第十四章　函數及其圖形

一、直角座標系

14.1　平面直角座標系

我們知道，在直線上規定了原點、正方向與單位長度，就構成了數軸。在數軸上，每一個點都能用一個實數來表示，這個實數叫做這個點**在數軸上的座標**。那麼，用什麼方法表示平面內點的位置呢？

要在一塊矩形板上鑽一個孔，只要給出孔的中心到板之左邊的距離 30 mm 與到下邊的距離 20 mm (圖 14-1)，孔心 M 的位置就確定了。可見，用兩個實數就可以表示平面內點的位置。

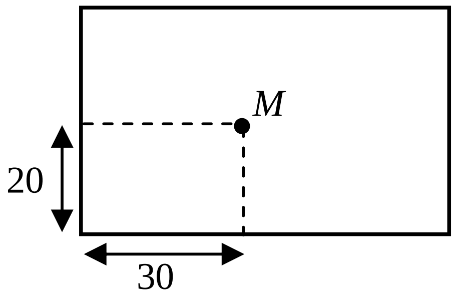


圖 14-1

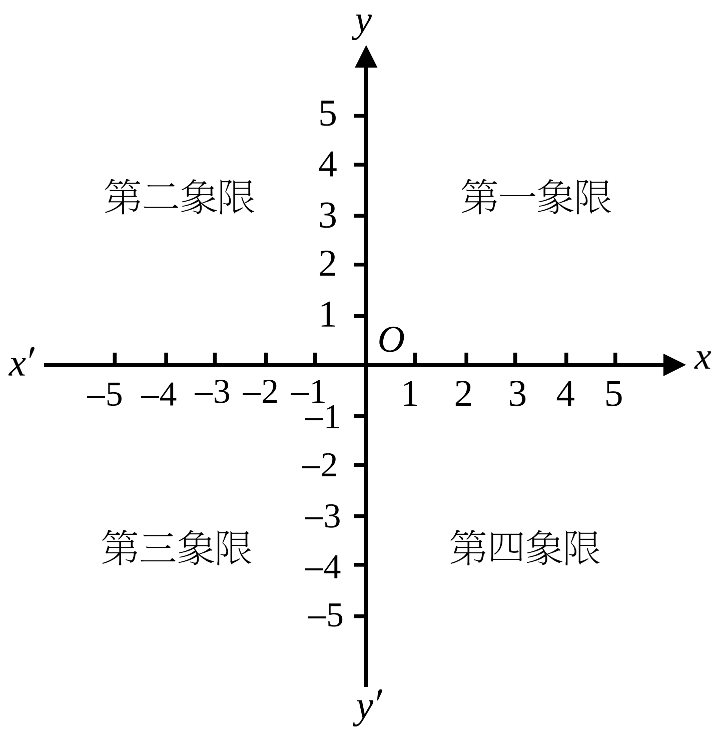


圖 14-2

在平面內畫兩條互相垂直而且有公共原點 O 的數軸 xx' 與 yy' (圖 14-2)。 xx' 通常畫成水平的，叫做 **x 軸**或**橫軸**，取向右的方向為正方向； yy' 通常畫成鉛直的，叫做 **y 軸**或**縱軸**，取向上的方向為正方向。兩條數軸上的單位長度一般取相同的。x 軸與

y 軸統稱**座標軸**，O 叫做**座標原點**。這樣，在平面內有公共原點而且互相垂直的兩條數軸，就構成了**平面直角座標系**，在本書中簡稱**座標系**。建立了座標系的平面，叫做**座標平面**。

x 軸與 y 軸把座標平面分成四個部分 $x\mathrm{O}y$、yOx'、$x'Oy'$、$y'Ox$，依次叫做第一象限、第二象限、第三象限與第四象限。象限以兩軸為界線，x 軸、y 軸上的點不在任一象限內。

在平面內建立了直角座標系以後，對於平面內的任意一點，都有一對有序實數與它對應。例如，對於點 M (圖 14-3)，經過點 M 畫 x 軸的垂線，垂足為 M_1，點 M_1 在 x 軸上的座標是 3；再經過點 M 畫 y 軸的垂線，垂足為 M_2，點 M_2 在 y 軸上的座標是 2。這樣，點 M 就有一對座標 3、2 與它對應。我們把 3 叫做點 M 的**橫座標**、2 叫做點 M 的**縱座標**，合起來叫做點 M **在平面內的座標**，記作 $M(3,\ 2)$，其中橫座標規定寫在縱座標的前面，中間用逗號隔開。這就是說，點 M 在平面內的座標是一對有序實數(叫做一個**有序實數對**)。在圖 14-3 中，點 N 的座標是(2, 3)，記作 $N(2,\ 3)$。從圖中我們可以看到，M 與 N 是座標平面內不同的兩個點，與它們對應的(3, 2)與(2, 3)是兩對不同的有序實數，因此它們具有不同的座標。

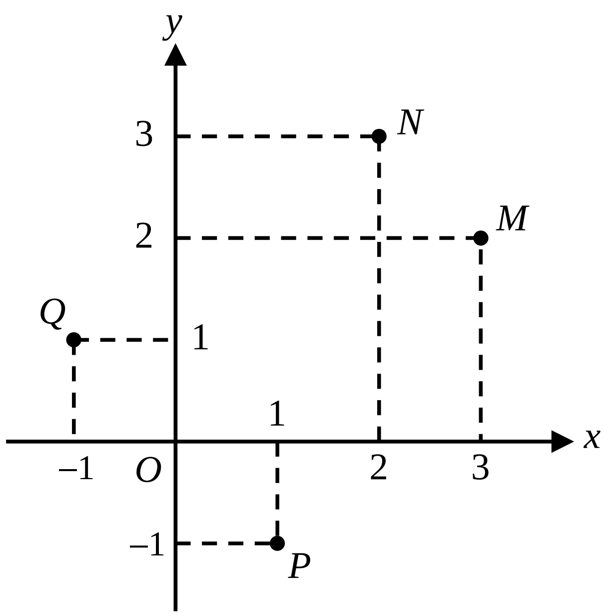


圖 14-3

想一想，在圖 14-3 裡點 P 與點 Q 的座標各是什麼。

反過來，對於任意一對有序實數，在座標平面內都有一個確定的點與它對應，這個點在平面內的座標就是這一對有序實數。例如，給出有序實數對$(-3,\ -2)$，我們就可以經過 x 軸上座標為 -3 的點畫 x 軸之垂線，經過 y 軸上座標為 -2 的點畫 y 軸之垂線，這兩條線的交點 A 就是與有序實數對$(-3,\ -2)$對應的點(圖

