第十二章　　指數

我們已經學習了指數是正整數的冪，知道正整數指數冪有如下運算性質：

(1)　$a^m \bullet a^n = a^{m+n}$

(2)　$a^m \div a^n = a^{m-n}$　($a \neq 0$，$m > n$)

(3)　$(a^m)^n = a^{mn}$

(4)　$(ab)^n = a^n \bullet b^n$

(5)　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$　($b \neq 0$)

現在，我們來學習指數是零、負整數與分數時冪的意義及運算。

12.1　零指數與負整數指數

對於同底數的正整數指數冪的除法，我們有上面的運算性質(2)，即同底數的冪相除，指數相減：

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \text{。}$$

由於除式不能是零，我們規定 $a \neq 0$；為了使運算的結果仍然是正整數指數冪，還要求 $m > n$。但在實際計算中有時會出現 $m = n$ 或 $m < n$ 的情況，下面我們來分別研究這兩種情況。

1.　零指數

我們知道，同底數的冪相除，如果被除式的指數等於除式的指數，也就是被除式，那麼所得的商等於 1。例如，

$$5^2 \div 5^2 = 1$$

$$a^3 \div a^3 = 1 \quad (a \neq 0)$$

另一方面，如果仿照上面的運算性質(2)計算這兩個例子，用被除式的指數減去除式的指數，就得

$$5^2 \div 5^2 = 5^{2-2} = 5^0$$
$$a^3 \div a^3 = a^{3-3} = a^0 \quad (a \neq 0)$$

這時就出現了零指數。

為了使被除式的指數等於除式的指數時，同底數冪除法的運算性質也能適用，我們規定零指數冪的意義是

$$\boxed{\boldsymbol{a^0 = 1 \ \ (a \neq 0)}}$$

這就是說，任何不等於零的實數之零次冪都等於 1。

這樣規定以後，上面的例子就可以這樣來計算：

$$5^2 \div 5^2 = 5^{2-2} = 5^0 = 1$$
$$a^3 \div a^3 = a^{3-3} = a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

應當注意，零的零次冪沒有意義。

2. 負整數指數

同底數的冪相除，如果被除式的指數小於除式的指數，我們可以通過約分來計算。例如

$$5^2 \div 5^6 = \frac{5^2}{5^6} = \frac{5^2}{5^2 \bullet 5^4} = \frac{1}{5^4}$$
$$a^3 \div a^5 = \frac{a^3}{a^5} = \frac{a^3}{a^3 \bullet a^2} = \frac{1}{a^2} \quad (a \neq 0)$$

可以看到，同底數的冪相除，當被除式的指數比除式的指數小 p 時，所得的商式一個分數或分式，分子是 1，分母是同底數的 p 次冪。

另一方面，如果仿照冪的運算性質(2)計算這兩個例子，用被除式的指數減去除式的指數，就得

$$5^2 \div 5^6 = 5^{2-6} = 5^{-4}$$
$$a^3 \div a^5 = a^{3-5} = a^{-2} \quad (a \neq 0)$$

這時就出現了負整數指數。

為了使被除式的指數小於除式的指數時，同底數冪除法的運算性質也能適用，我們規定負整數指數冪的意義是

$$\boxed{\boldsymbol{a^{-p} = \frac{1}{a^p}} \quad (a \neq 0\text{，}p\text{ 是正整數})}$$

這就是說，任何不等於零之實數的 $-p$ (p 是正整數)次冪，等於這個數的 p 次冪之倒數。

這樣規定以後，上面的例子就可以這樣來計算：

$$5^2 \div 5^6 = 5^{2-6} = 5^{-4} = \frac{1}{5^4}$$

$$a^3 \div a^5 = a^{3-5} = a^{-2} = \frac{1}{a^2} \quad (a \neq 0)$$

應當注意，零的負整數次冪沒有意義。

規定了零指數冪與負整數指數冪的意義，就把指數從正整數推廣到了整數。正整數指數冪的運算性質對整數指數冪都適用。例如：

$$a^3 \bullet a^0 = a^{3+0} = a^3 \qquad (a \neq 0)$$

$$a^{-3} \bullet a^2 = a^{-3+2} = a^{-1} = \frac{1}{a} \quad (a \neq 0)$$

$$(a^{-3})^2 = a^{-3\times 2} = a^{-6} = \frac{1}{a^6} \quad (a \neq 0)$$

在本章裡，當指數是零或負數時，如果沒有特別說明，底數都不等於零。

【例 1】 計算

$$10^{-3}\text{、}(-3)^{-2}\text{、}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\text{、}5^0 \times (-2)^{-1}\text{。}$$

解 $10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1000}$； $(-3)^{-2} = \dfrac{1}{(-3)^2} = \dfrac{1}{9}$；

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3} = 8$； $5^0 \times (-2)^{-1} = 1 \times \dfrac{1}{-2} = -\dfrac{1}{2}$ 。

【例 2】 用小數表示下列各式：

$$10^{-5} 、 7\times10^{-6} 、 3.6\times10^{-8} 。$$

解

$$10^{-5}=\frac{1}{10^5}=0.00001 ；$$

$$7\times10^{-6}=7\times\frac{1}{10^6}=7\times0.000001=0.000007 ；$$

$$3.6\times10^{-8}=3.6\times\frac{1}{10^8}=3.6\times0.00000001=0.000000036 。$$

練 習

1. (口答) 下列各式的結果是什麼？

   (1) $3a^2b+2a^2b$ ；　　(2) $3a^2b\bullet2a^2b$ ；

   (3) $(3ab^2)^2$ ；　　(4) $\left(-\frac{2b}{a^2}\right)^3$ ；

   (5) $16a^4b^2\div12a^2b^2$ ；　　(6) $(a^2b^2)^3\div a^2b$ 。

2. 計算：

$$3^0 、 3^{-1} 、 10^{-4} 、 (\sqrt{2})^0 、 7^{-2} 、 1^{-10} 、 (-2)^{-3} 、$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} 、 (-0.1)^0 、 \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} 。$$

3. 計算：

   (1) $(-2)^3-(-1)^0$ ；　　(2) $2^{-2}+(-2)^{-5}$ ；

   (3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\div\left(\frac{1}{2}\right)^0$ ；　　(4) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\times2^{-1}$ 。

