^2-2mx+(m^2+4)=0$ 沒有實數根。

練　習

1. 不解方程，判斷下列方程的根之情況：
   (1)　$3x^2+4x-2=0$；　　(2)　$2y^2+5=6y$；
   (3)　$4p(p-1)-3=0$；　　(4)　$x^2+5=2\sqrt{5}x$；
   (5)　$\sqrt{3}x^2-\sqrt{2}x+2=0$；　　(6)　$3t^2-2\sqrt{6}t+2=0$。
2. m 取什麼值時，方程 $x^2-2(m+1)x+(m^2-2)=0$
   (1)　有兩個不相等的實數根？
   (2)　有兩個相等的實數根？
   (3)　沒有實數根？
3. 求證方程 $x^2+(2k+1)x-k^2+k=0$ 有兩個不相等的實數根。

習　題　五

用直接開平方法解下列方程 (第 1～3 題)：

1. (1)　$49x^2-81=0$；　　(2)　$\frac{1}{4}y^2=0.01$。
2. (1)　$0.2x^2-\frac{3}{5}=0$；　　(2)　$(x+3)(x-3)=9$。
3. (1)　$(3x+1)^2=2$；　　(2)　$(2t+3)^2-5=0$。

用配方法解下列方程 (第 4～5 題)：

4. (1)　$x^2+2x-99=0$；　　(2)　$y^2+5y+2=0$。
5. (1)　$3x^2-1=4x$；　　(2)　$2x^2+\sqrt{2}x-30=0$。

6. 用配方法解關於 x 的方程 $x^2+px+q=0$。

7. 用公式法解下列方程：

(1) $x^2+2x-2=0$； (2) $6x^2+4x-7=0$；

(3) $2y^2+8y-1=0$； (4) $x^2-2.4x-13=0$；

(5) $2x^2-3x+\frac{1}{8}=0$； (6) $\frac{3}{2}t^2+4t=1$；

(7) $3y^2+1=2\sqrt{3}y$； (8) $x^2+2(\sqrt{3}+1)+2\sqrt{3}=0$。

8. 用公式法解下列方程，並求根的近似值 (精確到 0.01)：

(1) $x^2-3x-7=0$； (2) $x^2-3\sqrt{2}x+2=0$。

9. 用因式分解法解下列方程：

(1) $8x^2-\frac{1}{2}x=3x^2+\frac{1}{3}x$； (2) $\frac{1}{3}(y+3)^2=\frac{1}{2}(y+3)$；

(3) $x^2+7x+6=0$； (4) $x^2-5x-6=0$；

(5) $y^2-17y+30=0$； (6) $y^2-7y-60=0$；

(7) $9(2x+3)^2-4(2x-5)^2=0$；

(8) $(2y+1)^2+3(2y+1)+2=0$。

10. 選用適當方法解下列方程：

(1) $x^2-3x+2=0$； (2) $x^2-3x-2=0$；

(3) $x^2+12x+27=0$； (4) $(x-1)(x+2)=70$；

(5) $(3-t)^2+t^2=9$； (6) $(y-2)^2=3$；

(7) $(2x+3)^2=3(4x+3)$； (8) $(y+\sqrt{3})^2=4\sqrt{3}y$。

(9) $(2x-1)(x+3)=4$； (10) $(y+1)(y-1)=2\sqrt{2}y$；

(11) $x^2-\sqrt{3}x-\sqrt{2}x+6=0$ (12) $3x(x-1)=2-2x$。

11. 解下列關於 x 的方程：

(1) $mx^2-(m-n)x-n=0$ ($m\neq 0$)；

(2) $x^2-(2m+1)x+m^2+m=0$；

(3) $(x+a)(x-b)+(x-a)(x+b)=2a(ax-b)$；

(4) $abx^2-(a^4+b^4)x+a^3b^3=0$ ($ab\neq 0$)。

12. 已知 $y=x^2-2x-3$ 。x 是什麼數時，y 的值等於零？x 是什麼數時，y 的值等於 -4 ？

13. x 是什麼數時，x^2+6x+5 的值與 $x-1$ 的值相等？

14. 已知 $x^2-7xy+12y^2=0$ ，求證 $x=3y$ 或 $x=4y$ 。

15. 不解方程，判斷下列方程的根之情況：

(1) $2x^2+4x+35=0$ ；　(2) $4m(m-1)+1=0$ ；

(3) $0.2x^2-5=\dfrac{3}{2}x$ ；　(4) $4(y^2+0.9)=2.4y$ ；

(5) $\dfrac{1}{2}x^2-\sqrt{2}=\sqrt{3}x$ ；　(6) $2t=\sqrt{5}\left(t^2+\dfrac{1}{5}\right)$ 。

16. m 取什麼值時，方程 $x^2+(2m+1)x+(m-2)^2=0$

(1) 有兩個不相等的實數根？

(2) 有兩個相等的實數根？

(3) 沒有實數根？

17. k 取什麼值時，方程 $4x^2-(k+2)x+k-1=0$ 有兩個相等的實數根？並求出這時方程的根。

18. 證明方程 $(x-1)(x-2)=k^2$ 有兩個不相等的實數根。

11.4　一元二次方程的應用

【例 1】 兩個連續奇數的積是 323，求這兩個數。

解　設較小的一個奇數為 x，那麼另一個奇數為 $x+2$ 。根據題意，得

$$x(x+2)=323,$$

整理後，得

$$x^2+2x-323=0 \text{。}$$

解這個方程，得

$$x_1=17 \text{、} x_2=-19 \text{。}$$

奇數可以為正數，也可以為負數，所以 $x=17$ 、 $x=-19$ 都適合題意。

由 $x=17$ ，得 $x+2=19$ ；

由 $x=-19$ ，得 $x+2=-17$ 。

答：這兩個奇數是 17 與 19，或者 -19 與 -17 。

試一試，如果設這兩個奇數中較小的一個為 $x-1$，另一個為 $x+1$，這個題應該怎樣解？

【例 2】 如圖，用一塊長 80 cm，寬 60 cm 的白鐵片，在四個角上截去四個相同的小正方形，然後把四邊摺起來，做成底面積為 1500 cm^2 的沒有蓋之長方形盒子。截去的小正方形之邊長應該是多少？

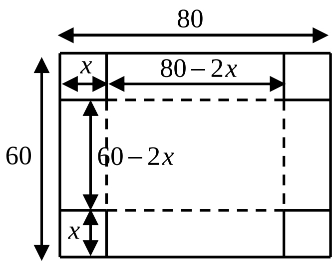


圖 11-1

$\boxed{解}$ 設小正方形的邊長為 x cm，那麼盒子底面的長及寬分別為 $80-2x$ cm 及 $60-2x$ cm。根據題意，得

$$(80-2x)(60-2x)=1500 \text{。}$$

整理後，得

$$x^2-70x+825=0 \text{。}$$

解這個方程，得

$$x_1=15 \text{、} x_2=55 \text{。}$$

由 $x=15$ 時，$80-2x=50$ 、 $60-2x=30$ ；

由 $x=55$ 時，$80-2x=-30$ 、 $60-2x=-50$ 。

但底面的長及寬都不能為負數，所以只能取 $x=15$ 。

答：小正方形的邊長為 15 cm。

【例 3】某鋼鐵廠去年一月份某種鋼的產量為 5000 T，三月份上升到 7200 T，這兩個月平均每月增長的百分率是多少？

分析： 設平均每月增長的百分率為 x，那麼去年二月份的產量是 $(5000+5000x)$ T，也就是 $5000(1+x)$ T；三月份的產量是 $[5000(1+x)+5000(1+x)x]$ T，就是 $5000(1+x)^2$ T。於是可以根據題意列出方程。

$\boxed{解}$ 設平均每月增長的百分率為 x。根據題意，得

$$5000(1+x)^2=7200\text{，}$$

即

$$(1+x)^2=1.44$$

$$\therefore\quad 1+x=\pm 1.2$$

由此可得

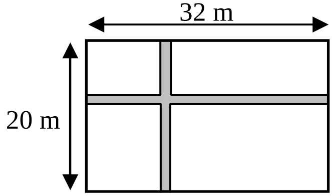
$$x_1=0.2\text{、}x_2=-2.2\text{。}$$

$x=-2.2$ 不合題意，所以只能取 $x=0.2=20\%$。

答：平均每月增長的百分率是 20%。

練 習

1. 兩個連續整數的積是 210，求這兩個數。
2. 已知兩個數的和等於 12，積等於 23，求這兩個數。
3. 解本章第一節開始提出的應用題。
4. 要做一個容積是 750 cm^3，高是 6 cm，底面的長比寬多 5 cm 的長方體匣子，底面的長及寬應該各是多少(精確到 0.1cm)？
5. 如圖，在寬為 20 m、長為 32 m 的矩形地面上，修築同樣寬的兩條互相垂直的道路，餘下的部分做為耕地，要使耕地的面積為 540 m^2，道路的寬應為多少 m？