14-4)，同樣，與有序實數對(3, 2)、(2.5, –1)、(–2, 0)、(0, 0)對應的點分別是 B、C、D、O。

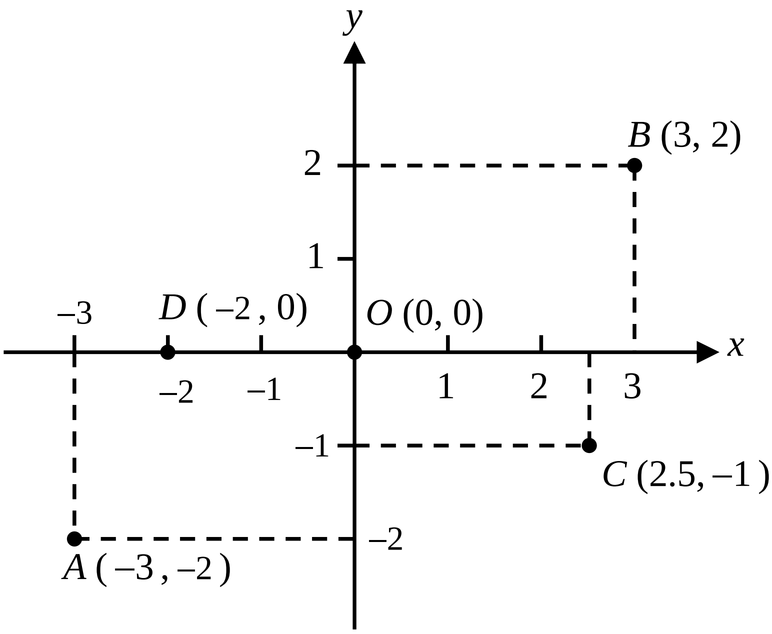


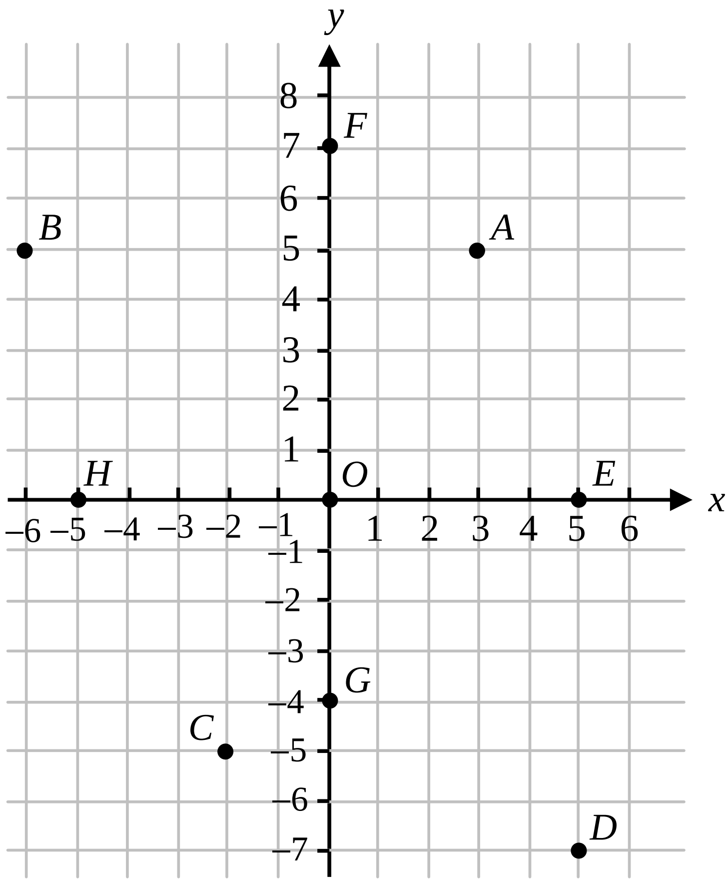
圖 14-4

從上面我們看到：對於座標平面內任意一點 M，都有一對有序實數 (x, y) 與它對應；反過來，對於任意一對有序實數 (x, y)，在座標平面內部都有一點 M 與它對應。因此座標平面內所有的點與所有有序實數對之間是一一對應的。

練 習

1. 寫出圖中 A、B、C、D、E、F、G、H、O 各點的座標。

2. 在直角座標系中描出下列各點：
$A(3, 6)$、$B(-1.5, 3.5)$、$C(-4, -1)$、$D(2, -3)$、$E(3, 0)$、$F(-2, 0)$、$G(0, 5)$、$H(0, -4)$。



(第 1 題)

【例 1】 在座標平面內，

(1) x 軸上的點之縱座標有什麼特點？

(2) y 軸上的點之橫座標有什麼特點？

解 (1) 如圖 14-5，在 x 軸上任取一點 P。經過點 P 畫 y 軸的垂線，垂足是原點 $O(0, 0)$。點 O 在 y 軸上的座標都是 0，所以點 P 的縱座標是 0。這就是說，x 軸上的點之縱座標都是 0。

(2) 同理可知，y 軸上的點之橫座標都是 0。

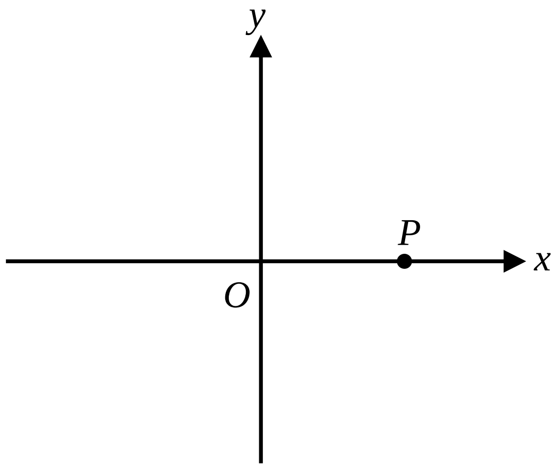


圖 14-5

【例 2】 如圖 14-6，已知正方形 $ABCD$ 的邊長等於 4，求四個頂點的座標。

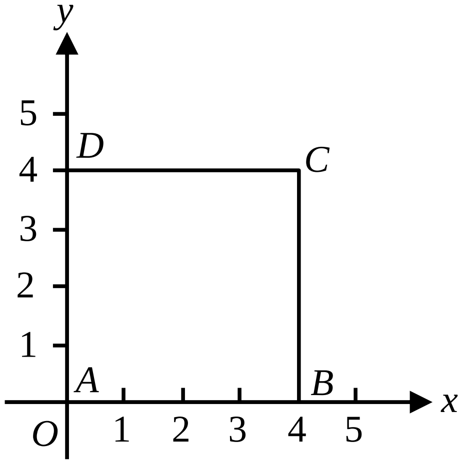


圖 14-6

解 四個頂點的座標分別為

$A(0, 0)$、$B(4, 0)$、$C(4, 4)$、$D(0, 4)$。

練 習

1. 寫出例 2 正方形各邊中點的座標。
2. 已知正方形的邊長等於 4，對角線的交點在原點，邊與座標軸平行，求它的各頂點之座標。
3. 已知點 P 的座標是$(5,-3)$，分別寫出點 P 關於 x 軸、y 軸與原點對稱的點之座標。
4. 以點(3, 0)為圓心，以 5 為半徑畫一圓，寫出圓與座標軸交點的座標。

14.2 兩點間的距離

在座標平面內，我們用點的座標表示點之位置。現在來研究怎樣用兩點的座標來表示這兩點間的距離。

1. 同一數軸上兩點間的距離

圖 14-7 是一條數軸，數軸上的點 A、B、C、D 的座標分別是 7、2、-3、-7。我們來看一看數軸上任意兩點間的距離(也就是連結這兩點的線段之長度)能不能用這兩點的座標來表示。

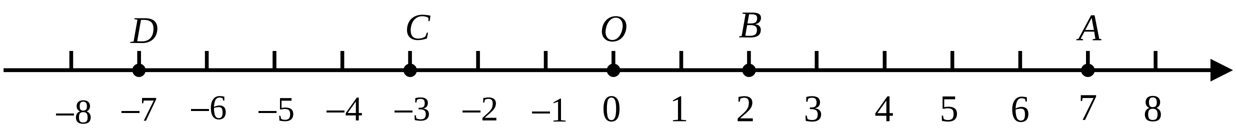


圖 14-7

由圖 14-7 可以看出，線段 BA、OA、OB 之間有 $BA=OA-OB$ 的關係。因為 OA=7、OB=2，所以 $BA=7-2$。但 7、2 分別是點 A、B 在數軸上的座標，這就是說，線段 BA 的長度等於點 A 的座標減去點 B 的座標。我們知道，$7-2=|7-2|=|2-7|$，所以利用絕對值符號，我們可以說，線段 AB 的長度(也就是點 A 與 B 之間的距離)等於 A、B 兩點的座標之差的絕對值。類似地，