4. 用小數表示下列各式：

   (1) 2×10^{-5} ；　　(2) 3.1×10^{-7} ；

   (3) 8.04×10^{-8} ；　　(4) 1.205×10^{-2} ；

   (5) 2.12×10^{-3} ；　　(6) 2.12×10^{-2} ；

   (7) 2.12×10^{-1} ；　　(8) 2.12×10^0 。

【例 3】計算$(-a)^{-5}$、$a^{-2}b^{-1}(-2a^{3})$、$(-5a^{3}b^{-1})^{-2}$，並且把結果化成只含有正整數指數的式子。

解 $(-a)^{-5}=\dfrac{1}{(-a)^{5}}=-\dfrac{1}{a^{5}}$；

$a^{-2}b^{-1}(-2a^{3})=-2a^{-2+3}b^{-1}=-2ab^{-1}=-\dfrac{2a}{b}$；

$$\begin{aligned}(-5a^{3}b^{-1})^{-2}&=(-5)^{1\times(-2)}a^{3\times(-2)}b^{(-1)\times(-2)}\\&=(-5)^{-2}a^{-6}b^{2}\\&=\frac{1}{(-5)^{2}}\times\frac{1}{a^{6}}\times b^{2}\\&=\frac{b^{2}}{25a^{6}}\end{aligned}$$

【例 4】計算：

(1) $\dfrac{a^{-2}b^{-3}(-3a^{-1}b^{2})}{6a^{-3}b^{-2}}$；　(2) $(x^{-2}+y^{-2})(x^{-2}-y^{-2})$；

(3) $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}\bullet b^{-1}}$。

解 (1) $$\begin{aligned}\frac{a^{-2}b^{-3}(-3a^{-1}b^{2})}{6a^{-3}b^{-2}}&=-\frac{3}{6}a^{-2+(-1)-(-3)}b^{-3+2-(-2)}\\&=-\frac{1}{2}a^{0}b\\&=-\frac{1}{2}b\end{aligned}$$

(2) $(x^{-2}+y^{-2})(x^{-2}-y^{-2})=(x^{-2})^{2}-(y^{-2})^{2}=x^{-4}-y^{-4}$；

(3) $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}\bullet b^{-1}}=\dfrac{(a^{-1}+b^{-1})ab}{(a^{-1}\bullet b^{-1})ab}=\dfrac{b+a}{1}=a+b$。

練　習

1. 計算下列各式，並且把結果化成只含有正整數指數的式子：

(1) $\dfrac{ab}{c^{-2}}$；　(2) $pq^{-1}r^{-1}$；

(3) $\dfrac{a(a+b)^{-1}}{a^{-2}b}$；　(4) $\dfrac{5^{-1}}{2^{-3}}\dfrac{xy^{-2}}{ab^{-4}}$。

2. 利用負整數指數把下列各式化成不含分母的式子：

(1) $\dfrac{1}{y^5}$；　(2) $\dfrac{a^2}{b^3}$；　(3) $\dfrac{m^2}{x^5y}$。

3. (口答) 下列計算是否正確？如果不正確，應如何改正？

(1) $(-1)^0=-1$；　(2) $(-1)^1=1$；

(3) $3a^{-2}=\dfrac{1}{3a^2}$；　(4) $(-x)^5\div(-x)^3=-x^2$。

4. 計算下列各式，並且把結果化成只含有正整數指數的式子：

(1) $3^{-5}\bullet 3^6$；　(2) $7^{-9}\div 7^{-10}$；　(3) $a^{-3}\bullet a^2$；

(4) $b^{-4}b^{-2}$；　(5) $(a^{-3})^{-2}$；　(6) $(x^{-3})^0$；

(7) $(xy)^{-2}$；　(8) $\left(\dfrac{p}{q}\right)^{-2}$。

5. 計算：

(1) $(x^4y^{-3})\bullet(x^{-2}y^2)$；　(2) $3a^{-2}b^{-3}\div 3^{-1}a^2b^{-3}$；

(3) $\left(\dfrac{3^{-5}\bullet 3^2}{3^{-3}}\right)^{-2}$；　(4) $\dfrac{(x^{-1}+y^{-1})(x^{-1}-y^{-1})}{x^{-2}y^{-2}}$。

3.　科學記數法

同底數的冪相除，如果被除式的指數小於除式的指數，我們可以通過約分來計算。例如，地球的表面積約為 510000000 km^2，可以記作 5.1×10^8 km^2。現在，指數的概念從正整數推廣到了整數，我們就可以利用 10 的整數次冪來記任何數了。例如，課本

中一頁紙的厚度約是 0.000075 m，而

$$\begin{aligned} 0.000075 &= 7.5 \times 0.00001 \\ &= 7.5 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

這樣，我們可以把一頁紙的厚度記作 7.5×10^{-5} m。

這種利用 10 的整數冪來記數之方法，是科學技術上常用的一種記數法，習慣上稱為科學記數法。科學記數法是把一個數記成 $\pm a \times 10^{n}$ 的形式，其中 n 是整數，a 是大於或等於 1 而小於 10 的數。

下面我們看兩個例題。

【例 5】 用科學記數法表示下列各數：

1000000、 –30000 、57000000、 –849000 、21.23、5.08

$\boxed{解}$

$$1000000 = 1 \times 1000000 = 1 \times 10^{6}$$

$$-30000 = -3 \times 10000 = -3 \times 10^{4}$$

$$57000000 = 5.7 \times 10000000 = 5.7 \times 10^{7}$$

$$-847000 = -8.49 \times 100000 = -8.49 \times 10^{5}$$

$$21.23 = 2.123 \times 10 = 2.123 \times 10^{1}$$

$$5.08 = 5.08 \times 1 = 5.08 \times 10^{0}$$

從例 5 可以看到，用科學記數法把一個絕對值大於 1 的數表示成 $\pm a \times 10^{n}$ 的形式時，n 是一個非負整數，n 等於原數整數部分的位數減去 1。

【例 6】 用科學記數法表示下列各數：

0.008、 –0.000034 、0.0000000125

$\boxed{解}$

$$0.008 = 8 \times 0.001 = 8 \times 10^{-3}$$

$$-0.000034 = -3.4 \times 0.00001 = -3.4 \times 10^{-5}$$

$$0.0000000125 = 1.25 \times 0.00000001 = 1.25 \times 10^{-8}$$

從例 6 可以看到，用科學記數法把一個絕對值小於 1 的數表示成 $\pm a \times 10^{n}$ 之形式時，n 是一個負整數，它的絕對值等於原數

中第一個非零數碼前面所有零的個數(包括小數點前面的那個零)。

用科學記數法表示位數較多的數時，讀、寫、計算與記憶都很方便。

【例 7】 地球的質量約是5.98×10^{21}T，木星的質量約是地球的質量之 318 倍。木星的質量約是多少 T (保留兩個有效數字)？

$\boxed{解}$ $5.98\times10^{21}\times318=1901.64\times10^{21}\approx1.9\times10^{24}$ 。