(第 5 題)

練習

6. 某農場的稻米產量在兩年內從 600 萬 kg 增加到 726 萬 kg。平均每年增產的百分率是多少？

7. 張老闆向地下錢莊借了 50 萬元，剛過兩年，銀行按「利滾利」計算，硬要張老闆還 162 萬元。算一算，這筆債的年利率是多少？

習 題 六

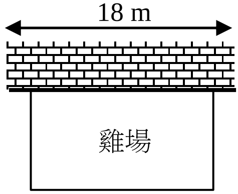
1. 已知兩個數的差等於 4，積等於 16，求這兩個數。

2. 一個兩位數等於它個位上的數碼之平方，個位上的數碼比十位上的數碼大 3，求這個兩位數。(註：有兩個解)

3. 從一塊長 300 cm、寬 200 cm 的鐵片中間截去一個小長方形，使剩下的長方框四周之寬度一樣，並且小長方形的面積是原來鐵片面積之一半，求長方框的寬度(精確到 1 cm)。

4. 某林場計畫修一條長 750 m、斷面為等腰梯形的渠道，斷面面積為 1.6 m^2，上口寬比渠深多 2 m，渠底寬比渠深多 0.4 m。
   (1) 渠道的上口寬與渠底寬各是多少？
   (2) 如果計畫每天挖土 48 m^3，需要多少天把這條渠道的土挖完？

5. 如圖，有一面積為 150 m^2 的長方形雞場，雞場的一邊靠牆(牆長 18 m)，另三邊用竹籬笆圍成，如果竹籬笆的長為 35 m，求雞場的長與寬各為多少 m？



(第 5 題)

6. 製造一種產品，原來每件的成本是 300 元，由於連續兩次降低相同百分比的成本，現在的成本是 195 元。問每次降低成本百分之幾(精確到 1%)？

7. 某工廠計畫用兩年時間把產量提高 80%，如果每年比上一年提高的百分比相同，求這個百分數(精確到 1%)。

8. 某印刷廠一月份印刷了科技書籍 50 萬冊，第一季共印 175 萬冊，問二、三月份平均每月的增長率是多少(精確到 1%)？

二、一元二次方程的根與係數之關係

11.5 一元二次方程的根與係數之關係

在解一元二次方程時，我們發現它的根與係數之間有一定之關係。

例如，在解方程 $x^2-5x+6=0$ 時，得

$$x_1=2 \text{、} x_2=3 \text{。}$$

可以看出，$x_1+x_2=5$ 是一次項係數 -5 的相反數；$x_1 \bullet x_2=6$ 是常數項。

又如，解方程 $2x^2+5x-3=0$ 時，得

$$x_1=\frac{1}{2} \text{、} x_2=-3 \text{。}$$

可以看出，$x_1+x_2=-\dfrac{5}{2}$ 是一次項係數 5 除以二次項係數 2 所得的商之相反數；$x_1 \bullet x_2=-\dfrac{3}{2}$ 是常數項 -3 除以二次項係數 2 所得的商。

一般地，對於一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$，

$$\because \quad x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ 、 } x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore \quad x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$x_1 \bullet x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\bullet\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}$$

$$=\frac{4ac}{4a^2}$$

$$=\frac{c}{a}$$

由此得出，一元二次方程的根與係數有下列關係：

如果 $ax^2+bx+c=0 \ \ (a\neq 0)$ 的兩個根是 x_1 、 x_2 ，

那麼 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ 、 $x_1 \bullet x_2=\dfrac{c}{a}$ 。

如果把方程 $ax^2+bx+c=0 \ \ (a\neq 0)$ 變形為

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \text{ ，}$$

我們就可以把它寫成

$$x^2+px+q=0 \text{ ，}$$

的形式，其中 $p=\dfrac{b}{a}$ 、 $q=\dfrac{c}{a}$ 。從而得出

如果 $x^2+px+q=0$ 的兩個根是 x_1 、 x_2 ，那麼

$x_1+x_2=-p$ 、 $x_1 \bullet x_2=q$ 。

【例 1】 已知方程 $5x^2+kx-6$ 的一個根是 2，求它的另一個根及 k 的值。

$\boxed{解}$　設方程的另一個根是 x_1，那麼

$$x_1 \bullet 2 = -\frac{6}{5}，$$

$\therefore$ $$x_1 = -\frac{3}{5}$$

又

$$\left(-\frac{3}{5}\right) + 2 = -\frac{k}{5}$$

$\therefore$ $$k = -5\left[\left(-\frac{3}{5}\right) + 2\right] = -7$$

答：方程的另一個根是 $-\frac{3}{5}$，$k = -7$。

試一試，能不能把 $x = 2$ 代入原方程，先求出 k 的值，再求出另一個根？

【例 2】利用根與係數的關係，求一元二次方程 $2x^2 + 3x - 1 = 0$ 兩個根的　(1)　平方和；　(2)　倒數和。

$\boxed{解}$　設方程的兩個根是 x_1、x_2，那麼

$$x_1 + x_2 = -\frac{3}{2}、x_1 \bullet x_2 = -\frac{1}{2}。$$

(1)　$\because$　$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$

$\therefore$　$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$$= \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 2\times\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4}$$

(2)　$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = 3。$$

答：方程的兩個根之平方和是 $\frac{13}{4}$，倒數和是 3。

練　習

1. (口答) 下列各方程中，兩根的和與兩根的積各是多少？
   (1)　$x^2-3x+1=0$；　　(2)　$3x^2-2x-2=0$；
   (3)　$2x^2-9x+5=0$；　　(4)　$4x^2-7x+1=0$；
   (5)　$2x^2+3x=0$；　　(6)　$3x^2-1=0$。
2. 已知方程$3x^2-19x+m=0$的一個根是 1，求它的另一個根及 m 的值。
3. 設 x_1 、 x_2 是方程$2x^2+4x-3=0$的兩個根，利用根與係數的關係，求下列各式的值：
   (1)　$(x_1+1)(x_2+1)$；　　(2)　$\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_2}$。

設有兩個數 x_1、x_2。假定以這兩個數為根的一元二次方程(二次項係數為 1)是

$$x^2+px+q=0，$$

那麼，由根與係數的關係，得

$$x_1+x_2=-p \text{、} x_1 \bullet x_2=q，$$

因此，

$$p=-(x_1+x_2) \text{、} q=x_1 \bullet x_2，$$

方程 $x^2+px+q=0$ 就是

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1 \bullet x_2=0，$$

這就是說，**以兩個數 x_1 、 x_2 為根的一元二次方程(二次項係數為 1)是**

$$\boldsymbol{x^2-(x_1+x_2)x+x_1 \bullet x_2=0}。$$

【例 3】 求一個一元二次方程，使它的兩個根是$-3\dfrac{1}{3}$ 、 $2\dfrac{1}{2}$ 。

$\boxed{\text{解}}$　所求的方程是

$$x^2-\left(-3\frac{1}{3}+2\frac{1}{2}\right)x+\left(-3\frac{1}{3}\right)\times 2\frac{1}{2}=0，$$

即

$$x^2+\frac{5}{6}x-\frac{25}{3}=0 \text{ ，}$$

或

$$6x^2+5x-50=0 \text{ 。}$$

【例 4】已知兩個數的和等於 8，積等於 9，求這兩個數。。

$\boxed{解}$ 因為這兩個數的和等於 8，積等於 9，所以這兩個數是方程

$$x^2-8x+9=0$$

的兩個根。

解這個方程，得

$$x_1=4+\sqrt{7} \text{ 、 } x_2=4-\sqrt{7} \text{ 。}$$

因此這兩個數是 $4+\sqrt{7}$ 、 $4-\sqrt{7}$ 。

【例 5】已知方程 $x^2-2x-1=0$ ，利用根與係數的關係求一個一元二次方程，使它的根是原方程之各根的立方。

$\boxed{解}$ 設方程 $x^2-2x-1=0$ 的兩個根是 x_1 、 x_2 ，那麼所求方程的根是 x_1^3 、 x_2^3 。

$\because \quad x_1+x_2=2$ 、 $x_1 \bullet x_2=-1$

$$\therefore \quad x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)$$
$$=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]$$
$$=2[2^2-3\times(-1)]$$
$$=14$$

$$x_1^3 \bullet x_2^3=(x_1 \bullet x_2)^3=(-1)^3=-1$$

因此，所求的方程是

$$y^2-14y-1=0 \text{ 。}$$

練　習

1. (口答) 判定下列各方程後面括號內的兩個數是不是它的根：

   (1) $x^2+5x+4=0$ (1、4)；　(2) $x^2-6x-7=0$ (−1、7)；

   (3) $2x^2-3x+1=0$ ($\frac{1}{2}$、1)　(4) $3x^2+5x-2=0$ ($-\frac{1}{3}$、2)；

   (5) $x^2-8x+11=0$ ($4-\sqrt{5}$、$4+\sqrt{5}$)；

   (6) $x^2-4x+1=0$ ($-2-\sqrt{3}$、$-2+\sqrt{3}$)。

2. 求一個一元二次方程，使它的兩個根分別為

   (1) 4、−7；　　(2) $1+\sqrt{3}$、$1-\sqrt{3}$。

3. 已知兩個數的和等於 −6，積等於 2，求這兩個數。

4. 利用根與係數的關係，求一個一元二次方程，使它的根分別是方程 $x^2+3x-2=0$ 的各根之 2 倍。

11.6　二次三項式的因式分解

形如 ax^2+bx+c 的多項式叫做 x 的二次三項式，這裡 a、b、c 都是已知數，並且 $a\neq 0$。我們已學過 $x^2+(a+b)x+ab$ 型的二次三項式之因式分解，現在再來學習一般的二次三項式之因式分解。