$$CB=OB+CO=2+3=|2-(-3)|=|(-3)-2|$$

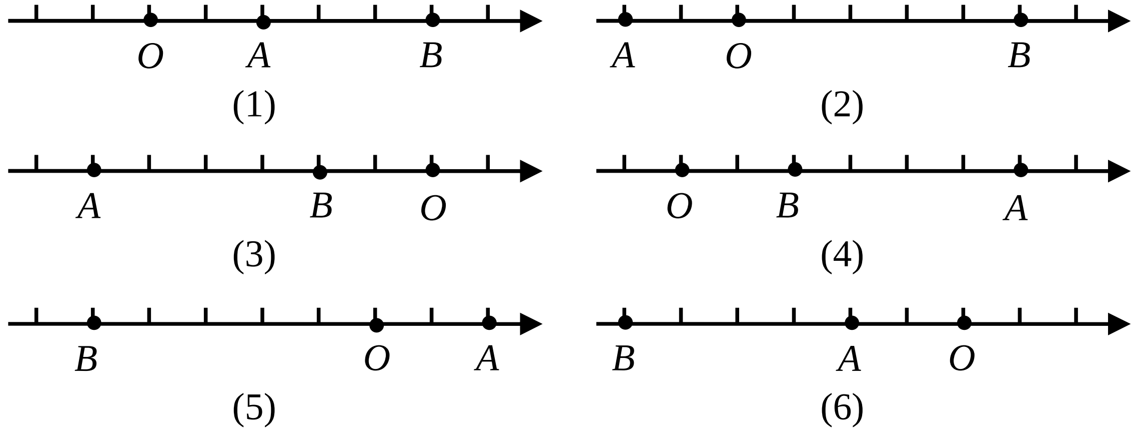
$$DC=DO-CO=7-3=|(-7)-(-3)|=|(-3)-(-7)|$$

一般地，**數軸上任意兩點間的距離，等於這兩點的座標之差的絕對值**。也就是說，如果數軸上 A、B 兩點的座標分別為 x_A、x_B，那麼 ***A*、*B* 兩點間的距離公式**為

$$\boldsymbol{AB = |x_B - x_A|}$$

練 習

1. 在(1)到(6)各圖(數軸上每一格等於一個單位長度)中，就線段 AB 填寫下表：



(第 1 題)

圖號	x_A	x_B	$x_B - x_A$	AB 的長度
(1)				
(2)				
(3)				
(4)				
(5)	2	–5	–7	7
(6)				

2. 已知數軸上的點 A、B、C、D 的座標分別是 –5、7、–2、3，求點 A 與 B、B 與 C、C 與 D、C 與 A 之間的距離？

2. 平面內任意兩點間的距離

設 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$是座標平面內的任意兩點(圖 14-8)，從點 P_1、P_2 分別畫 x 軸的垂線 P_1M_1、P_2M_2，與 x 軸分別交於點

$M_1(x_1, 0)$、$M_2(x_2, 0)$。再從點 P_1、P_2 分別畫 y 軸的垂線 P_1N_1、P_2N_2，與 y 軸分別交於點 $N_1(0, y_1)$、$N_2(0, y_2)$。直線 P_1N_1 與 P_2M_2 相交於點 Q。

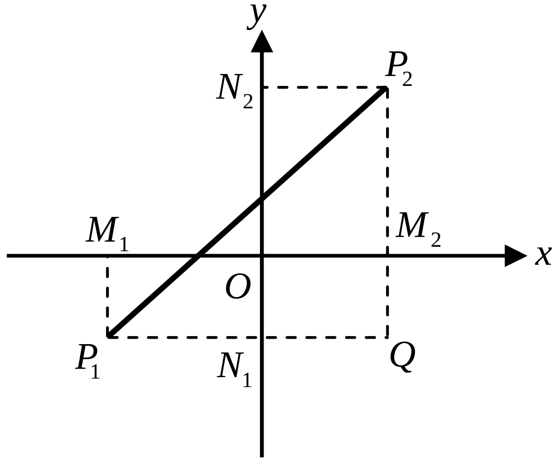


圖 14-8

因為△P_1QP_2 是直角三角形，根據勾股定理，得

$$P_1P_2^2 = P_1Q^2 + QP_2^2$$

$$\because \quad P_1Q = M_1M_2 = |x_2 - x_1|$$

$$QP_2 = N_1N_2 = |y_2 - y_1|$$

$$\therefore \quad P_1P_2^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

由此得到 $\boldsymbol{P_1(x_1, y_1)}$、$\boldsymbol{P_2(x_2, y_2)}$**兩點間的距離公式**：

$$\boxed{\boldsymbol{P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}}$$

【例 1】 求兩點 $P_1(-3, 5)$、$P_2(1, 2)$間的距離。

解 $x_1 = -3$、$y_1 = 5$；$x_2 = 1$、$y_2 = 2$。

代入兩點間的距離公式，得

$$P_1P_2 = \sqrt{[1-(-3)]^2 + (2-5)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

【例 2】 在圖 14-9 給出的零件圖上(如果沒有特別註明，本書中零件圖上的尺寸都是 mm)，選擇如圖 14-10 所示的座標系，分別求孔心 A、B 及 B、C 間的距離(精確到 0.01 mm)。

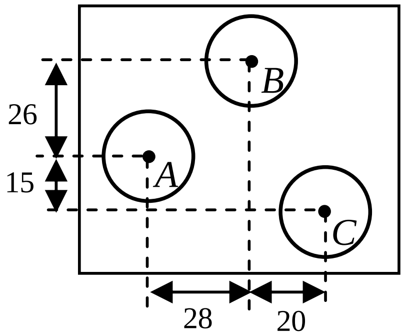


圖 14-9

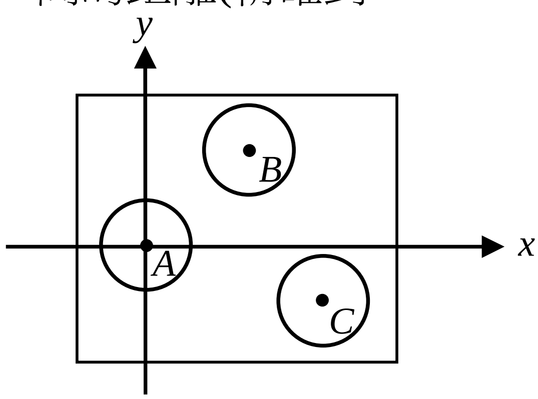


圖 14-10

解　孔心的座標是 $A(0, 0)$、$B(28, 26)$、$C(48, -15)$。

將點的座標代入兩點間之距離公式，得

$$AB = \sqrt{(28-0)^2 + (26-0)^2} = \sqrt{1460} \approx 38.21$$

$$BC = \sqrt{(48-28)^2 + (-15-26)^2} = \sqrt{2081} \approx 45.62$$

即孔心 A、B 間的距離約是 38.21 mm，B、C 間的距離約是 45.62 mm。

練　習

1. 求下列兩點間的距離：

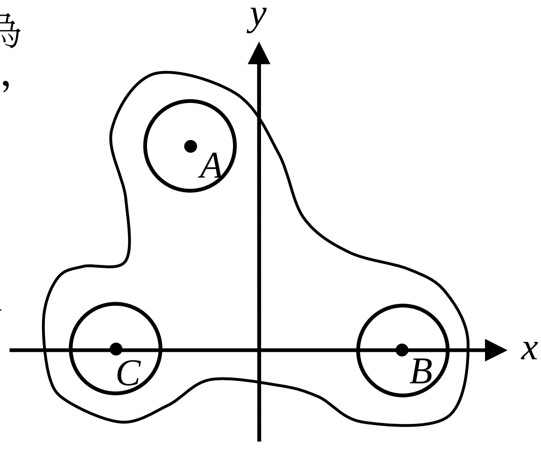
   (1) $P_1(-1, 0)$、$P_2(2, 0)$；　(2) $P_1(0, 6)$、$P_2(0, -2)$；