答：木星的質量約是1.9×10^{24}T。

練　習

1. 用科學記數法表示下列各數：
   10000、800000、56000000、2030000000、7400000。

2. 下列用科學記數法表示的數，原來的數是什麼？
   1×10^{7} 、 4×10^{3} 、 8.5×10^{6} 、 7.04×10^{5} 、 3.96×10^{4} 。

3. 用科學記數法表示下列各數：
   (1) 0.00007； (2) 0.0000043；
   (3) 0.00000000807； (4) 0.0000006002；
   (5) 0.301； (6) −0.004025 。

4. 用科學記數法表示下列各數：
   (1) 153.7； (2) 347200000
   (3) 0.0000003142； (4) 0.00000002001
   (5) −6 ； (6) 30.5771；
   (7) 0.513； (8) 0.002074。

5. 寫出下列科學記數法表示的數之原數：
   (1) -3.05×10^{-6} ； (2) 7.03×10^{5} ； (3) -3.73×10^{-1} ；
   (4) 2.14×10^{6} ； (5) 1×10^{-8} ； (6) 1.381×10^{7} ；
   (7) 7×10^{1} ； (8) 2.818×10^{3} 。

12.2　分數指數

1.　根式

前面已經學過二次根式及其一些性質，現在進一步學習一般根式與它的一些性質。

我們已知，當 n 是奇數時，實數 a 的 n 次方根用符號 $\sqrt[n]{a}$ 來表示；當 n 是偶數時，非負數 a 的 n 次算術根用符號 $\sqrt[n]{a}$ 來表示。式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做**根式**，這裡 n 叫做根指數，a 叫做被開方數。我們知道，根指數 n 等於 2 的根式是二次根式(這時根指數 2 省略不寫)。n 等於 3、4、5、⋯時，相應的根式是三次、四次、五次、⋯根式。當 n 是奇數時，a 可以是任何實數；當 n 是偶數時，a 可以是任何非負數。例如 $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt[3]{-5}$ 、 $\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ 、 $\sqrt[5]{a}$ 、 $\sqrt[6]{b^2+1}$ 、 $\sqrt{(a-b)^2}$ 等都是根式，$5\sqrt[4]{x^2+y^2}$ 也是根式。應當注意，在實數範圍內，負數的偶次方根沒有意義。

根據方根的意義，可得

(1)　$(\sqrt{5})^2=5$ 、 $(\sqrt[3]{-2})^3=-2$ ；

(2)　$\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$ 、 $\sqrt[5]{2^5}=2$ ；

(3)　$\sqrt{2^2}=2$ 、 $\sqrt{(-2)^2}=|-2|=-(-2)=2$ 、

$\sqrt[4]{(-3)^4}=|-3|=-(-3)=3$ 。

一般地，如果 $\sqrt[n]{a}$ 有意義，那麼

> **(1)**　$(\sqrt[n]{a})^n=a$ ；
>
> **(2)**　**當 n 為奇數時，$\sqrt[n]{a^n}=a$ ；**
>
> **(3)**　**當 n 為偶數時，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases} a & (a\ge 0) \\ -a & (a<0)\end{cases}$**

因為負數的偶次方根沒有意義，負數的奇次方根都可以化成被開方數是正數的同次方根之相反數，例如$\sqrt[5]{-2}=-\sqrt[5]{2}$，所以我們研究根式的性質時，只要研究算術根的性質就可以了。我們規定：在本章裡，如果沒有特別說明，根號內出現的字母，都表示正數。

根據公式$(\sqrt[n]{a})^n=a$，當$a\geq 0$時，可以進行下面的計算：

$$(\sqrt[8]{a^6})^8=a^6$$

$$(\sqrt[4]{a^3})^8=[(\sqrt[4]{a^3})^4]^2=(a^3)^2=a^6$$

$\sqrt[8]{a^6}$與$\sqrt[4]{a^3}$都是a^6的 8 次算術根，而a^6的 8 次算術根只有一個，所以當$a\geq 0$時，應當有

$$\sqrt[8]{a^6}=\sqrt[4]{a^3}\text{ 。}$$

用同樣的方法，可以推得

$$\boxed{\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}\quad (a\geq 0)}$$

與

$$\boxed{\sqrt[p]{a^{mp}}=a^m\quad (a\geq 0)}$$

這裡 m 是正整數，n、p 都是大於 1 的整數。

這就是說，一個根式的被開方數如果是一個非負數的冪，那麼這個根式的根指數與被開方數的指數都乘以或者除以同一個正整數，根式的值不變。這個性質就叫做**根式的基本性質**。

對於根式的基本性質，應當特別注意$a\geq 0$這個條件，否則不一定有這一個性質。例如，$\sqrt[6]{(-8)^2}=\sqrt[6]{64}=2$，$\sqrt[3]{-8}=-2$，所以$\sqrt[6]{(-8)^2}\neq\sqrt[3]{-8}$。

根指數相同的根式叫做**同次根式**；根指數不同的根式叫做**異次根式**。利用根式的基本性質，可以把異次根式化為同次根式，或者約簡某些根式中被開方數的指數及根指數。