我們知道，在解一元二次方程

$$2x^2-6x+4=0$$

時，可以先把左邊分解因式，得

$$2(x^2-3x+2)=0$$

$$2(x-1)(x-2)=0$$

這樣，就得到方程的兩個根：

$$x_1=1、x_2=2。$$

反過來，我們也可以利用求出一元二次方程的根來把二次三項式分解因式。

如果我們用公式法求得一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0$$

的兩個根是 x_1 與 x_2 ，那麼由根與係數的關係可知

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \text{、} x_1\times x_2=\frac{c}{a} \text{，}$$

就是

$$\frac{b}{a}=-(x_1+x_2) \text{、} \frac{c}{a}=x_1\times x_2$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad ax^2+bx+c&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\&=a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2]\\&=a(x-x_1)(x-x_2)\end{aligned}$$

這就是說，在分解二次三項式 ax^2+bx+c 的因式時，可先用公式求出 $ax^2+bx+c=0$ 的兩個根 x_1 、 x_2 ，然後寫成

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2) \text{。}$$

【例 1】 把 $4x^2+8x-1$ 分解因式。

解　方程 $4x^2+8x-1=0$ 的根是

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\times4\times(-1)}}{2\times4}=\frac{-8\pm4\sqrt{5}}{8}=\frac{-2\pm\sqrt{5}}{2} \text{，}$$

即

$$x_1=\frac{-2+\sqrt{5}}{2} \text{、} x_2=\frac{-2-\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad 4x^2+8x-1&=4\left(x-\frac{-2+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-2-\sqrt{5}}{2}\right)\\&=(2x+2-\sqrt{5})(2x+2+\sqrt{5})\end{aligned}$$

【例 2】 把 $2x^2-8xy+5y^2$ 分解因式。

分析： 把 $-8y$ 看作 x 的係數，$5y^2$ 看作常數項，$2x^2-8xy+5y^2$ 就可看作是 x 的二次三項式。

$\boxed{解}$ 把 $2x^2-8xy+5y^2$ 看作關於 x 的二次方程，它的根是

$$x=\frac{8y\pm\sqrt{(8y)^2-4\times2\times(5y^2)}}{2\times2}=\frac{8y\pm2\sqrt{6}y}{4}=\frac{4\pm\sqrt{6}}{2}y$$

$$\therefore\quad 2x^2-8xy+5y^2=2\left(x-\frac{4+\sqrt{6}}{2}y\right)\left(x-\frac{4-\sqrt{6}}{2}y\right)$$

練 習

1. 分解因式：

   (1) $x^2+20x+96$；　　(2) $6x^2-13xy+7y^2$。

2. 在實數範圍內分解因式：

   (1) x^2-5x+3；　　(2) $3x^2+4xy-y^2$。

習 題 七

1. (1) 如果 -5 是方程 $5x^2+bx-10=0$ 的一個根，求方程的另一個根及 b 的值；

   (2) 如果 $2+\sqrt{3}$ 是方程 $x^2-4x+c=0$ 的一個根，求方程的另一個根及 c 的值；

2. 設 x_1 、 x_2 是方程 $2x^2-6x+3=0$ 的兩個根，利用根與係數的關係求下列各式的值：

   (1) $x_1^2x_2+x_1x_2^2$；　　(2) $\left(x_1+\frac{1}{x_2}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_1}\right)$；

   (3) $(x_1+x_2)^2$；　　(4) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$。

3. 設 x_1 、 x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的兩個根，求證：

   (1) $x_1^2+x_2^2=\frac{b^2-2ac}{a^2}$；　　(2) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{b}{c}=0$。

4. 求一個一元二次方程，使它的兩個根是

(1) -1、$\dfrac{3}{4}$；　(2) $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$、$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$。

5. 已知兩個數的和及它們的積分別等於下列各數，求這兩個數：

(1) 和等於-5、積等於-14；

(2) 和等於$\sqrt{2}$、積等於$-\dfrac{1}{4}$。

6. 利用根與係數的關係，求一個一元二次方程，使它的根分別是方程$2x^2+3x-1=0$個各根的

(1) 相反數；　(2) 倒數；　(3) 平方。

7. 把下列各式分解因式：

(1) $5x^2+11x+6$；　(2) $6y^2-13y+6$；

(3) $-4x^2-4x+15$；　(4) $10p^2-p-3$；

(5) $a^2+40a+384$；　(6) $3x^2y^2-10xy+7$。

8. 在實數範圍內分解因式：

(1) $2x^2-4x-5$；　(2) $-3m^2-2m+4$；

(3) $x^2-2\sqrt{2}x-3$；　(4) $3x^2-5xy-y^2$。

三、可化為一元二次方程的方程

11.7　簡單的高次方程

一個整式方程經過整理後，如果只含有一個未知數，並且未知數的最高次數大於 2，這樣的方程叫做**一元高次方程**。有些特殊的一元高次方程，可以化為一元一次方程或者一元二次方程來解。

【例 1】 解方程 $x^3-2x^2-15x=0$ 。

解　將方程左邊分解因式，

$$x(x^2-2x-15)=0$$

$$x(x+3)(x-5)=0$$

由此得 $x=0$ ，或 $x+3=0$ ，或 $x-5=0$ 。

所以原方程有三個根：

$$x_1=0 \text{ 、 } x_2=-3 \text{ 、 } x_3=5 \text{ 。}$$

【例 2】 解方程 $x^4-6x^2+5=0$ 。

解　設 $x^2=y$ ，那麼 $x^4=y^2$ ，於是原方程變為

$$y^2-6y+5=0 \text{ 。}$$

解這個方程，得

$$y_1=1 \text{ 、 } y_2=5 \text{ 。}$$

當 $y=1$ 時， $x^2=1$ ，

∴　$x=\pm 1$ 。

當 $y=5$ 時， $x^2=5$ ，

∴　$x=\pm\sqrt{5}$ 。

所以原方程有四個根：

$$x_1=1 \text{ 、 } x_2=-1 \text{ 、 } x_3=\sqrt{5} \text{ 、 } x_4=-\sqrt{5} \text{ 。}$$

像例 2 那樣，只含有未知數的偶次項之一元四次方程，叫做雙二次方程。這類方程，通常用換元法來解，即用輔助未知數 y 代替方程裡的 x^2 ，使這個雙二次方程變為關於 y 的一元二次方程。求出 y 的值後，就可進一步求出原方程的根。

【例 3】 解方程 $(x^2-x)^2-4(x^2-x)-12=0$ 。

解　設 $x^2-x=y$ ，原方程變為

$$y^2-4y-12=0 \text{ 。}$$

解這個方程，得

$$y_1=6 \text{ 、 } y_2=-2 \text{ 。}$$

當 $y=6$ 時，$x^2-x=6$，即

$$x^2-x-6=0 \text{。}$$

解這個方程，得

$$x_1=-2 \text{、} x_2=3 \text{。}$$

當 $y=-2$ 時，$x^2-x=-2$，

$$x^2-x+2=0 \text{。}$$

$\because \quad \Delta=(-1)^2-4\times1\times2=-7<0$

$\therefore$ 這個方程沒有實數根

所以原方程有兩個實數根：

$$x_1=-2 \text{、} x_2=3 \text{。}$$

練 習

解下列方程：

1. (1) $x^3-8x^2+15x=0$； (2) $x^3+7x^2-60x=0$。
2. (1) $x^4-13x^2+36=0$； (2) $x^4-14x^2+45=0$；
   (3) $3x^4-2x^2-1=0$。
3. (1) $(x^2+2x)^2-14(x^2+2x)-15=0$；
   (2) $(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)-8=0$。

11.8 分式方程

我們學過可化為一元一次方程的分式方程，現在進一步學習可化為一元二次方程的分式方程。

解可化為一元二次方程的分式方程之步驟與解可化為一元一次方程的分式方程之步驟相同。解方程時，用同一個含有未知數的整式(各分式的最簡公分母)去乘方程的兩邊，約去分母，化為整式方程。這樣得到的整式方程有時與原分式方程不是同解方程，有可能產生增根。因此，解分式方程時，必須進行檢驗。可把變形後求得的整式方程之根代入原方程各分式的分母，如果各分母都不為零，就是原方程的根；如果有的分母為零，就是增根。