   (3) $A(-2, 0)$、$B(-4, 3)$；　(4) $A(2, -5)$、$C(2, 3)$；

   (5) $M(-3, 8)$、$N(-1, -2)$；　(6) $O(0, 0)$、$P(2, -3)$。

2. 如圖，已知零件圖上孔心的座標為 $A(-20, 50)$、$B(40, 0)$、$C(-40, 0)$，求每兩孔中心間的距離 (精確到 0.01 mm)。

3. 甲船在某港口東 50 km、北 30 km 處，乙船在同一港口東 17 km、南 26 km 處。選擇座標系求甲、乙兩船間的距離。

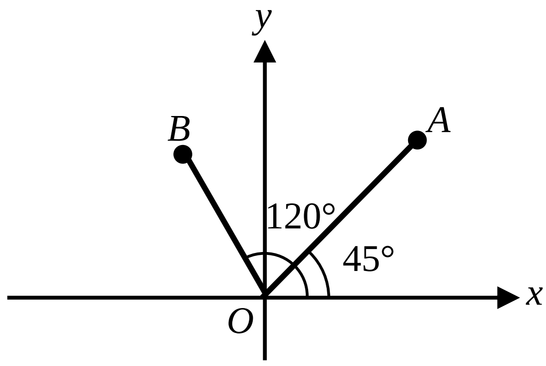


(第 2 題)

習　題　三

1. 描出橫座標 x 分別等於 -4、-3、-2、-1、0、1、2、3、4，縱座標 y 由方程 $y = x^2$ 決定的各點，並且用光滑曲線把各點依序連結起來。

2. 如圖，$OA=8$、$OB=6$，求點 A、B 的座標。



(第 2 題)

3. (1) 點 $P(x, y)$在第一象限內，x、y 應取什麼符號？
   (2) 點 $Q(x, y)$在第三象限內，x、y 應取什麼符號？

4. 在第一象限內兩條座標軸夾角平分線上的點，它們的橫座標與縱座標之間有什麼關係？在第二象限內呢？

5. 一個菱形每邊的長是 5，一條對角線的長是 6，取兩條對角線所在的直線作為座標軸，求四個頂點的座標(有兩種情況)。

6. 寫出點 $P(a, b)$關於座標軸及原點的對稱點之座標。

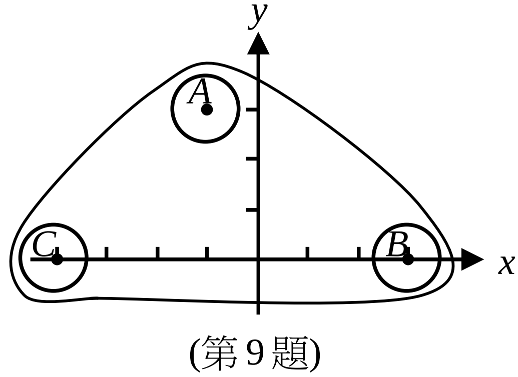
7. 已知數軸上兩點 A、B 的座標 x_A、x_B 取下列各值，求 A、B 間的距離。

   (1) $x_A=8$、$x_B=6$；　　(2) $x_A=2$、$x_B=-1$；
   (3) $x_A=-3$、$x_B=0$；　　(4) $x_A=0$、$x_B=-8$。

8. 在下列各題中，分別以 A、B、C 三點為頂點畫三角形，求三角形各邊的長，並判別所畫出的三角形中哪些是等腰三角形，那些是等邊三角形，哪些是直角三角形。

   (1) $A(-3, 0)$、$B(3, 0)$、$C(0, 3\sqrt{3})$；
   (2) $A(-4, 3)$、$B(2, -5)$、$C(0, 6)$；
   (3) $A(5, 1)$、$B(2, -2)$、$C(2.5, 0.5)$；
   (4) $A(3, 0)$、$B(6, 4)$、$C(-1, 3)$。

9. 在製造如圖所示的零件時，需要知道三個孔心間的距離。現已知三個孔心座標為 $A(-10, 30)$、$B(30, 0)$、$C(-40, 0)$，求孔心間的距離。



(第 9 題)

二、函數

14.3 函數

1. 常量與變量

看下面的例子：

(1) 火車以 60 km/小時的速度行駛，它走過的路程 s (km)與時間 t (小時)之間的關係是 $s=60t$ 。

(2) 一個圓的面積 A (cm^2)與它的半徑 r (cm)之間的關係是 $A=\pi r^2$ 。

可以看出：在例(1)中，利用公式 $s=60t$ 計算火車在不同的時間內所走過之路程時，t、s 可以取不同的數值，而速度的數值保持不變；在例(2)中，利用公式 $A=\pi r^2$ 計算不同半徑的圓之面積時，r、A 可以取不同的數值，而 π 的數值保持不變。

在某一過程中可以取不同數值的量，叫做**變量**，如上面例子中的 t 小時、s 公里、r cm、A cm^2。在過程中保持同一數值的量或數，叫做**常量**或**常數**，如上例中的 60 km/小時是常量，π 是常數。常量與變量是對某一過程來說的，是相對的。在例(1)中速度是常量，路程與時間都是變量；如果在同一時間內，研究路程與速度之間的對應關係，那麼時間是常量，路程與速度是變量。

2. 函數

在上面的例(1)中，時間 t 的值可以在非負實數(即正實數與零)的範圍內任意選取，對於 t 的每一個確定之值，路程 s 都有唯一確定的值與它對應，如：

t (小時)	1	1.5	2	2.5	3	$\cdots$
s (km)	60	90	120	150	180	$\cdots$

同樣，在例(2)中，半徑 r 的值可以在正實數範圍內任意選取，

對於半徑 r 的每一個確定之值，圓面積 A 都有唯一確定的值與它對應。

這種變量之間的對應關係，在工農業生產與科學實驗中大量存在。除了例(1)、例(2)以外，又如：

(3) 某水庫的存水量 Q 與水深 h (指最深處的水深)之間的對應關係，經過測量如下表所示：

水深 h (m)	0	5	10	15	20	25	30	35
存水量 Q (萬 m^3)	0	20	40	90	160	275	437.5	650

有了這張表後，水深 h 的值可以在表內第一行各值中任意選取，對於 h 的每一個確定之值，存水量 Q 都有唯一確定的值與它對應。例如：$h=20$ (m)時，$Q=160$ (萬 m^3)；$h=30$ (m)時，$Q=437.5$ (萬 m^3)。

(4) 圖 14-11 是某氣象站用自動溫度記錄儀描下的表示某一天氣溫變化情況的曲線。

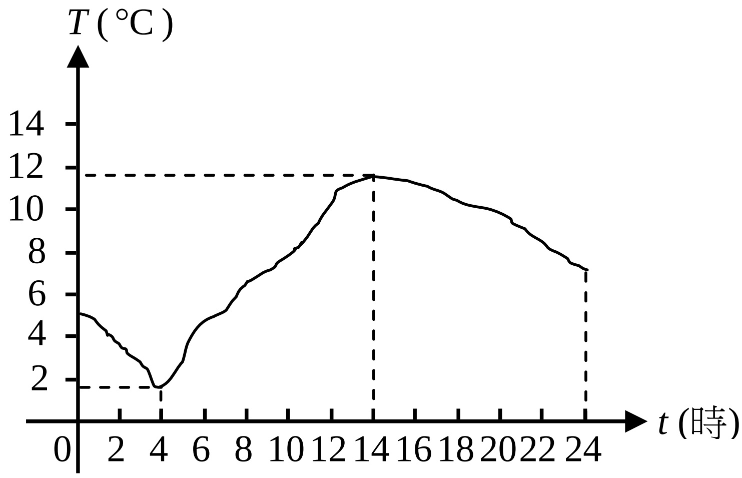


圖 14-11

圖 14-11 形象地反映了變量 T 與 t 之間的對應關係。有了這幅圖後，時間 t 的值可以在 0 到 24 之範圍內任意選取，對於時間 t 的每一個確定之值，氣溫 T 都有唯一確定的值與它對應。例如：$t=4$ (時)時，$T=1.8$ (°C)；$t=14$ (時)時，$T=11.8$ (°C)。

設在某變化過程中有兩個變量 x、y，如果對於 x 在某一範圍內的每一個確定之值，y 都有唯一確定的值與它對應，那麼就說 y 是 x 的**函數**，x 叫做**自變量**。例如，路程 s 是時間 t 的函數，圓