【例 1】 把 $\sqrt{a}$ 、$\sqrt[3]{a^2b}$ 、$\sqrt[6]{a}$ 化成同次根式。

分析： 這三個根式的根指數 2、3、6 的最小公倍數是 6，可以把它們都化成六次根式。

解

$\sqrt{a}=\sqrt[6]{a^3}$ ；

$\sqrt[3]{a^2b}=\sqrt[6]{(a^2b)^2}=\sqrt[6]{a^4b^2}$ ；

$\sqrt[6]{a}=\sqrt[6]{a}$ 。

【例 2】 把 $\sqrt[3]{-5}$ 、$\sqrt[4]{3}$ 化成同次根式。

解

$\sqrt[3]{-5}=-\sqrt[3]{5}=-\sqrt[12]{5^4}=-\sqrt[12]{625}$ ；

$\sqrt[4]{3}=\sqrt[12]{3^3}=\sqrt[12]{27}$ 。

【例 3】 約簡下列根式中被開方數的指數及根指數：

(1) $\sqrt[5]{a^{10}}$ ；　　(2) $\sqrt[6]{(-3)^2x^4}$ 。

解

(1) $\sqrt[5]{a^{10}}=a^2$ ；

(2) $\sqrt[6]{(-3)^2x^4}=\sqrt[6]{3^2x^4}=\sqrt[6]{(3x^2)^2}=\sqrt[3]{3x^2}$ 。

【例 4】 求 $\sqrt[6]{8}$ 精確到 0.001 的近似值。

解

$\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}\approx 1.414$ 。

練 習

1. 設 x 表示實數，求下列各式在什麼條件下有意義：

$\sqrt{x}$ 、$\sqrt{-x}$ 、$\sqrt[3]{x}$ 、$\sqrt[3]{-x}$ 、$\sqrt[4]{1-x}$ 、$\sqrt[4]{x-1}$ 。

2. 計算：

(1) $\sqrt{x^2-2x+1}$ $(x>1)$；　　(2) $\sqrt[4]{(x^2-2x+1)^2}$ $(x<1)$。

練　習

3. 把下列根式化成同次根式：

(1) $\sqrt{5}$ 、$\sqrt[4]{2}$ ；　　(2) $\sqrt[3]{6y^2}$ 、$\sqrt[5]{-y}$ ；

(3) $\sqrt{2mn}$ 、$\sqrt[5]{-6m^2n}$ 、$\sqrt[10]{5m}$ ；

(4) $\sqrt{x+y}$ 、$\sqrt[4]{x^2+y^2}$ 、$\sqrt[6]{(x+y)^5}$ 。

4. 約簡下列根式中被開方數的指數及根指數：

(1) $\sqrt[4]{x^2}$ ；　(2) $\sqrt[3]{y^9}$ ；　(3) $\sqrt[12]{x^4y^6}$ ；

(4) $\sqrt[6]{(-5)^4a^4b^2}$ ；　(5) $\sqrt[4]{16x^8y^{12}}$ ；　(6) $\sqrt[12]{a^{4m}b^{8n}}$ 。

2. 分數指數

看下面的兩個例子：

$$\sqrt{a^6}=a^3=a^{\frac{6}{2}} \qquad (a>0)$$

$$\sqrt[3]{x^{12}}=x^4=x^{\frac{12}{3}} \qquad (x>0)$$

這就是說，當根式的被開方數之指數能被根指數整除時，根式可以寫成分數指數冪的形式。

為了使計算簡便，當根式的被開方數之指數不能被根指數整除時，我們也把根式寫成分數指數冪的形式。例如

$$\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}} \text{ 、} \sqrt{b}=b^{\frac{1}{2}} \text{ 、} \sqrt[4]{c^5}=c^{\frac{5}{4}} \text{ 。}$$

我們規定正數的正分數指數冪之意義是

$$\boxed{\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}} \quad \textbf{(}\boldsymbol{a>0} \text{ ，} \boldsymbol{m} \text{、} \boldsymbol{n} \textbf{ 都是正整數，} \boldsymbol{n>1}\textbf{)}}$$

這就是說，正數的 $\dfrac{m}{n}$ 次冪(m、n 都是正整數，$n>1$)等於這個正整數的 m 次冪之 n 次算術根。

正分數的負分數冪之意義與正數的負整數指數冪之意義相仿，就是

$$\boldsymbol{a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}}\quad (\boldsymbol{a>0}\text{，}\boldsymbol{m}\text{、}\boldsymbol{n}\text{ 都是正整數，}\boldsymbol{n>1})$$

這就是說，正數的 $-\dfrac{m}{n}$ 次冪(m、n 都是正整數，$n>1$)等於這個正整數的 $\dfrac{m}{n}$ 次冪之倒數。

應當注意，零的正分數次冪是零，零的負分數次冪沒有意義。

在本章裡，當指數是分數時，如果沒有特別說明，底數都表示正數。

規定了分數指數冪的意義以後，指數從整數又推廣到了有理數。前面學過的冪之運算性質，對於有理數指數冪也同樣適用。例如，

$$a^{\frac{2}{3}}\bullet a^{-\frac{1}{4}}=a^{\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{4}\right)}=a^{\frac{5}{12}}\text{ 。}$$

【例 5】 求下列各式的值：$8^{\frac{2}{3}}$、$100^{-\frac{1}{2}}$、$\left(\dfrac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$ 。

解

$8^{\frac{2}{3}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}=2^2=4$ ；

$100^{-\frac{1}{2}}=(10^2)^{-\frac{1}{2}}=10^{-1}=\dfrac{1}{10}$ ；

$\left(\dfrac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}=\left(\dfrac{2^4}{3^4}\right)^{-\frac{3}{4}}=\dfrac{2^{-3}}{3^{-3}}=\dfrac{3^3}{2^3}=\dfrac{27}{8}$ 。

【例 6】 計算下列各式，並且把結果化成只含有正整數指數的式子：

(1) $(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})\div(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}})$ ；

(2) $(p^{\frac{1}{4}}q^{-\frac{3}{8}})^8$ ；

(3) $\sqrt[4]{\left(\dfrac{16m^{-4}}{81n^4}\right)^3}$ 。

解　(1) $(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})\div(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}})=4a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}$

$$=4ab^0$$

$$=4a$$

(2) $(p^{\frac{1}{4}}q^{-\frac{3}{8}})^8=(p^{\frac{1}{4}})^8(q^{-\frac{3}{8}})^8=p^2q^{-3}=\dfrac{p^2}{q^3}$ ；

(3) $\sqrt[4]{\left(\dfrac{16m^{-4}}{81n^4}\right)^3}=\left(\dfrac{2^4m^{-4}}{3^4n^4}\right)^{\frac{3}{4}}=\dfrac{2^3m^{-3}}{3^3n^3}=\dfrac{8}{27m^3n^3}$ 。

練　習

1. 用分數指數冪表示下列各式(分式要化為不含分母的式子)：

$$\sqrt[3]{x^2} \text{ 、 } \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \text{ 、 } \sqrt[4]{(a+b)^3} \text{ 、 } \sqrt[3]{m^2+n^2} \text{ 、 } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y^2}} \text{ 。}$$