為了簡便起見，也可把變形後求得的整式方程之根代入所乘的整式，如果不使這個整式等於零，就是原方程的根；如果使這個整式等於零，就是增根。

【例 1】 解方程 $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4x}{x^2-4}+\dfrac{2}{2-x}=1$ 。

$\boxed{解}$ 原方程就是

$$\frac{1}{x+2}+\frac{4x}{(x+2)(x-2)}-\frac{2}{x-2}=1,$$

方程的兩邊都乘以 $(x+2)(x-2)$ ，約去分母，得

$$(x-2)+4x-2(x+2)=(x+2)(x-2),$$

整理後，得

$$x^2-3x+2=0,$$

解這個方程，得

$$x_1=1、x_2=2。$$

檢驗： 把 $x=1$ 代入 $(x+2)(x-2)$ ，它不等於零，

$\therefore$ $x=1$ 是原方程的根

把 $x=2$ 代入 $(x+2)(x-2)$ ，它等於零，

$\therefore$ $x=2$ 是增根

所以原方程的根是 $x=1$ 。

【例 2】 解方程 $\dfrac{2(x^2+1)}{x+1}+\dfrac{6(x+1)}{x^2+1}=7$ 。

分析： 這個方程左邊兩個分式中的 $\dfrac{x^2+1}{x+1}$ 與 $\dfrac{x+1}{x^2+1}$ 互為倒數，根據這個特點，可以用換元法來解。

$\boxed{解}$ 設 $\dfrac{x^2+1}{x+1}=y$ ，那麼 $\dfrac{x+1}{x^2+1}=\dfrac{1}{y}$ ，於是原方程變為

$$2y+\frac{6}{y}=7。$$

兩邊的方程都乘以 y，約去分母，得

$$2y^2-7y+6=0 \text{ 。}$$

解這個方程，得

$$y_1=2 \text{ 、 } y_2=\frac{3}{2} \text{ 。}$$

當 $y=2$ 時，$\dfrac{x^2+1}{x+1}=2$，去分母，整理得

$$x^2-2x-1=0 \text{ 。}$$

$$\therefore \quad x=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=1\pm\sqrt{2} \text{ 。}$$

當 $y=\dfrac{3}{2}$ 時，$\dfrac{x^2+1}{x+1}=\dfrac{3}{2}$，去分母，整理得

$$2x^2-3x-1=0 \text{ 。}$$

$$\therefore \quad x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{3} \text{ 。}$$

檢驗： 把 $x=1\pm\sqrt{2}$、$x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{3}$ 分別代入原方程的分母，各分母都不等於零，所以它們都是原方程的根。

從而原方程的根是

$$x_1=1+\sqrt{2} \text{ 、 } x_2=1-\sqrt{2} \text{ 、}$$

$$x_3=\frac{3+\sqrt{17}}{3} \text{ 、 } x_4=\frac{3-\sqrt{17}}{3} \text{ 。}$$

【例 3】 解關於 x 的方程 $x+\dfrac{1}{x-1}=a+\dfrac{1}{a-1}$ 。

解 方程的兩邊同乘以 $(a-1)(x-1)$，約去分母，得

$$x(a-1)(x-1)+a-1=a(a-1)(x-1)+x-1 \text{ 。}$$

整理後，得

$$(a-1)x^2-a^2x+a^2=0 \text{ 。}$$

解這個關於 x 的方程，得

$$x_1=a \text{、} x_2=\frac{a}{a-1} \text{。}$$

檢驗： 把 $x=a$ 、 $x=\dfrac{a}{a-1}$ 分別代入 $x-1$ 都不等於零，所以它們都是原方程的根。

從而原方程的根是

$$x_1=a \text{、} x_2=\frac{a}{a-1} \text{。}$$

練　習

1. 解下列方程：

(1) $\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x-1}=1$ ；　　(2) $\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x+1}=2$ ；

(3) $\dfrac{2}{1-x}=\dfrac{1}{1+x}+1$ ；　　(4) $\dfrac{2}{x^2-4}+\dfrac{x-4}{x^2+2x}=\dfrac{1}{x^2-2x}$ 。

2. 用換元法解下列方程：

(1) $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2-5\left(\dfrac{x}{x-1}\right)+6=0$ ；

(2) $\dfrac{3x}{x^2-1}+\dfrac{x^2-1}{3x}=\dfrac{5}{2}$ 。

3. 解下列關於 x 的方程：

(1) $x+\dfrac{1}{x}=c+\dfrac{1}{c}$ ；

(2) $\dfrac{a-x}{b+x}=5-\dfrac{4(b+x)}{a-x}$ $(a+b\neq 0)$。

【例 4】 甲、乙兩人同時從 A 村出發，步行 30 km 到 B 村。甲比乙每小時多走 2 km，結果比乙早到半小時。二人每小時各走幾 km？

解　設乙每小時走 x km，那麼甲每小時走 $(x+2)$ km，根據題意，得

$$\frac{30}{x+2}=\frac{30}{x}-\frac{1}{2}。$$

方程的兩邊同乘以 $2x(x+2)$，約去分母，整理得

$$x^2+2x-120=0。$$

解這個方程，得

$$x_1=10、x_2=-12。$$

經檢驗，$x_1=10$、$x_2=-12$ 都是原方程的根。但速度為負數不合題意，所以只取 $x=10$，這時 $x+2=12$。

答：甲每小時走 12 km，乙每小時走 10 km。

【例 5】一個水池有甲、乙兩個進水管。單獨開放甲管注滿水池比單獨開放乙管少用 10 小時，如果兩管同時開放，12 小時可把水池注滿。若單獨開放一個水管，各需多少小時才能把水池注滿？

分析：我們可設單獨開放乙管注滿水池需 x 小時，那麼單獨開放甲管注滿水池需 $(x-10)$ 小時。單開乙管每小時可注滿水池的 $\frac{1}{x}$，單開甲管每小時可注滿水池的 $\frac{1}{x-10}$。根據兩管同時開，每小時可注滿水池的 $\frac{1}{12}$，可以列出方程。

解　設單獨開放乙管注滿水池需 x 小時，那麼單獨開放甲管注滿水池需 $(x-10)$ 小時。根據題意，得

$$\frac{1}{x-10}+\frac{1}{x}=\frac{1}{12}。$$

方程的兩邊同乘以 $12x(x-10)$，約去分母，並整理，得

$$x^2-34x+120=0。$$

解這個方程，得

$$x_1=30、x_2=4。$$

經檢驗，$x_1=30$、$x_2=4$都是原方程的根。

當$x=30$時，$x-10=20$。

當$x=4$時，$x-10=-6$。

因為注水時間不能為負數，所以只能取$x=30$。

答：單獨開放一個水管注滿水池，甲管需要 20 小時，乙管需要 30 小時。

練　習

1. 某農場開挖一條長 960 m 的渠道，開工後每天比原計畫多挖 20 m，結果提前 4 天完成任務。原計畫每天挖多少 m？
2. 某工廠貯存 350 T 煤，由於改進爐灶及燒煤技術，每天能節約 2 T 煤，使貯存的煤比原計畫多用 20 天。貯存的煤原計畫用多少天？
3. 甲、乙兩隊學生綠化校園。如果兩隊合作，6 天可以完成，如果單獨工作，甲隊比乙隊少用 5 天。兩隊單獨工作各需多少天完成？
4. 甲、乙兩組工人合做某項工作，10 天以後，因甲組另有任務，乙組再單獨作兩天才完成。如果單獨完成這項工作，甲組比乙組可以快 4 天，求各組單獨完成這項工作所需要的天數。
5. 一小艇順流下行 24 km 到目的地，然後逆流回航到出發地，航行時間共計 3 小時 20 分鐘。已知水流速度是每小時 3 km，小艇在靜水中的速度是多少？小艇順流下行的速度與逆流回航的時間各是多少？

11.9　無理方程

我們來看下面的方程：

$$8+x+\sqrt{64+x^2}=24\text{。}$$

這個方程的未知數 x 含在根號下。像這樣根號下含有未知數的方程，叫做**無理方程**[5]。例如 $x-\sqrt{x-1}=3$、$\sqrt{2x-4+1}=\sqrt{x+5}$、$\sqrt{2x-3}+\dfrac{2}{\sqrt{2x-3}}=\sqrt{5x-1}$ 等都是無理方程。但是像 $x^2+2\sqrt{2}x-1=0$、$\dfrac{x}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{x-2}=1$ 等都不是無理方程，而是整式方程或分式方程。