面積 A 是半徑 r 的函數，存水量 Q 是水深 h 的函數，氣溫 T 是時間 t 的函數。

我們看到，$60t$ 與 πr^2 都是含一個字母的代數式。一般地說，含一個字母的代數式之值，是由這個字母所取的值確定的；這個字母的值，只要不使代數式與實際問題失去意義，可以任意選取。對於這個字母的每一個確定之值，代數式都有唯一確定的值與它對應。因此，每一個含一個字母的代數式都是這個字母的函數。例如，$x-2$ 是 x 的函數，$\dfrac{1}{1-u^2}$ 是 u 的函數，$\dfrac{1}{\sqrt{t^2-5}}$ 是 t 的函數，等等。

【例 1】 求下列函數中自變量 x 的取值範圍：

(1) $y=2x+3$； (2) $y=-3x^2$；

(3) $y=\dfrac{1}{x-1}$； (4) $y=\sqrt{x-2}$。

$\boxed{\text{解}}$

(1) x 取任意實數，$2x+3$ 都有意義。因此 x 的取值範圍是全體實數。

(2) x 取任意實數，$-3x^2$ 都有意義。因此 x 的取值範圍是全體實數。

(3) $x=1$ 時，$\dfrac{1}{x-1}$ 沒有意義；$x\neq 1$ 時，$\dfrac{1}{x-1}$ 都有意義。因此 x 的取值範圍是所有不等於 1 的實數。

(4) $x<2$ 時，$\sqrt{x-2}$ 沒有意義；$x\geq 2$ 時，$\sqrt{x-2}$ 都有意義。因此 x 的取值範圍是所有大於或等於 2 的實數，即 $x\geq 2$。

注意： 在函數 $A=\pi r^2$ 中，如果僅從代數式考慮，πr^2 中字母 r 的取值範圍可以是全體實數，但從實際問題考慮，πr^2 中的 r 表示圓的半徑，那麼它的取值範圍就只能是大於零的實數，即 $r>0$。所以遇到實際問題時，確定函數的自變量取值範圍，必須使實際問題也有意義。

【例 2】 在例 1 中，求當 $x=2$ 時函數 y 的對應值。

分析： 例 1 中的函數當 $x=2$ 時都有意義，只要用 2 代替式中的 x，就可得到 y 的對應值。

$\boxed{\text{解}}$ (1) $y=2\times 2+3=7$；

(2) $y=-3\times 2^2=-12$；

(3) $y=\dfrac{1}{2-1}=1$；

(4) $y=\sqrt{2-2}=0$。

對於自變量在取值範圍內的一個確定之值，例如 $x=a$，函數有唯一確定的對應值。這個對應值，我們叫做當 $x=a$ 時的函數之值，簡稱**函數值**。如例 2，就是求當 $x=2$ 時的函數值。

練　習

1. (口答) 在下面的等式裡，有哪些變量、常量或常數？
   (1) 等速運動公式 $s=vt$，這裡 v 表示速度、t 表示時間、s 表示在時間 t 內所走的路程；
   (2) 球體積公式 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$，這裡 r 表示球的半徑、V 表示半徑是 r 的球之體積；
   (3) 正 n 邊形的內角 α 與邊數 n 之間的對應關係：
   $$\alpha=\frac{(n-2)180^\circ}{n}。$$
2. 求下列函數中自變量 x 的取值範圍：
   (1) $y=\dfrac{x-1}{2}$；　(2) $y=\dfrac{3}{x-4}$；
   (3) $y=-\sqrt{x-5}$；　(4) $y=\dfrac{1}{x^2-x-2}$。
3. 在第 2 題中求當 $x=9$、$x=30$ 的函數值。

14.4　函數的表示法

表示函數的方法，最常用的有以下三種。

1.　解析法　就是用等式來表達一個變量是另一個變量的函數。這個等式叫做函數的**解析表達式**(或**函數關係式**)，簡稱解析式，例如 $s=60t$、$A=\pi r^2$、$y=\sqrt{x-2}$、$V=\frac{4}{3}\pi r^3$、$s=\frac{1}{1-u^2}$、$z=\frac{1}{\sqrt{t^2-5}}$ 等等。

2.　列表法　就是列出表格來表示一個變量是另一個變量的函數。如第 14.3 節例(3)中的水庫存水量與水深的對照表，以及平方表、平方根表、對數表等數學用表，都是用列表法來表示函數的。

3.　圖形法　把自變量 x 的一個值與函數 y 之對應值分別作為點的橫座標與縱座標，可以在直角座標系內描出一個點，所有這些點的集合，叫做這個函數的**圖形**。圖形法就是用圖形來表示一個變量是另一個變量的函數。如第 14.3 節例(4)中的氣溫隨時間之變化圖。

知道函數的解析式，要畫函數的圖形，一般分為**列表**、**描點**、**連線**三個步驟，即先列出自變量與函數的一些對應值，用這些對應值為座標，描出圖形上的一些點，然後用一條或幾條平滑曲線(包括直線)，按照自變量由小到大的順序，把所描的點連結起來。這種畫函數圖形的方法叫做**描點法**。顯然，用描點法所畫的圖形一般是近似的、部分的，要使畫出的圖形更精確，需要描出圖形上更多的點。

【例 1】 畫出函數 $y=\frac{1}{8}x^3$ 的圖形。

$\boxed{\text{解}}$　1.　列表。在 x 的取值範圍內取一些值，算出 y 的對應值，列成下表：

x	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
$y=\frac{1}{8}x^3$	$\cdots$	-8	-3.38	-1	-0.13	0	0.13	1	3.38	8	$\cdots$

2.　描點。根據表裡這些對應值，在座標系內描點。

3.　連線。用平滑曲線，按自變量由小到大的順序，把所描的點連結起來，就是函數 $y=\frac{1}{8}x^3$ 的圖形(圖 14-12)。

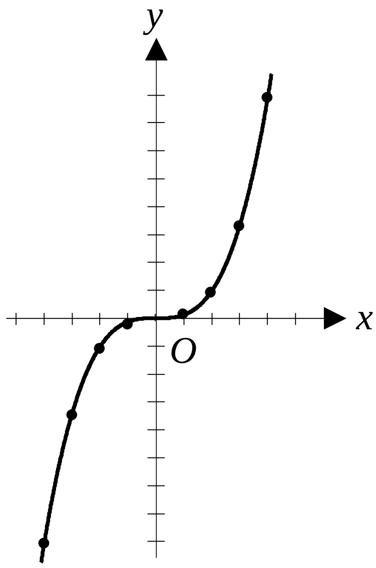


圖 14-12

練　習

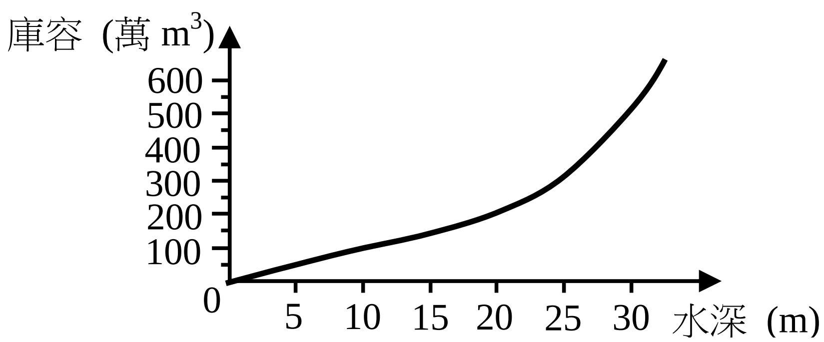
1.　用解析式表示下列函數：

(1)　如果每升高 100 m，氣溫就下降 0.6 °C，求氣溫降低數 T (°C)與高度增加數 h (km)之間的函數關係式；

(2)　某工廠現有煤 1500 T，求這些煤能用的天數 y 與這家工廠每天平均用煤的 T 數 x 之間的函數關係式。

2.　根據某水庫的水深-庫容曲線圖，填寫下表：

水深(m)	5	10	15	20	25
庫容(萬 m^3)					



(第 2 題)

3.　畫出下列函數的圖形：

(1)　$y=x$；　　　　(2)　$y=x+1$。

習　題　四

1. 按照下列程序寫出 y 與 x 之間的函數關係式：

(1) $\boxed{輸入\ x} \longrightarrow \boxed{\times 3} \longrightarrow \boxed{-1} \longrightarrow \boxed{輸出\ y}$