2. 計算：

(1) $25^{\frac{1}{2}}$ ；　(2) $\left(\dfrac{81}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ；　(3) $27^{\frac{2}{3}}$ ；

(4) $10000^{\frac{1}{4}}$ ；　(5) $4^{-\frac{1}{2}}$ ；　(6) $\left(6\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$ ；

(7) $2^{-1}\times64^{\frac{2}{3}}$ ；　(8) $(0.2)^{-2}\times(0.064)^{\frac{1}{3}}$ 。

3. 計算：

(1) $a^{\frac{1}{4}}\bullet a^{\frac{1}{8}}\bullet a^{\frac{5}{8}}$ ；　(2) $a^{\frac{1}{3}}\bullet a^{\frac{5}{6}}\div a^{-\frac{1}{2}}$ ；　(3) $(x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{3}})^6$ ；

(4) $4a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\div\left(-\dfrac{2}{3}a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\right)$ ；　(5) $\left(\dfrac{8a^{-3}}{27b^6}\right)^{-\frac{1}{3}}$ 。

4. (口答) 下列計算是否正確？如果不正確，應如何改正？

(1) $a^{\frac{2}{3}}\bullet a^{\frac{3}{2}}=a$ ；　(2) $x^{\frac{2}{3}}\bullet x^{-\frac{2}{3}}=0$ ；

(3) $a^{\frac{2}{3}}\div a^{\frac{1}{3}}=a^2$ ；　(4) $(a^{-\frac{1}{2}})^2=a$ 。

3. 根式的性質

當 m、n 都是正整數時，根據冪的性質可得

(1) $(ab)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}$ $(a\geq 0$ 、 $b\geq 0)$

(2) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$ $(a\geq 0$ 、 $b>0)$

(3) $(a^{\frac{1}{n}})^{m}=a^{\frac{m}{n}}$ $(a\geq 0)$

(4) $(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{mn}}$ $(a\geq 0)$

按照分數指數冪的意義，可以把這幾個式子表示成根式的形式，即

(1′) $\boldsymbol{\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}}$ $(\boldsymbol{a\geq 0}$ 、 $\boldsymbol{b\geq 0})$

(2′) $\boldsymbol{\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$ $(\boldsymbol{a\geq 0}$ 、 $\boldsymbol{b>0})$

(3′) $\boldsymbol{(\sqrt[n]{a})^{m}=\sqrt[n]{a^{m}}}$ $(\boldsymbol{a\geq 0})$

(4′) $\boldsymbol{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}}$ $(\boldsymbol{a\geq 0})$

這幾個公式，可以看作關於根式運算的幾個性質。

(1′)式表明：積的算術根，等於積中各個因式的同次算術根之積。例如，

$$\sqrt[3]{27\times 64}=\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{64}=3\times 4=12\ 。$$

(2′)式表明：商的算術根，等於被除式的同次算術根除以除式的同次算術根所得之商。例如，

$$\sqrt[3]{\frac{27}{64}}=\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}}=\frac{3}{4}\ 。$$

(3′)式表明：根式乘方，把被開方數乘方，指數不變。例如，

$$(\sqrt[3]{5})^{2}=\sqrt[3]{5^{2}}=\sqrt[3]{25}\ 。$$

$(4')$式表明：根式開方，被開方數不變，把根指數相乘。例如，

$$\sqrt{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[6]{2}\text{ 、 }\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[9]{2}\text{ 。}$$

把$(1')$式與$(2')$式反過來，就是根式相乘、除的公式，這就是說，同次根式相乘(或相除)，把被開方數相乘(或相除)，根指數不變，例如，

$$5\sqrt[3]{4}\bullet 2\sqrt[3]{2}=10\sqrt[3]{8}=20$$

$$5\sqrt[3]{4}\div 2\sqrt[3]{2}=\frac{5}{2}\sqrt[3]{2}$$

如果是異次根式相乘(或相除)，可以根據根式的基本性質，先化成同次根式，再相乘(或相除)。例如，

$$\sqrt{3}\bullet\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{27}\bullet\sqrt[6]{4}=\sqrt[6]{108}$$

$$\sqrt{3}\div\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{27}\div\sqrt[6]{9}=\sqrt[6]{3}$$

利用這幾個公式，可以進行根式的乘、除、乘方與開方運算。

利用$(1')$式，可以把根式裡被開方數中能開得盡方的因式用與根指數相同次數的算術根代替移到根號外面，也可以把根號外面的非負因式乘方以後(乘方的次數與根指數相同)移到根號裡面。例如，

$$\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\bullet\sqrt{b}=a\sqrt{b}$$

$$\sqrt[3]{a^6b^5}=\sqrt[3]{a^6\bullet b^3\bullet b^2}=\sqrt[3]{a^6}\bullet\sqrt[3]{b^3}\bullet\sqrt[3]{b^2}=a^2b\sqrt[3]{b^2}$$

$$x\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{x^3}\bullet\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{x^3y^2}$$

$$x^3\sqrt{y}=\sqrt{x^6}\bullet\sqrt{y}=\sqrt{x^6y}\qquad(x>0)$$

利用$(2')$式，可以把根號裡面的分母化去。例如，

$$\sqrt[3]{\frac{2}{27}}=\sqrt[3]{\frac{2}{3^3}}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{3}{4}}=\sqrt[3]{\frac{3\times 2}{2^2\times 2}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{6}$$

第一，被開方數的每一個因式之指數都小於根指數；

第二，被開方數不含分母；

第三，被開方數的指數育與根指數是互質數。

符合這三項要求的根式叫做**最簡根式**。例如根式 $a\sqrt[3]{a^2b}$ 是最簡根式，而 $\sqrt[3]{a^4b}$ 、 $a\sqrt[4]{a^2b^2}$ 以及 $a\sqrt[5]{\dfrac{b}{a^3}}$ 都不是最簡根式。計算結果用根式表示時，根式應化成最簡根式。

幾個根式化成最簡根式以後，如果被開方數都相同，根指數也都相同，這幾個根式就叫做**同類根式**，例如，因為

$$\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times3}=2\sqrt{3}\text{ 、 }\sqrt[6]{27}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt{3}\text{ 、 }\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{1\times3}{3\times3}}=\frac{1}{3}\sqrt{3}\text{ ，}$$