整式方程與分式方程統稱**有理方程**。

下面我們研究無理方程的解法。例如，解方程

$$\sqrt{2x^2+7x}-2=x \text{。}$$

解這個方程，可以先移項，把被開方數中含有未知數的根式放在方程的一邊，其餘的移到另一邊，得

$$\sqrt{2x^2+7x}=x+2 \text{。}$$

兩邊平方，得到一個有理方程

$$2x^2+7x=x^2+4x+4 \text{。}$$

整理後，得

$$x^2+3x-4=0 \text{。}$$

解這個方程，得

$$x_1=1 \text{、} x_2=-4 \text{。}$$

檢驗： 把 $x=1$ 代入原方程，

左邊 $=\sqrt{2\times 1^2+7\times 1}-2=\sqrt{2+7}-2=3-2=1$

右邊 $=1$

$\therefore$ $x=1$ 是原方程的根

把 $x=-4$ 代入原方程，

左邊 $=\sqrt{2\times(-4)^2+7\times(-4)}-2=0$

右邊 $=-4$

$\therefore$ $x=-4$ 是增根

因此原方程的根是 $x=1$。

[5] 根號下含有字母的式子叫做無理式。

從上例可知，在解無理方程時，為了把無理方程變形為有理方程，須要將方程的兩邊都乘方相同的次數，這樣就有產生增根的可能。因此，解無理方程時，必須把變形後的得到的有理方程的根，代入原方程進行檢驗，如果適合，就是原方程的根，如果不適合，就是增根。

【例 1】 解方程 $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$ 。

$\boxed{解}$ 移項，得

$$\sqrt{2x-4}=1+\sqrt{x+5} \text{ ，}$$

兩邊平方，得

$$2x-4=1+2\sqrt{x+5}+x+5 \text{ 。}$$

即

$$x-10=2\sqrt{x+5} \text{ 。}$$

兩邊再平方，得

$$x^2-20x+100=4(x+5) \text{ 。}$$

即

$$x^2-24x+80=0 \text{ 。}$$

解這個方程，得

$$x_1=4 \text{ 、 } x_2=20 \text{ 。}$$

檢驗： 把 $x=4$ 代入原方程，

左邊 $=\sqrt{2\times4-4}-\sqrt{4+5}=2-3=-1$

右邊 $=1$

$\therefore \quad x=4$ 是增根

把 $x=20$ 代入原方程，

左邊 $=\sqrt{2\times20-4}-\sqrt{20+5}=6-5=1$

右邊 $=1$

$\therefore \quad x=20$ 是原方程的根

因此原方程的根是 $x=20$ 。

注意：這個方程，先移項，使左邊只有一個被開方數中含有未知數的根式，解起來比較簡便。

【例 2】解方程 $2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}+3=0$。

分析：這個方程可變形為

$$2x^2+3x+9-5\sqrt{2x^2+3x+9}-6=0。$$

這裡，可以知道 $2x^2+3x+9$ 是 $\sqrt{2x^2+3x+9}$ 的平方，設 $\sqrt{2x^2+3x+9}=y$，原方程就變為關於 y 的一元二次方程

解　設 $\sqrt{2x^2+3x+9}=y$，那麼 $2x^2+3x+9=y^2$，因此 $2x^2+3x=y^2-9$。於是原方程變為

$$y^2-9-5y+3=0，$$

即

$$y^2-5y-6=0。$$

解這個方程，得

$$y_1=-1、y_2=6。$$

當 $y=-1$ 時，$\sqrt{2x^2+3x+9}=-1$，根據算術根的定義，$\sqrt{2x^2+3x+9}$ 不可能等於一個負數，所以可以得知方程 $\sqrt{2x^2+3x+9}=-1$ 無解。

當 $y=6$ 時，$\sqrt{2x^2+3x+9}=6$，兩邊平方，得

$$2x^2+3x+9=36，$$

即

$$2x^2+3x-27=0。$$

解這個方程，得

$$x_1=3、x_2=-\frac{9}{2}。$$

檢驗：把 $x=3$、$x=-\frac{9}{2}$ 分別代入原方程都適合，所以它們都是原方程的根。

因此原方程的根是

$$x_1=3、x_2=-\frac{9}{2}。$$

練 習

1. (口答) 下列方程是否有解？為什麼？：

(1) $\sqrt{x^2+3x+2}=-4$ ； (2) $\sqrt{x+1+3}=2$ 。

2. 解下列方程：

(1) $\sqrt{2x+3}=x$ ； (2) $\sqrt{2x+3}=-x$ 。

(3) $x+\sqrt{x-2}=2$ ； (4) $x-\sqrt{x-2}=2$ ；

(5) $\sqrt{1-x}+\sqrt{12+x}=5$ ； (6) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+3}=3$ 。

3. 用換元法解下列方程：

(1) $x^2+8x+\sqrt{x^2+8x}=12$ (2) $x^2-3x-\sqrt{x^2-3x+5}=1$ 。

習 題 八

1. 解下列方程：

(1) $(x+1)(x-2)(x+3)=0$ ； (2) $(2x+1)(x^2-5x+6)=0$ ；

(3) $2x^3+7x^2-4x=0$ ； (4) $(x^2+2)(x+3)=6$ ；

(5) $x^3-2x^2-5x+10=0$ ； (6) $x^3-16=4x(x-1)$ 。

2. 解下列方程：

(1) $x^4-25x^2+84=0$ ； (2) $4x^4-5x^2+1=0$ ；

(3) $2x^4-19x^2+9=0$ 。

3. 用換元法解下列方程：

(1) $(x+1)^4-10(x+1)^2+9=0$ ；

(2) $(6x^2-7x)^2-2(6x^2-7x)=3$ ；

(3) $(3x^2-2x+1)(3x^2-2x-7)+12=0$ 。

4. 解下列方程：

(1) $\dfrac{x-1}{x^2-2x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{x-2}$ ； (2) $\dfrac{x+1}{x^2+x}-\dfrac{1}{3x}=\dfrac{x+5}{3x-3}$ ；

(3) $\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{18}{x^2-9}$ ；

(4) $\dfrac{1}{1-x}-2=\dfrac{3x-x^2}{1-x^2}$ ；

(5) $\dfrac{1}{2-x}-1=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{6-x}{3x^2-12}$ ；

(6) $\dfrac{4}{x-5}+\dfrac{x-3}{12-x}=\dfrac{x-45}{x^2-17x+60}$ 。

5. 用換元法解下列方程：

(1) $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2+5\left(\dfrac{x}{x+1}\right)+6=0$ ；

(2) $\dfrac{8(x^2+2x)}{x^2-1}+\dfrac{3(x^2-1)}{x^2+2x}=11$ ；

(3) $x^2+x+1=\dfrac{2}{x^2+x}$ 。

6. 解下列方程：

(1) $\sqrt{x^2-5}=x-1$ ；

(2) $2(\sqrt{x-3+3})=x$ ；

(3) $\sqrt{(x-3)(x-4)}-2\sqrt{3}=0$ ；

(4) $\sqrt{x^2+4x-1}-\sqrt{x-3}=0$

(5) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}=2\sqrt{3}$ ；

(6) $\sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-3)(x-4)}=\sqrt{2}$ 。

7. 用換元法解下列方程：

(1) $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$ ；

(2) $x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=\dfrac{3}{2}(x+1)$ ；

(3) $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}=\dfrac{5}{2}$ 。

8. 解本章第 9 節一開始提出的方程。

9. 解下列關於 x 的方程：

(1) $\dfrac{2x}{x-a}+\dfrac{12x^2}{a^2-x^2}=\dfrac{a-x}{x+a}$ $(a\neq 0)$；

(2) $\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}=\sqrt{a-b}$ 。

10. 從甲站到乙站有 150 km。一列快車與一列慢車同時從甲站開出，1 小時後，快車在慢車前 12 km；快車到達乙站比慢車早 25 分鐘。快車與慢車每小時各走幾 km？

11. 一汽船在順流中航行 46 km 與在逆流中航行 34 km 共用去的時間恰好等於它在靜水中航行 80 km 用去的時間。已知水流速度是每小時 2 km，求汽船在靜水中的速度。

12. 某工廠加工 300 個零件，在加工完 80 個後，改進了操作方法，每天能多加工 15 個，一共用 6 天完成了任務。求改進操作方法後每天加工的零件數。

13. 一個水池有甲、乙兩個進水管，甲管注滿水池比乙管快 15 小時。如果單獨放甲管 10 小時，再單獨放乙管 15 小時，就可注滿水池的 $\dfrac{2}{3}$ 。求單獨開放一個水管，注滿水池各需多少時間？

四、簡單的二元二次方程组

11.10 二元二次方程與二元二次方程组

方程 $x^2-2xy+y^2+x-y=6$ 是一個含有兩個未知數，並且含有未知數的項之最高次數是 2 的整式方程，這樣的方程叫做**二元二次方程**。

關於 x、y 的二元二次方程之一般形式是

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+cy+f=0\text{。}$$

ax^2、bxy、cy^2 叫做這個方程的**二次項**，dx、cy 叫做**一次項**，f 叫做**常數項**。

我們看下面的兩個方程組：

$$\begin{cases} x^2+y^2=625 \\ y=x+5 \end{cases}\text{、}$$

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2+x+y=12 \\ 2x^2+3xy+x+y=11 \end{cases}$$