(2) $\boxed{輸入\ x} \longrightarrow \boxed{-2} \longrightarrow \boxed{\times 3} \longrightarrow \boxed{+1} \longrightarrow \boxed{輸出\ y}$

2. 求下列函數中自變量 x 的取值範圍：

(1) $y = 3x^2 - 5x + \sqrt{3}$；　　(2) $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$；

(3) $y = \dfrac{x+1}{x^2 - x - 6}$；　　(4) $y = \dfrac{3x}{4x^2 - 9}$；

(5) $y = \sqrt{2x-5}$；　　(6) $y = x + \sqrt{x+2}$；

(7) $y = \dfrac{x+2}{x^2 + 5x + 6}$。

3. 已知函數 $y = x^2 - 3x + 4$，填表：

x	-2	-1	0	1	$1\frac{1}{2}$	2	3	4
y								

4. 已知函數 $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$，求當 $x = 3$、-4、0、$-\dfrac{1}{2}$、$\sqrt{2}$ 時的函數值。當 $x = a^2 + 3$ 時，y 等於多少？

5. 已知函數 $y = 2x^2 - 5x + 3$，求當 $x = 0$、2 時的函數值。x 取什麼值時函數值為 0？

6. 一個銅球在 0°C 時的體積是 $1000\ \text{cm}^3$，加熱後溫度每增加 1°C，體積增加 $0.051\ \text{cm}^3$。用解析式表示體積 V 是溫度 T 的函數，並根據列出的解析式計算銅球加熱到 200°C 時的體積。

7. 用解析式將等腰三角形頂角的度數 y，表示為底角的度數 x 之函數，並求自變量 x 的取值範圍。

8. 已知 x、y 滿足下列等式，用 x 的代數式表示 y：

(1) $2x+4y=12$；　　(2) $xy=15$；

(3) $(x-2)(y+3)=-6$；　　(4) $x=\dfrac{3y+2}{4y-3}$；

(5) $y^2=4x$ $(y\geq 0)$；　　(6) $y-\dfrac{2}{3}x=0$。

9. 已知函數 $y=ax+b$ (a、b 都是常數)，並且當 $x=1$時 $y=7$，當 $x=2$時 $y=16$。確定 a、b 的值：

10. 測得某一彈簧的長度 y 與懸掛的重量 x 有下面的一組對應值：

x (kg)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y (cm)	12	12.5	13	13.5	14	14.5	15	15.5	16

假定 y 與 x 之間的函數關係式是 $y=ax+b$ (a、b 都是常數)，利用表中任意兩對對應值來確定 a、b 的值，再用表中其它數據來進行檢驗。

11. 下表示某天一晝夜間溫度變化的紀錄：

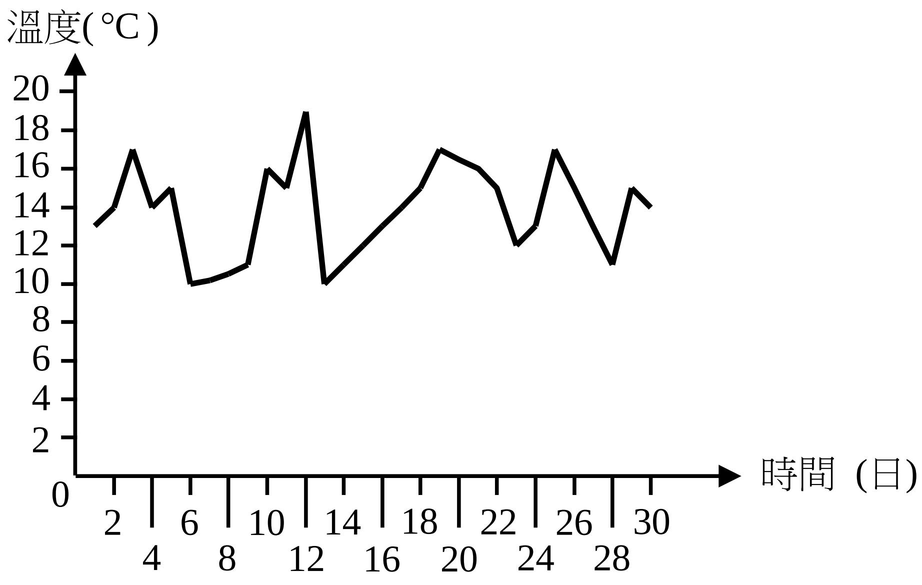
時間 (時)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
溫度 (°C)	–2	–3	–4	0	4	7	9	10	8.5	7	3.5	1	–1

根據這個表，畫出反應這一晝夜間溫度變化情況的曲線。

12. 下圖是某個地區某月中的日平均溫度變化之圖形，根據這個圖形說明：

(1) 這個月中最高與最低的日平均溫度各是多少；

(2) 這個月中日平均溫度變化的幅度是多大。



(第 12 題)

13. 畫出下列函數的圖形：

(1) $y = 4x$ ；　　(2) $y = 3x + 1$ ；

(3) $y = -2x^2$ ；　　(4) $y = 2x^2 - 1$ 。

三、正比例函數與反比例函數

14.5　正比例函數及其圖形

1.　正比例函數

看下面的例子：

(1)　在一塊地裡施用肥料，每公畝用肥料 1.5 kg。那麼所需這種肥料的總量 y (kg)與這塊地的面積 x (公畝)之間的函數關係式是

$$y = 1.5x \text{ 。}$$

(2)　銅的比重是 8.9 g/cm^3，銅的重量 W(g)與體積 V(cm^3)之間的函數關係式是

$$W = 8.9V \text{ 。}$$

例(1)中的變量 y 與變量 x 的相應值之比例 $\frac{y}{x}$ 是一個常數(等於 1.5)。同樣，例(2)中的 W 與 V 之間也有這種性質。在算術中，我們把具有這種性質的兩個量叫做正比例。在這裡，我們把 $y=1.5x$ 、 $W=8.9V$ 這樣的函數都叫做正比例函數。

一般地，函數 $y=kx$ (k 是一個不等於零的常數，無論正或負)叫做**正比例函數**(這時我們說 y 與 x **成正比例**)，常數 k 叫做變量 y 與 x 之間的**比例係數**。在算術中，k 只能取正數，現在我們把它推廣到也可以取負數。確定了比例係數 k，就可以確定一個正比例函數。

【例 1】 圓的周長 C 與圓的半徑 r 之間成正比例。已知 $r=2$ (單位：cm。下同)時， $C=12.56$ 。

(1) 求周長 C 與半徑 r 之間的函數關係式；

(2) 求半徑為 3.5 的圓之周長。

解 (1) 因為 C 與 r 成正比例，所以

$$C=kr \text{ 。}$$

把 $r=2$ 、 $C=12.56$ 代入，得

$$12.56=2k$$

$$k=6.28$$

$$\therefore \quad C=6.28r$$

(2) $r=3.5$ 時，

$$C=6.28\times3.5=21.98 \text{ 。}$$

2. 正比例函數的圖形

我們來畫函數 $y=2x$ 的圖形。

在 x 的取值範圍內取一些值，算出 y 的對應值，列表如下：

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
y	$\cdots$	-4	-2	0	2	4	$\cdots$

用表裡各組對應值作為點的座標，描出各個點，並且把它們依序連結起來。可以看到函數 $y=2x$ 的圖形是經過 $O(0,0)$、$A(1,2)$ 這兩點的一條直線(圖 14-13)。