所以 $\sqrt{12}$ 、 $\sqrt[6]{27}$ 、 $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ 是同類根式。又 $\sqrt[3]{x}$ 、 $\sqrt{x}$ 不是同類根式，$4\sqrt[3]{a^2}$ 、 $4\sqrt[3]{a}$ 也不是同類根式。

根式相加減，就是把同類根式分別合併。例如，

$$a\sqrt[n]{x}+b\sqrt[m]{y}-c\sqrt[n]{x}+d\sqrt[m]{y}=(a-c)\sqrt[n]{x}+(b+d)\sqrt[m]{y}\text{ 。}$$

練　習

1. 計算：

(1) $\sqrt{a^2b^4}$ ；　　(2) $\sqrt{121\times64\times256}$ ；

(3) $\sqrt[3]{a^9b^3t^{12}}$ ；　　(4) $\sqrt[3]{-343\times512\times729}$ ；

(5) $\sqrt[4]{16a^8b^{12}}$ ；　　(6) $\sqrt[n]{a^{2n}b^nc^{3n}}$ 。

2. 約分：

(1) $\sqrt{\dfrac{2}{81}}$ ；　　(2) $\sqrt{\dfrac{n}{49m^4}}$ ；　　(3) $\sqrt[3]{\dfrac{2}{27}}$ ；

(4) $\sqrt[4]{\dfrac{a^5}{16b^4}}$ ；　　(5) $\sqrt[3]{\dfrac{8x^3y^6}{27a^6b^9}}$ ；　　(6) $\sqrt[n]{\dfrac{a^nb^{2n}}{c^{3n}d^n}}$ 。

練　習

3. 計算：

(1) $(\sqrt[3]{a^2b})^2$；　(2) $(3\sqrt[5]{a^4b^3})^2$；

(3) $(m\sqrt[4]{mn^2})^3$；　(4) $\left(-\dfrac{x}{y}\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)$。

4. 計算：

(1) $\sqrt{\sqrt[3]{a^4b^2}}$；(2) $\sqrt[3]{2\sqrt{7}}$；(3) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$；(4) $\sqrt[n]{2\sqrt{2}}$。

5. 把下列各式中根號內能開得盡方的因式適當改變後移到根號外，使被開方數的每一個因式之指數都小於根指數：

(1) $\sqrt{8a^3}$；　(2) $\sqrt{16t^5}$；　(3) $\dfrac{1}{2}\sqrt{64p^3q^7}$；

(4) $\sqrt[3]{2t^4}$；　(5) $\sqrt[3]{27a^5}$；　(6) $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{27a^4b^5}$。

(7) $\sqrt[n]{a^{2n}b^{n+2}}$；　(8) $\sqrt[4]{x^5-x^4y}$　$(x>y)$。

6. 化去根號內的分母：

(1) $\sqrt{\dfrac{n^2}{8m}}$；(2) $\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{9a^2}}$；(3) $\sqrt[3]{\dfrac{ax^3}{27m^2n^3}}$　(4) $\dfrac{1}{x}\sqrt[n]{\dfrac{1}{a^{n-2}}}$。

7. 把下列根式化成最簡根式：

(1) $\sqrt{\dfrac{16c^3}{9a^5b}}$；　(2) $\sqrt[3]{54a^4b^7}$；

(3) $x^2\sqrt[3]{\dfrac{3y}{2x^2}}$；　(4) $n\sqrt[4]{\dfrac{1}{n^4}+\dfrac{1}{n^2}}$。

8. 計算：

(1) $\sqrt{8}+\sqrt[3]{54}-6\sqrt[3]{\dfrac{2}{27}}+3\sqrt{18}$；

(2) $7b\sqrt[3]{a}+5\sqrt{a^2x}-b^2\sqrt[3]{\dfrac{27a}{b^3}}-6\sqrt{\dfrac{b^2x}{9}}$。

【例 7】 利用分數指數計算下列各式：

(1) $\dfrac{a^2 \bullet \sqrt[5]{a^3}}{\sqrt{a} \bullet \sqrt[10]{a^7}}$ ； (2) $(\sqrt[3]{5}-\sqrt{125}) \div \sqrt[4]{5}$ ；

(3) $\sqrt[3]{xy^2(\sqrt{xy})^3}$ 。

解

(1) $\dfrac{a^2 \bullet \sqrt[5]{a^3}}{\sqrt{a} \bullet \sqrt[10]{a^7}} = \dfrac{a^2 \bullet a^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{1}{2}} \bullet a^{\frac{7}{10}}}$

$= a^{2+\frac{3}{5}-\frac{1}{2}-\frac{7}{10}}$

$= a^{\frac{7}{5}}$

$= \sqrt[5]{a^7}$

$= a\sqrt[5]{a^2}$

(2) $(\sqrt[3]{5}-\sqrt{125}) \div \sqrt[4]{5} = (5^{\frac{1}{3}} - 5^{\frac{3}{2}}) \div 5^{\frac{1}{4}}$

$= 5^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} - 5^{\frac{3}{2}-\frac{1}{4}}$

$= 5^{\frac{1}{12}} - 5^{\frac{5}{4}}$

$= \sqrt[12]{5} - \sqrt[4]{5^5}$

$= \sqrt[12]{5} - 5\sqrt[4]{5}$

(3) $\sqrt[3]{xy^2(\sqrt{xy})^3} = \sqrt[3]{xy^2(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}})^3}$

$= (x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{3}}$

$= x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{7}{6}}$

$= \sqrt[6]{x^5} \bullet \sqrt[6]{x^7}$

$= y\sqrt[6]{x^5 y}$

除特殊情形外，一般利用分數指數進行根式的乘法、除法、乘方、開方等計算比較簡便。所以，我們在進行根式運算時，一般都利用分數指數進行計算。

練　習

計算：

(1) $2\bullet\sqrt{2}\bullet\sqrt[4]{2}\bullet\sqrt[8]{2}$；　(2) $\dfrac{\sqrt{3}\bullet\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}$；

(3) $\sqrt{\dfrac{3y}{x}}\bullet\sqrt{\dfrac{3x^2}{y}}$；　(4) $\dfrac{\sqrt{x}\bullet\sqrt[3]{x^2}}{x\bullet\sqrt[6]{x}}$；

(5) $\sqrt{\sqrt[3]{4}}$；　(6) $\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^3}}$；

(7) $\dfrac{-3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}}c^2}{9a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{2}}}$；　(8) $(x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{1}{2}})x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}$。