第一個方程組是由一個二元二次方程與一個二元一次方程組成的，第二個方程組是由兩個二元二次方程組成的。像這樣的方程組都叫做**二元二次方程組**。

下面我們研究一些簡單的二元二次方程組之解法。

11.11 由一個二元二次方程與一個二元一次方程组成的方程组

這種型式的方程組一般都可以用代入法來解。

【例 1】 解方程組

$$\begin{cases} x^2-4y^2+x+3y-1=0 & (1) \\ 2x-y-1=0 & (2) \end{cases}$$

$\boxed{解}$ 由(2)，得

$$y=2x-1 \qquad (3)$$

把(3)代入(1)，得

$$x^2-4(2x-1)^2+x+3(2x-1)-1=0\text{。}$$

整理，得

$$15x^2-23x+8=0\text{，}$$

解這個方程，得

$$x_1=1 \text{、} x_2=\frac{8}{15} \text{。}$$

把 $x_1=1$ 代入(3)，得

$$y_1=1 \text{。}$$

把 $x_2=\frac{8}{15}$ 代入(3)，得

$$y_2=\frac{1}{15} \text{。}$$

所以原方程組的解是：

$$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=1 \end{cases} \text{、} \begin{cases} x_2=\dfrac{8}{15} \\ y_2=\dfrac{1}{15} \end{cases} \text{。}$$

【例 2】解方程組

$$\begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases}$$

分析：這個方程組可以用代入法來解，也可根據一元二次方程的根與係數之關係，把 x、y 看作一個一元二次方程的解，通過解這個一元二次方程來求 x、y。

解　這個方程組的 x、y 是一元二次方程

$$z^2-7z+12=0 \text{。}$$

的兩個根。解這個方程，得

$$z=3 \text{、} z=4 \text{。}$$

所以原方程組的解是：

$$\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=4 \end{cases} \text{、} \begin{cases} x_2=4 \\ y_2=3 \end{cases} \text{。}$$

練　習

1. 下列各組中 x、y 的值是不是方程組

$$\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x+y=5 \end{cases}$$

的解

(1) $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$

2. 解下列方程組：

(1) $\begin{cases} y=x+5 \\ x^2+y^2=625 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2-6x-2y+11=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+xy+y^2+x+5y=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$

3. 解下列方程組：

(1) $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=-10 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \dfrac{1}{xy}=6 \end{cases}$

11.12　由兩個二元二次方程組成的方程組

對於這種型式的方程組，我們只講一些特殊的方程組之解法。現舉例如下：

【例 1】 解方程組

$$\begin{cases} x^2+y^2=20 & (1) \\ x^2-5xy+6y^2=0 & (2) \end{cases}$$

分析： 在這個方程組中，方程(2)的左邊可以分解為兩個一次因式的積$(x-2y)(x-3y)$，而右邊為零，因此方程(2)可化為兩個二元一次方程$x-2y=0$、$x-3y=0$，它們與方程(1)分別組成方程組

$$\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x-2y=0 \end{cases}、\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x-3y=0 \end{cases}。$$

解這兩個方程組，就得到原方程組的所有解。

解 由(2)，得

$$(x-2y)(x-3y)=0，$$

$\therefore \quad x-2y=0$或$x-3y=0$

因此，原方程組可化為兩個方程組

$$\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x-2y=0 \end{cases}、\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x-3y=0 \end{cases}。$$

解這兩個方程組，得原方程組的解為

$$\begin{cases} x_1=4 \\ y_1=2 \end{cases}、\begin{cases} x_2=-4 \\ y_2=-2 \end{cases}、\begin{cases} x_3=3\sqrt{2} \\ y_3=\sqrt{2} \end{cases}、\begin{cases} x_4=-3\sqrt{2} \\ y_4=-\sqrt{2} \end{cases}。$$

【例 2】解方程組

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=9 & (1) \\ (x-y)^2-3(x-y)+2=0 & (2) \end{cases}$$

分析： 這個方程組的每一個方程都可以化為兩個二元一次方程。先將由(1)化得的第一個二元一次方程分別與由(2)化得的兩個二元一次方程進行組合，可得兩個二元一次方程組；再將由(1)化得的第二個二元一次方程分別與由(2)化得的兩個二元一次方程進行組合，又可得兩個二元一次方程組，這樣一共可以得到四個二元一次方程組。解這四個二元一次方程組，就可以得到原方程組所有的解。

解　由(1)，得

$$(x+y)^2=9\text{ 。}$$

$\therefore$　$x+y=3$ 或 $x+y=-3$

由(2)，得

$$(x-y-1)(x-y-2)=0\text{ 。}$$

$\therefore$　$x-y-1=0$ 或 $x-y-2=0$

因此，原方程組可化為四個方程組

$$\begin{cases}x+y=3\\x-y-1=0\end{cases}\text{、}\begin{cases}x+y=3\\x-y-2=0\end{cases}\text{、}$$

$$\begin{cases}x+y=-3\\x-y-1=0\end{cases}\text{、}\begin{cases}x+y=-3\\x-y-2=0\end{cases}\text{ 。}$$

解這四個方程組，得原方程組的解為

$$\begin{cases}x_1=2\\y_1=1\end{cases}\text{、}\begin{cases}x_2=\dfrac{5}{2}\\y_2=\dfrac{1}{2}\end{cases}\text{、}\begin{cases}x_3=-1\\y_3=-2\end{cases}\text{、}\begin{cases}x_4=-\dfrac{1}{2}\\y_4=-\dfrac{5}{2}\end{cases}\text{ 。}$$

練　習

1. 把下列方程化為兩個二元一次方程：

(1)　$x^2-3xy+2y^2=0$；　(2)　$2x^2-5xy-3y^2=0$；

(3)　$x^2-6xy+9y^2=16$；　(4)　$(x+y)^2-3(x+y)-10=0$；

(5)　$x^2-4xy+4y^2-2x+4y=3$ 。

解下列方程組 (第 2～3 題)：

2. (1)　$\begin{cases}(x-y)(x-2y)=0\\3x^2+2xy=20\end{cases}$　(2)　$\begin{cases}x^2+y^2=5\\2x^2-3xy-2y^2=0\end{cases}$

3. (1)　$\begin{cases}(x-2y-1)(x-2y+1)=0\\(3x-2y+1)(2x+y-3)=0\end{cases}$　(2)　$\begin{cases}x^2+2xy+y^2=25\\9x^2-12xy+4y^2=9\end{cases}$

【例 3】解方程組

$$\begin{cases} x^2+3xy=28 & (1) \\ 2xy-y^2=7 & (2) \end{cases}$$

分析： 這個方程組的兩個方程都不含未知數的一次項，消去常數項後就可以得到形如 $ax^2+bxy+cy^2=0$ 的方程，解由這個方程與原方程組的任何一個方程所組成的方程組，就可以求得原方程組的解。

$\boxed{解}$ (1)－(2)×4，得

$$x^2-5xy+4y^2=0$$

$$(x-y)(x-4y)=0$$

$\therefore \quad x-y=0$ 或 $x-4y=0$

因此，原方程組可化為兩個方程組

$$\begin{cases} x-y=0 \\ 2xy-y^2=7 \end{cases}、\begin{cases} x-4y=0 \\ 2xy-y^2=7 \end{cases}。$$

解這兩個方程組，得原方程組的解為

$$\begin{cases} x_1=\sqrt{7} \\ y_1=\sqrt{7} \end{cases}、\begin{cases} x_2=-\sqrt{7} \\ y_2=-\sqrt{7} \end{cases}、\begin{cases} x_3=4 \\ y_3=1 \end{cases}、\begin{cases} x_4=-4 \\ y_4=-1 \end{cases}。$$

【例 4】解方程組

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 & (1) \\ xy=2 & (2) \end{cases}$$

分析： 這個方程組可以像例 3 那樣解。但根據方程組的特點，也可以把方程(1)加上方程(2)×2，得到一個新方程，它的左邊是一個完全平方式，右邊是常數，通過兩邊開平方，就可以得到兩個一次方程；同樣，把方程(1)減去方程(2)×2，得也可以由此得到兩個一次方程。這兩對一次方程同例 2 一樣，一共可以組成四個二元一次方程組。解這四個二元一次方程組，就可以求得原方程組的解。

$\boxed{解}$ (1)＋(2)×2，得

$$(x+y)^2=9$$

$\therefore\quad x+y=\pm 3 \qquad (3)$

(1)－(2)×2，得

$$(x-y)^2=1$$

$\therefore\quad x-y=\pm 1 \qquad (4)$

由(3)、(4)，原方程組可化為四個方程組

$$\begin{cases}x+y=3\\x-y=1\end{cases}、\begin{cases}x+y=3\\x-y=-1\end{cases}、$$

$$\begin{cases}x+y=-3\\x-y=1\end{cases}、\begin{cases}x+y=-3\\x-y=-1\end{cases}。$$