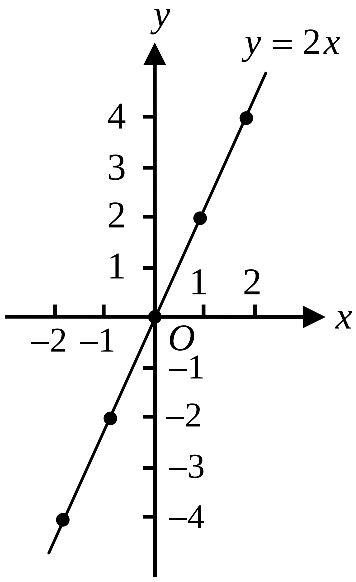


圖 14-13

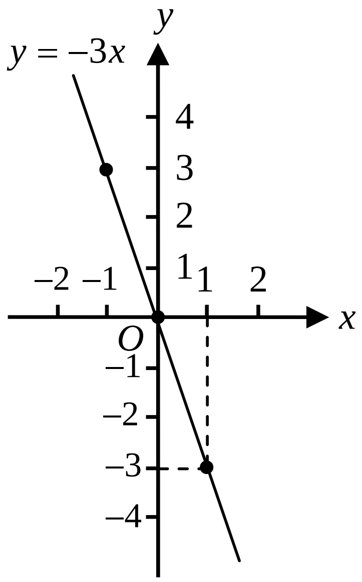


圖 14-14

同樣可以知道，$y=-3x$ 的圖形是經過 $O(0,0)$、$B(1,-3)$ 這兩點的一條直線(圖 14-14)。

一般地，正比例函數 $y=kx$ 的圖形是經過 $O(0,0)$、$A(1,k)$ 這兩點的一條直線。我們以後把正比例函數 $y=kx$ 的圖形叫做直線 $y=kx$。

由於直線的位置可以由直線上之任意兩點唯一確定，我們在以後畫正比例函數 $y=kx$ 的圖形時，可以不用描點法，只要選取兩點連成直線就行了。我們通常取 $O(0,0)$、$A(1,k)$ 這兩點。

【例 2】 在同一平面直角座標系內，分別畫出下列函數的圖形：

$$y=2x \text{、} y=x \text{、} y=\frac{1}{2}x \text{。}$$

解　因 $O(0,0)$、$A(1,2)$ 是直線 $y=2x$ 上的點，故過這兩點畫一條直線，即得函數 $y=2x$ 的圖形。同理，過 $O(0,0)$、$B(1,1)$ 的直線是函數 $y=x$ 的圖形；過 $O(0,0)$、$C(1,\frac{1}{2})$

的直線是函數 $y=\dfrac{1}{2}x$ 的圖形(圖 14-15)。

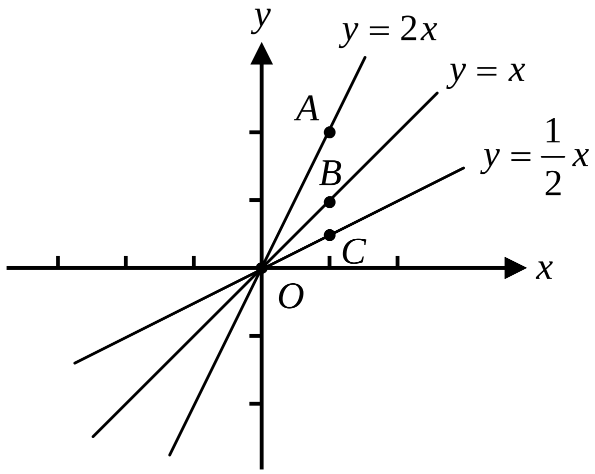


圖 14-15

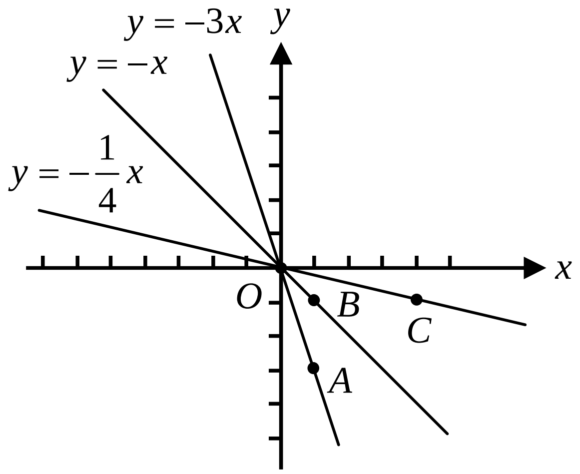


圖 14-16

【例 3】 在同一平面直角座標系內，分別畫出下列函數的圖形：

$$y=-3x \text{、} y=-x \text{、} y=-\frac{1}{4}x \text{。}$$

$\boxed{解}$ 過 $O(0,0)$、$A(1,-3)$兩點畫一條直線，即得函數 $y=-3x$ 的圖形。過 $O(0,0)$、$B(2,-2)$ 兩點畫一條直線，即得函數 $y=-x$ 的圖形。同理，過 $O(0,\ 0)$、$C(4,-1)$的直線是函數 $y=-\dfrac{1}{4}x$ 的圖形(圖 14-16)。

由圖 14-15 與圖 14-16，我們可以看出，**正比例函數 $y=kx$ 有下列性質：**

當 $k>0$ 時，它的圖形在第一、三象限內，y 隨著 x 的增大而增大；當 $k<0$ 時，它的圖形在第二、四象限內，y 隨著 x 的增大而減小。

練　習

1. (口答) 下列函數(其中 x 是自變量)中，哪些是正比例函數？哪些不是？為什麼？

 (1) $y=-8x$； (2) $y=\dfrac{-8}{x}$； (3) $y=8x^2$； (4) $y=8x+1$。

練　習

2. 圓的面積 A 是不是半徑 r 的正比例函數？
3. 已知變量 y 與 x 成正比例，並且 $x=2$ 時，$y=15$，求 y 與 x 之間的比例係數，並寫出 y 與 x 之間的函數關係式。
4. 在同一座標系內，畫出下列函數的圖形：

$$y=\frac{2}{3}x\text{、}y=-\frac{2}{3}x\text{、}y=\frac{3}{2}x\text{、}y=-\frac{3}{2}x\text{。}$$

14.6　反比例函數及其圖形

看下面的例子：

(1)　矩形的面積是 12 cm^2，這時底 y (cm)與高 x (cm)之間的函數關係式是

$$y=\frac{12}{x}\text{。}$$

(2)　走 25 km 的路程，所需時間 t (小時)與平均速度 v (km/小時)之間的函數關係式是

$$t=\frac{25}{v}\text{。}$$

例(1)中的兩個變量 y 與 x 之積是一個常數(等於 12)。同樣，例(2)中的兩個變量 t 與 v 之間也有這種性質。在算術中，我們說具有這種性質的兩個量成反比例。在這裡，我們把 $y=\frac{12}{x}$、$t=\frac{25}{v}$ 這樣的函數都叫做反比例函數。

一般地，函數 $y=\frac{k}{x}$ (k 是一個不等於零的常數，無論正或負)叫做**反比例函數**(這時我們說 y 與 x **成反比例**)。在算術中，k 只能取正數，現在我們把它推廣到也可以取負數。確定了 k 的值，就可以確定一個反比例函數。

【例 1】 已知圓柱體積不變，且當它的高 $h = 12.5\,\text{cm}$ 時，底面積 $S = 20\,\text{cm}^2$。

(1) 求 S 與 h 的函數關係式；

(2) 求當高 $h = 5\,\text{cm}$ 時的底面積 S。

解 (1) 圓柱體積不變時，它的底面積 S 與高 h 成反比例，所以

$$S = \frac{k}{h}\text{。}$$

把 $h = 12.5$、$S = 20$ 代入，得

$$20 = \frac{k}{12.5}$$

$$k = 250$$

答：所求的函數關係式是 $S = \dfrac{250}{h}$

(2) 當 $h = 5\,\text{cm}$ 時，

$$S = \frac{250}{h} = \frac{250}{5} = 50\,(\text{cm}^2)$$

答：高是 5 cm 時，底面積是 50 cm^2

2. 反比例函數的圖形

【例 2】 畫出反比例函數 $y = \dfrac{6}{x}$ 與 $y = -\dfrac{6}{x}$ 的圖形。

解 第一個函數的自變量 x 之取值範圍是所有非零實數。在這個範圍內選取 x 的一些值，算出 y 的對應值，列表如下：

x	$\cdots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
y	$\cdots$	-1	-1.2	-1.5	-2	-3	-6	6	3	2	1.5	1.2	1	$\cdots$