習　題　十

1. 計算：

(1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^0+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$；　(2) $(-3)^3+(-3)^{-3}+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-3}-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3$

(3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$；　(4) $\left(\dfrac{b}{2a^2}\right)^3\div\left(\dfrac{2b^2}{3a}\right)^0\times\left(-\dfrac{b}{a}\right)^{-3}$。

2. 把下列各式寫成用正整數指數冪表示的形式：

(1) $a^2b^{-1}c^3$；　(2) $\dfrac{st^{-2}r}{u^{-1}v}$；　(3) $\dfrac{2^{-2}m^{-2}n^{-3}}{3^{-1}m^{-3}n^3x^{-2}}$；(4) $\left(\dfrac{x+y}{2x-y}\right)^{-2}$

3. 利用負整數指數，把下列各式化為不含分母的式子：

(1) $\dfrac{u+v}{u^4v}$；　(2) $\dfrac{2x-y}{(x-y)(x+y)^2}$。

4. 計算：

(1) $(9a^2b^{-2}c^{-4})^{-1}$ ；　(2) $5a^{-2}b^{-3}\div 5^{-1}a^2b^{-1}\times 5^{-2}ab^4c$ ；

(3) $\dfrac{a^{-3}+b^{-3}}{a^{-1}+b^{-1}}$ ；　(4) $\dfrac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-2}+b^{-2}}$ ；

(5) $(a^{-1}+b^{-1})(a+b)^{-1}$ ；　(6) $(x+x^{-1})(x-x^{-1})$ 。

5. 用科學記數法表示下列各數：

32000、3200000、3200000000、0.000032、0.0000032、0.000000032、483、48.3、4.83、0.483、0.0483、0.00483。

6. 生產上常用到習慣上稱為「絲」的長度單位，1 絲 = 0.001 cm。人的頭髮直徑約為 7 絲，合多少 cm？多少 m？分別用科學記數法寫出來。

7. 地球上陸地的面積約為 149000000 km^2，用科學記數法把它表示出來。

8. 一種細菌的半徑是 4×10^{-5} m，用小數把它表示出來(單位為 m)。

9. 一個氧原子約重 2.657×10^{-23} g，一個氫原子約重 1.67×10^{-24} g。一個氧原子的重量約是一個氫原子的重量之多少倍(保留兩個有效數字)？

10. 指出下列各式中 x 的值：

(1) $8=2^x$ ；　(2) $\dfrac{1}{8}=2^x$ ；　(3) $1=10^x$ ；　(4) $0.1=10^x$ ；

(5) $3.4=3.4\times 10^x$ ；　(6) $3400=3.4\times 10^x$ ；

(7) $0.034=3.4\times 10^x$ ；　(8) $1=0.1^x$ ；

(9) $\dfrac{1}{64}=2^x$ ；　(10) $10=0.1^x$ 。

11. 用根式表示下列各式：

(1) $4^{\frac{1}{3}}$ ；　(2) $y^{-\frac{2}{3}}$ ；　(3) $a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}$ ；　(4) $\dfrac{x^{-\frac{1}{4}}}{y^{-\frac{1}{4}}}$ 。

12. 計算：

(1) $(-2x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{3}})(3x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}})(-4x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{2}{3}})$；

(2) $4^{\frac{1}{4}}(-3x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{3}})\div(-6x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}})$；

(3) $\dfrac{-15a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{-\frac{3}{4}}}{25a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}}c^{\frac{5}{4}}}$；　(4) $\left(\dfrac{16s^2t^{-6}}{25r^4}\right)^{-\frac{3}{2}}$。

13. 計算：

(1) $2x^{-\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}-2x^{-\frac{3}{2}}\right)$；　(2) $(2x^{\frac{1}{2}}+3y^{-\frac{1}{4}})(2x^{\frac{1}{2}}-3y^{-\frac{1}{4}})$。

14. 計算：

(1) $\sqrt[4]{49x^2y^2}$；　(2) $\sqrt[3]{\left(\dfrac{27p^{-6}}{p^2q^{-4}}\right)^{-2}}$；

(3) $\sqrt[5]{\dfrac{x}{y}\sqrt[4]{\dfrac{y}{x}}}$；　(4) $\sqrt{x^{-3}y^2\sqrt[3]{xy^2}}$；

(5) $(\sqrt{a}\bullet\sqrt[3]{b^2})^{-3}\div\sqrt{b^{-4}a^{-1}}$；　(6) $(\sqrt{3}-\sqrt[4]{243})\div 2\sqrt[3]{3}$。

15. 解方程：

(1) $x-4\sqrt{x}+3=0$；　(2) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}=2$；

(3) $\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x}+2=0$。

小　结

一、本章主要內容是零指數、負整數指數、分數指數冪的概念與性質。

二、零指數、負整數指數、分數指數冪的意義分別規定如下：

$$a^0=1 \qquad (a\neq 0)$$

$$a^{-m}=\frac{1}{a^m} \quad (a\neq 0\text{，}m\text{是正整數})$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad (a \geq 0\text{，}m\text{、}n\text{ 都是正整數，}n > 1)$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \qquad (a > 0\text{，}m\text{、}n\text{ 都是正整數，}n > 1)$$

這樣，我們把指數概念由正整數範圍推廣到有理數範圍。關於正整數指數冪的運算性質，對於有理數指數冪也適用。而

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \bullet a^{-n} = a^{m+(-n)} \qquad (a > 0)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = (a \bullet b^{-1})^n = a^n \bullet b^{-n} \qquad (a > 0\text{，}b > 0)$$

所以，對於有理數指數冪，運算性質 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ 與 $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ 可以分別被包含在 $a^m \bullet a^n = a^{m+n}$ 與 $(a \bullet b)^n = a^n \bullet b^n$ 之中。正整數指數冪的五個運算性質，對於有理數指數冪來說，可併為三個：

$$a^m \bullet a^n = a^{m+n} \qquad (a > 0\text{，}m\text{、}n\text{ 都是有理數})$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad (a > 0\text{，}m\text{、}n\text{ 都是有理數})$$

$$(ab)^n = a^n b^n \qquad (a > 0\text{、}b > 0\text{，}n\text{ 為有理數})$$

我們還可以規定無理數指數冪的意義(本書略去不講)，把指數概念推廣到實數範圍。關於有理數指數冪的運算性質，對於實數指數冪也同樣適用。

三、所謂科學記數法，就是把一個數寫成絕對值在 1 與 10 之間(可以是 1)的數與 10 的整數次冪之積(即寫成 $\pm a \times 10^n$，其中 n 為整數，a 大於或等於 1 而小於 10)這樣一種方法。