解這四個方程組，得原方程組的解為

$$\begin{cases}x_1=2\\y_1=1\end{cases}、\begin{cases}x_2=1\\y_2=2\end{cases}、\begin{cases}x_3=-1\\y_3=-2\end{cases}、\begin{cases}x_4=-2\\y_4=-1\end{cases}。$$

練 習

解下列方程組 (第 1～2 題)：

1. (1) $\begin{cases}x^2-2xy-y^2=2\\xy+y^2=4\end{cases}$ (2) $\begin{cases}3x^2-y^2=8\\x^2+xy-y^2=4\end{cases}$

2. (1) $\begin{cases}x^2+y^2=20\\xy=8\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x^2+y^2=13\\xy=-6\end{cases}$

3. (口答) 已知方程組

$$\begin{cases}x^2+y^2=5 & (1)\\x^2-y^2=3 & (2)\end{cases}$$

下面的解法是否正確？如果不正確，應當怎樣改正？

$\boxed{解}$ [(1)＋(2)]÷2，得

$$x^2=4$$

$\therefore\quad x=\pm 2$

練　習

[(1)－(2)]÷2，得

$$y^2=1$$

∴　$y=\pm 1$

因此，原方程組的解是

$$\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=1 \end{cases} 、 \begin{cases} x_2=-2 \\ y_2=-1 \end{cases} 。$$

【例 5】解方程組

$$\begin{cases} x^2-2y^2-y=1 & (1) \\ 2x^2-4y^2+x=6 & (2) \end{cases}$$

分析： 這個方程組的兩個方程之二次項係數對應成比例(即 $\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}$)，把方程(2)減去方程(1)×2，就可以得到一個一次方程。解由這個一次方程與原方程組的任何一個方程組成之方程組，就可以求得原方程組的解。

解　(2)－(1)×4，得

$$x+2y=4$$

移項，得

$$x=4-2y \qquad (3)$$

把(3)代入(1)並整理，得

$$2y^2-17y+15=0$$

解這個方程，得

$$y_1=1 、 y_2=\frac{15}{2} 。$$

把 $y_1=1$ 代入(3)，得

$$x_1=2 。$$

把 $y_2=\frac{15}{2}$ 代入(3)，得

$$x_2=-11$$ 。

所以原方程組的解是：

$$\begin{cases}x_1=2\\ y_1=1\end{cases}、\begin{cases}x_2=-11\\ y_2=\dfrac{15}{2}\end{cases}。$$

【例 6】解方程組

$$\begin{cases}3x^2-9xy+2y^2-6x-3y+1=0 & (1)\\ x^2-3xy+y^2-2x-3y+3=0 & (2)\end{cases}$$

分析： 在這個方程組的兩個方程中，含 x 的項之係數對應成比例(即$\dfrac{3}{1}=\dfrac{-9}{-3}=\dfrac{-6}{-2}$)，用加減法可以得到一個只含未知數 y 的方程。解這個方程求出 y，再代入原方程組的任何一個方程，就可求得 x。

$\boxed{解}$ (2)×3－(1)，得

$$y^2-6y+8=0$$

解這個方程，得

$$y_1=2、y_2=4。$$

原方程組可化為兩個方程組

$$\begin{cases}y=2\\ x^2-3xy+y^2-2x-3y+3=0\end{cases}、$$

$$\begin{cases}y=4\\ x^2-3xy+y^2-2x-3y+3=0\end{cases}。$$

解這兩個方程組，得原方程組的解為

$$\begin{cases}x_1=4+\sqrt{15}\\ y_1=2\end{cases}、\begin{cases}x_2=4-\sqrt{15}\\ y_2=2\end{cases}、$$

$$\begin{cases}x_3=7+\sqrt{42}\\ y_3=4\end{cases}、\begin{cases}x_4=7-\sqrt{42}\\ y_4=4\end{cases}。$$

練　習

解下列方程組 (第 1～2 題)：

1. (1) $\begin{cases} x+y+xy=5 \\ 2x+y-xy=2 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x^2-xy-3x=0 \\ xy-2x^2-2y+1=0 \end{cases}$

2. (1) $\begin{cases} 2x^2+y^2+x-y=12 \\ x^2+y^2-y=6 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x^2-y^2+4x-2y=13 \\ x^2-y^2+2x+y=8 \end{cases}$

習　題　九

解下列方程組 (第 1～6 題)：

1. (1) $\begin{cases} x+y+1=0 \\ x^2+4y^2=8 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} (x-3)^2+y^2=9 \\ x+2y=0 \end{cases}$

   (3) $\begin{cases} \dfrac{(x+1)^2}{9}-\dfrac{(y-1)^2}{4}=1 \\ x-y=1 \end{cases}$　(4) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1 \\ y=x-3 \end{cases}$

2. (1) $\begin{cases} x+y=6 \\ xy=7 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=3 \\ \sqrt{xy}=2 \end{cases}$

3. (1) $\begin{cases} \dfrac{4}{x-1}=\dfrac{5}{y+1}+1 \\ \dfrac{3}{x+3}=\dfrac{2}{y} \end{cases}$　(2) $\begin{cases} (x+2)(y-2)=xy \\ \sqrt{(x+1)(y+4)}+x+3=0 \end{cases}$

4. (1) $\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0 \\ y=\dfrac{1}{4}x^2 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x^2-4xy+3y^2=0 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$

   (3) $\begin{cases} (x+y)^2-4(x+y)=5 \\ (x-y)^2-2(x-y)=3 \end{cases}$　(4) $\begin{cases} x^2+2xy+y^2=9 \\ (x-y)^2-3(x-y)-10=0 \end{cases}$

5. (1) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3 \\ 2x^2 - xy - y^2 = 5 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 19 \\ x^2 + y^2 - xy = 7 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 5 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 25 \\ xy = 2 \end{cases}$

6. (1) $\begin{cases} xy - x + y = 7 \\ xy + x - y = 13 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x^2 - 2xy + x = 10 \\ x^2 - xy + y = 7 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18 \\ x^2 - y^2 + x - y = 6 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 + 4x + 3y = 1 \\ 2x^2 - 6xy + y^2 + 8x + 2y = 3 \end{cases}$

7. (我國古代問題)[6]長方形田的面積等於 864 平方步(步是我國古代的一種長度單位)，長與寬的和是 60 步。長與寬各是多少步？

8. 如果矩形的寬增加 1 cm，那麼它的面積就增加 3 cm^2。已知這個矩形原來的面積是 12 cm^2，求它的長與寬。

9. 甲、乙兩個工程隊合做一項工程，12 天可以完工。如果甲隊單獨先作 5 天後，乙隊也來參加，兩隊再合做 9 天才完工。兩隊單獨完成這項工程各需多少天？

10. *A*、*B* 兩地間的道路，有一部分是上坡路，其餘的都是下坡路，騎自行車走下坡路比走上坡路每小時多走 6 km。已知騎自行車從 *A* 地到 *B* 地需要 2 小時 40 分鐘，而從 *B* 地回到 *A* 地可以少用 20 分鐘。如果 *A*、*B* 間的路程為 36 km，分別求騎自行車上坡、下坡時的速度，以及從 *A* 地到 *B* 地的過程中上坡、下坡的路長。

---

[6] 這道題選自我國南宋數學家楊輝所著《田畝比類乘除算法》(1275 年)。原題是：直田積八百六十四步，只云長闊共六十步，問闊及長各幾步。答曰：闊二十四步，長三十六步。

小　结

一、本章主要內容是一元二次方程及其解法、一元二次方程的應用、一元二次方程的根之判別式、根與係數的關係、可化為一元二次方程的高次方程、分式方程、無理方程、簡單的二元二次方程組的解法。

二、我們已學過一些整式方程(一元一次方程、一元二次方程、簡單的高次方程)、分式方程、無理方程及二元一次方程組、二元二次方程組。在這些方程(組)中，對未知數只進行加、減、乘、除、乘方、開方運算。解這些方程(組)的基本思想是：

1. 高次方程 $\xrightarrow{\text{降　次}}$ 一次方程或二次方程；
2. 分式方程 $\xrightarrow{\text{去分母}}$ 整式方程；
3. 無理方程 $\xrightarrow{\text{去根號}}$ 有理方程；
4. 多元方程 $\xrightarrow{\text{消　元}}$ 一元方程。

三、本章介紹了一元二次方程的四種解法—直接開平方法、配方法、公式法與因式分解法。一般說來，公式法對於解任何一元二次方程都適用，是解一元二次方程的主要方法。但在解題時，應分析方程的特點選用適當方法。

四、一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，當 $b^2-4ac>0$ 時，有兩個不相同的實數根；當 $b^2-4ac=0$ 時，有兩個相同的實數根；當 $b^2-4ac<0$ 時，沒有實數根。

五、如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) 的兩個根是 x_1 、 x_2，那麼 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ 、 $x_1\times x_2=\dfrac{c}{a}$ 。並由此得出：

以兩個數 x_1 、 x_2 為根的一元二次方程(二次項係數為 1)是

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0 \text{。}$$

六、解分式方程時，須將方程的兩邊都乘以各分式的最簡公分母，使之變形為整式方程；解無理方程時，須將方程的兩邊乘方相同之次數，使之變形為有理方程。這兩種變形都有可能產生增根。因此，必須檢驗從變形後的方程求得之根是否為原方程的根。

七、解簡單的二元二次方程組，通常用代入法、加減法與因式分解法進行消元或降次。對於某些特別型式的方程組，有時可用換元法或其它方法來解。

複習參考題十一

1. 解下列方程：

(1) $(2x+1)^2+(x-2)^2-(2x+1)(x-2)=43$；

(2) $x^2-(1+2\sqrt{3})x-3+\sqrt{3}=0$；

(3) $(x^2-10)^2+3x^2=28$；

(4) $(2x-3)^4-6(2x-3)^2+9=0$；

(5) $(x^2-x)^2-4(2x^2-2x-3)=0$；

(6) $(x^2+3x+4)(x^2+3x+5)=6$；

(7) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1=0$；

(8) $\dfrac{3}{x^2-3x+2}-\dfrac{1}{x^2-x}=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{4}{x^2-2x}$；

(9) $\dfrac{x+1}{(x+3)(x-1)}-\dfrac{2x-2}{(x+3)(2-x)}=\dfrac{6x}{(1-x)(x-2)}$；

(10) $\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{4}{x-1}=\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{2}{x-3}$；

(11) $x^2+3x-\dfrac{20}{x^2+3x}=8$；

(12) $\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)^2-\dfrac{7}{2}\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)+3=0$；

(13) $2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=1$；

(14) $\sqrt{x+5}+\dfrac{3}{\sqrt{x+5}}=\sqrt{3x+4}$；

(15) $\sqrt{2x-5}+\sqrt{x-3}=\sqrt{3x+4}$；

(16) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{4x-3}-\sqrt{5x+4}=0$；

(17) $2x^2-14x-3\sqrt{x^2-7x+10}+18=0$；

(18) $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=2-x$。

2. 下列各小題中，已知的字母都表示正數。

(1) 在公式 $S=\dfrac{\pi D^2}{2}+\pi Dh$ 中，已知 S、π、h，求 D；

(2) 在公式 $Q=mq+\dfrac{mv^2}{R}$ （$Q>mq$）中，已知 Q、m、q、R，求 v；

(3) 在公式 $mf=\left(\dfrac{m}{K}-1\right)\dfrac{1}{K}$ 中，已知 m、f，求 K；

(4) 在公式 $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r-r_1}$ （$r_1>4R$）中，已知 R、r_1，求 r；

(5) 在公式 $c=\sqrt{a^2+b^2}$ 中，已知 a、c，求 b。

3. 如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的二根之比為 2︰3，求證 $6b^2=25ac$。

4. 利用根與係數的關係，求一個一元二次方程，使它的根分別是方程 $x^2+px+q=0$ 的各根的：

(1) 相反數；　(2) 倒數；　(3) k 倍；　(4) 平方。

5. 把下列各式分解因式：

(1) $a^2-2a-120$；　(2) $-6p^2+11p+10$；

(3) $3x^2-xy-10y^2$；　(4) $15a^2-8ac-12b^2$。

6. 在實數範圍內把下列各式分解因式：

(1) $\sqrt{3}a^2-\sqrt{6}a-\sqrt{2}a+2$ ；　(2) $9m^4-\frac{1}{4}n^4$ ；

(3) x^4-x^2-6 ；　(4) $6x^4-7x^2-3$ ；

(5) $9x^2-12xy+y^2$ ；　(6) $5x^2y^2+xy-7$ 。

7. 用長為 100 cm 的金屬絲製成一個矩形框子，框子各邊的長取多少 cm 時，框子的面積是

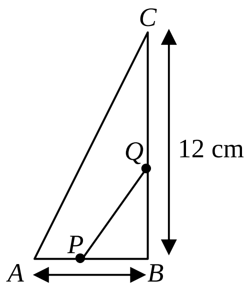
(1) 500 cm^2；　(2) 625 cm^2；　(3) 800 cm^2。

8. 已知一個多邊形，它的對角線共有 35 條。這個多邊形是幾邊形？

9. (1) 有四個連續整數。已知它們的和等於其中最大的與最小的兩個整數之積，求這四個數。

(2) 有三個連續奇數。已知它們的平方和等於 251，求這三個數。

10. 如圖，在△ABC 中，∠B=90°，點 P 從點 A 開始沿 AB 邊向點 B 以 1 cm/秒的速度移動，點 Q 從點 B 開始沿 BC 邊向點 C 以 2 cm/秒的速度移動。如果 P、Q 分別從 A、B 同時出發，幾秒後△PBQ 的面積等於 8 cm^2？



(第 10 題)

11. 一個容器盛滿純藥液 63 L，第一次倒出一部份純藥液後，用水加滿，第二次又倒出同樣多的藥液，再用水加滿，這時容器內剩下的純藥液是 28 L。每次倒出液體多少 L？

12. 一個容器內盛滿燒鹼溶液，第一次倒出 10 L 後，用水加滿，第二次又倒出 10 L，再用水加滿，這時容器內的溶液濃度是原來濃度的$\frac{1}{4}$。求容器的容積。

13. 解下列方程組：

(1) $\begin{cases} x^2-y^2-3x+2y=10 \\ x+y=7 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x+y=17 \\ x^2+y^2=169 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} (x-2)^2+(y+3)^2=9 \\ 3x-2y=6 \end{cases}$　(4) $\begin{cases} 4x^2-9y^2=15 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y^2=4x \end{cases}$　(6) $\begin{cases} x^2+y^2=101 \\ xy=-10 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2=25 \\ 2(x-2)^2-3(y-1)^2=5 \end{cases}$　(8) $\begin{cases} (x+3)^2+y^2=9 \\ 9(x-2)^2+4y^2=36 \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x^2+y^2-3x-3y=8 \\ xy=10 \end{cases}$　(10) $\begin{cases} 2x^2-xy-y^2+3x+2y=3 \\ x^2-3x+2=0 \end{cases}$

(11) $\begin{cases} \dfrac{y}{x}+\dfrac{2x}{y}=3 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$　(12) $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}=1 \\ \dfrac{4}{x^2}+\dfrac{25}{y^2}=25 \end{cases}$

(13) $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}=5 \\ x-y=12 \end{cases}$　(14) $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y-1}=5 \\ x+y=13 \end{cases}$

(15) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{2} \\ x+y=10 \end{cases}$　(16) $\begin{cases} xy=3 \\ yz=6 \\ xz=2 \end{cases}$

14. (1) 已知 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$、$\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$ 是方程 $(y+k)^2=2(x+h)$ 的兩個解，求 h、k 的值；

(2) 已知 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$、$\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$ 是方程 $(x+h)^2+(y+k)^2=10$ 的兩個解，求 h、k 的值。

15. (1) 已知 $\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{3}{2}\sqrt{3} \end{cases}$、$\begin{cases} x=\frac{2}{3}\sqrt{5} \\ y=-2 \end{cases}$ 是方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的兩個解，求正數 a、b 的值；

(2) 已知 $\begin{cases} x=-5\sqrt{2} \\ y=2 \end{cases}$、$\begin{cases} x=6 \\ y=-\frac{2}{5}\sqrt{11} \end{cases}$ 是方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的兩個解，求正數 a、b 的值。

16. (1) 從方程組

$$\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ x+y=b \end{cases}$$

中消去 y，得出關於 x 的二次方程；

(2) 當 $b=3$ 時，這個關於 x 的二次方程有幾個實數解？當 $b=4$ 時呢？當 $b=5$ 時呢？

17. (1) m 取什麼值時，方程組

$$\begin{cases} y^2=4x \\ y=2x+m \end{cases}$$

有兩個相等的實數解？並求出這時方程組的解；

(2) m 取什麼值時，方程組

$$\begin{cases} x^2+2y^2=6 \\ mx+y=3 \end{cases}$$

有兩個相等的實數解？並求出這時方程組的解。

18. 在什麼情況下，關於 x、y 的方程組

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$$

(1) 有兩個不相等的實數解？

(2) 有兩個相等的實數解？

(3) 沒有實數解？

19. 甲、乙二人共同完成一項工程需要 4 天。甲單獨工作 3 天後，剩下的部分由乙去做，乙還需要工作的天數等於甲單獨完成此項工程的天數。甲、乙兩人單獨完成此項工程各需要多少天？

20. A、B 兩地間的路程為 36 km。甲從 A 地、乙從 B 地同時出發相向而行。二人相遇後，甲再走 2 小時 30 分到達 B 地，乙再走 1 小時 36 分到達 A 地。求二人的速度。