四、分數指數與根式緊密相關。根式有下列性質：

$(\sqrt[n]{a})^n = a$；

當 n 為奇數時，$\sqrt[n]{a^n} = a$；

當 n 為偶數時，$\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$

$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$　　$(a\geq 0)$　(根式的基本性質)；

$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\bullet\sqrt[n]{b}$　　$(a\geq 0$ 、 $b\geq 0)$；

$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$　　$(a\geq 0$ 、 $b>0)$；

$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$　　$(a\geq 0)$；

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$　　$(a\geq 0)$。

根式的加減，就是合併同類根式的過程。根式的乘、除、乘方、開方，一般利用分數指數來進行比較簡便。

複習參考題十二

1. 計算：

(1) $\sqrt{7^2}$ ；　(2) $\sqrt{(-7)^2}$ ；　(3) $\sqrt{(x-y)^2}$　$(x>y)$；

(4) $\left(\sqrt{\dfrac{2}{15}}\right)^2$ ；　(5) $\sqrt{0.49^2}$ ；　(6) $\sqrt{a^2-14a+49}$　$(x<7)$

2. 計算：

(1) $\sqrt{529\times 289}$ ；　(2) $\sqrt{68.89\times 0.0009}$；(3) $\sqrt{65^2-16^2}$ ；

(4) $\sqrt{0.17^2-0.08^2}$ ；(5) $\sqrt{\dfrac{625}{1089}}$ ；　(6) $\sqrt{\dfrac{0.49\times 121}{361\times 0.81}}$ ；

(7) $\sqrt{\dfrac{1.21}{4.41}\times 49}$ ；　(8) $\sqrt{\dfrac{2.25x^6}{0.25y^2}}$　$(x>0$ 、 $y<0)$。

3. 計算：

(1) $3\sqrt{a}+5\sqrt{b^3}+6\sqrt{a^5}-2\sqrt{b}$ ；

(2) $\sqrt{27x}+\sqrt{\dfrac{x}{3}}-\sqrt{0.03x}$ ；　(3) $a\sqrt{\dfrac{b}{a}}+b\sqrt{ab}-b\sqrt{\dfrac{1}{ab}}$ ；

(4) $\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}-\sqrt{xy}+y\sqrt{\dfrac{1}{xy}}-x\sqrt{\dfrac{1}{xy}}$ 。

4. 計算：

(1) $\left(\sqrt{3ab}+\sqrt{\frac{b}{3a}}-\sqrt{\frac{27a}{b}}+\sqrt{\frac{a}{3b}}\right)\bullet\sqrt{3ab}$；

(2) $(3\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{5}+3\sqrt{x})$；　(3) $(m-\sqrt{n})(\sqrt{n}+m)$；

(4) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+y-\sqrt{xy})$；(5) $(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})$

5. 把下列各式的分母有理化：

(1) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$；　(2) $\frac{a}{\sqrt{27a}}$；　(3) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$；

(4) $\frac{ab}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}$；　(5) $\frac{\sqrt{b}-a}{a+\sqrt{b}}$；　(6) $\frac{1-xy}{\sqrt{x}+x\sqrt{y}}$；

(7) $\frac{x-1}{\sqrt{xy}+\sqrt{y}}$；　(8) $\frac{1-xy}{\sqrt{\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{y}}}$。

6. 指出下列各式中的 x：

(1) $35.23=3.523\times10^{x}$；　(2) $3.523\times10^{x}=0.003523$；

(3) $3.523\times10^{x}=35230000$；(4) $3.523\times10^{x}=3.523$。

7. 光的速度每秒約 3×10^{5} km，太陽與地球的距離約是 1.5×10^{8} km，求光從太陽射到地球約需多少時間(保留一個有效數字)。

8. 18 g 水中有 6.02×10^{23} 個水分子，計算一個水分子的重量，用科學記數法表示(保留兩個有效數字)。

9. 下列各是在什麼條件下有意義？

(1) $\sqrt{x}$；　(2) $\sqrt[4]{x-1}$；　(3) $\frac{1}{\sqrt{x}}$；　(4) $\sqrt[3]{-x}$

10. 計算：

(1) $(\sqrt[3]{-3.8})^{3}$；　(2) $\sqrt[3]{-27}$；　(3) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$；　(4) $\sqrt[6]{(-5)^{6}}$；

(5) $\sqrt[4]{(1-a)^{4}}$　($a>1$)；　(6) $\sqrt[8]{(m-n)^{8}}$　($m<n$)。

11. 根據下列條件計算 $a+\sqrt[6]{(a-1)^6}$ ：

(1) $a\geq 1$ ；　　(2) $a<1$ 。

12. 化下列雙重根式為單根式：

(1) $\sqrt{x^{-3}y^2(\sqrt[3]{xy^2})}$ $(y\geq 0)$ ；　　(2) $\sqrt[3]{-2\sqrt{2}}$ 。

13. 計算下列各式：

(1) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$ ；　　(2) $\dfrac{(a+b)^{-1}-(a-b)^{-1}}{(a+b)^{-1}+(a-b)^{-1}}$ ；

(3) $\dfrac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}$ ；　　(4) $\left(\dfrac{e^s+e^{-s}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{e^s-e^{-s}}{2}\right)^2$

(5) $(a^2-2+a^{-2})\div(a^2-a^{-2})$ 。

14. 計算：

(1) $125^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}+343^{\frac{1}{3}}-\left(\dfrac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$ ；

(2) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+(-5.6)^0-\left(2\dfrac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}+0.125^{-\frac{1}{3}}$ ；

(3) $\dfrac{(a^{-2}b^{-3})(-4a^{-1}b)}{12a^{-4}b^{-2}c}$ ；

(4) $(a^2b)^{\frac{1}{2}}\times(ab^2)^{-2}\div\left(\dfrac{b}{a^2}\right)^{-3}$ 。

15. 指出下列各式中的 x：

(1) $5^x=125$ ；　　(2) $4^x=1$ ；

(3) $7^x=\sqrt[3]{7}$ ；　　(4) $\dfrac{1}{8}=2^x$ ；

(5) $\sqrt{3}=3^x$ ；　　(6) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{10}}=10^x$ 。