用表裡各組對應值作為點的座標，描出各個點。依序連結第一象限內的各點並延長，得到圖形的一個分支；接著順次連結第三象限內的各點並延長，得到圖形的另一

個分支。將這兩個分支合起來，就是函數 $y=\dfrac{6}{x}$ 的圖形(圖 14-17)。

用同樣的方法，可以畫出 $y=-\dfrac{6}{x}$ 的圖形(圖 14-18)。

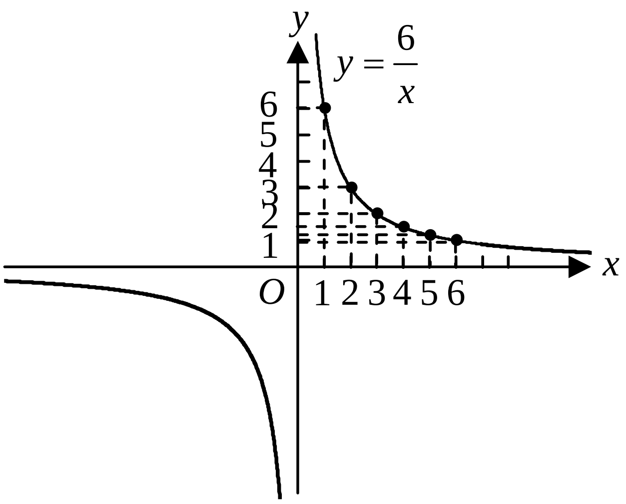


圖 14-17

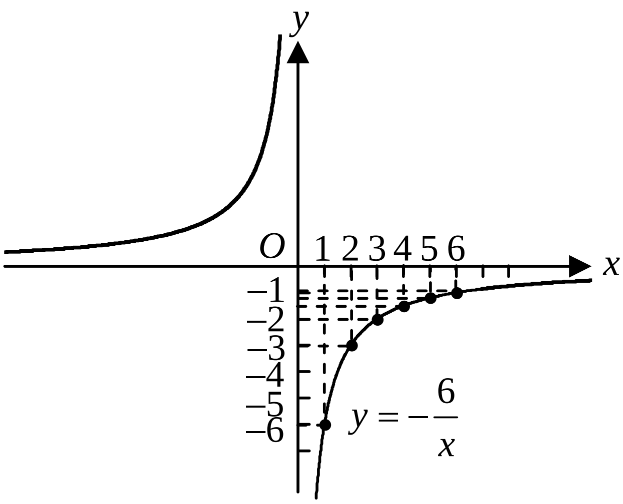


圖 14-18

反比例函數 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq 0)$的圖形叫做**雙曲線**。

由圖 14-17 與圖 14-18，我們可以看出，**反比例函數 $y=\dfrac{k}{x}$ 有下列性質：**

(1) 當 $k>0$ 時，函數圖形的兩個分支分別位於第一、三象限內，在每一個象限內，y 隨著 x 的增大而減小；當 $k<0$ 時，兩個分支分別位在第二、四象限內，在每一個象限內，y 隨著 x 的增大而增大。

(2) 兩個分支都無限接近但永遠不能達到 x 軸與 y 軸。

練 習

1. (口答) 下列各小題中的兩個變量是否成反比例？為什麼？
   (1) 時間不變時，勻速運動所走的路程與運動的速度；
   (2) 路程不變時，勻速運動所需的時間與運動的速度。

練　習

2. 已知變量 y 與 x 成反比例，並且當 $x=3$ 時，$y=7$。求：
   (1) y 與 x 之間的函數關係式；
   (2) 當 $x=2\frac{1}{3}$ 時 y 的值；
   (3) 當 $y=3$ 時 x 的值。
3. 在同一座標系內，畫出下列函數的圖形：
   $$y=\frac{5}{x}、y=\frac{-5}{x}。$$

習　題　五

1. 下列各小題中的兩個變量哪些成正比例？哪些成反比例？哪些既不成正比例也不成反比例？
   (1) 三角形的底邊不變時，它的面積與這個底邊上的高；
   (2) 三角形的面積不變時，它的底邊與這個底邊上的高；
   (3) 重量不變時，物體的體積與密度；
   (4) 體積不變時，物體的重量與密度；
   (5) 某人的年齡與體重；
   (6) 除數不變時，被除數與商；
   (7) 被除數不變時，除數與商；
   (8) $x+3$ 與 x；
   (9) $xy=18$ 中的 y 與 x；
   (10) $x\div y=18$ 中的 y 與 x。

2. 已知 y 與 x 成正比例，且 $x=8$ 時 $y=6$。分別求 $x=3$ 與 $x=-9$ 時 y 的值。

3. 已知 y 與 x^2 成正比例，且 $x=2$ 時 $y=16$。求：
   (1) $x=-4$ 時 y 的值；
   (2) $y=64$ 時 x 的值。

4. 在同一座標系內，畫出下列函數的圖形：

$$y=\frac{3}{4}x \text{ 、 } y=-\frac{5}{2}x \text{ 、 } y=2.5x \text{ 、 } y=-0.6x \text{ 。}$$

5. 已知 a 與 b^2 成反比例，且 $b=4$ 時 $a=5$。求 $b=\frac{4}{5}$ 時 a 的值。

6. 設矩形的面積是 24 cm^2，長是 x cm。
   (1) 求它的寬 y；
   (2) 把這個矩形的寬表示為長的函數，寫出自變量的取值範圍，並畫出它的圖形。

7. 在同一座標系內，畫出下列函數的圖形：

$$xy=1 \text{ 、 } xy=-1 \text{ 、 } xy-2=0 \text{ 、 } xy+2=0 \text{ 。}$$

8. 已知 $y=y_1+y_2$，y_1 與 x 成正比例，y_2 與 x^2 成反比例，並且 $x=2$ 與 $x=3$ 時，y 的值都等於 19。求 y 與 x 之間的函數關係式。

9. 已知 $y=y_1+y_2$，y_1 與 x 成正比例，y_2 與 x 成反比例，並且 $x=1$ 時 $y=4$，$x=2$ 時 $y=5$。求 $x=4$ 時 y 的值。

四、一次函數的圖形與性質

14.7　一次函數

看下面的例子：

(1)　汽車離開 A 站 4 km 後，以 40 km/小時的平均速度前進了 t 小時，那麼汽車離開 A 站的距離 s (km)與時間 t (小時)之間的函數關係式是

$$s=40t+4 \text{ 。}$$

(2)　挖土機開始工作時，油箱中有油 40 kg。如果每小時耗油 6 kg，那麼油箱中的餘油量 Q (kg)與它工作的時間 t (小時)之間的函數關係式是

$$Q=40-6t=-6t+40 \text{ 。}$$

這些函數關係式都具有 $y = kx + b$ ($k \neq 0$)的形式。

函數 $y = kx + b$ 叫做 x 的**一次函數**，這裡 x 是自變量，k、b 都是常數，且 $k \neq 0$ 。

如果 $b = 0$ ，一次函數 $y = kx + b$ 就成為 $y = kx$ ，這就是正比例函數。所以正比例函數是一次函數的特殊情形。

【例】 汽車從 A 站經 B 站以勻速 v_0 km/分鐘開往 C 站。已知離開 B 站 9 分鐘時，汽車離 A 站 10 km，又行駛一刻鐘，離 A 站 20 km。如果再行駛半小時，汽車離 A 站多少 km？

$\boxed{解}$ 設 A、B 兩站之間的距離為 s_0 km。離開 B 站 t 分鐘時，汽車離 A 站 s 公里。於是由物理學可知

$$s = v_0 t + s_0 \text{ 。}$$

把 $t = 9$ 、 $s = 10$ 及 $t = 24$ 、 $s = 20$ 分別代入上式，得

$$\begin{cases} 10 = 9v_0 + s_0 \\ 20 = 24v_0 + s_0 \end{cases}$$

這是一個以 v_0 、 s_0 為未知數的二元一次方程組。解這個方程組，得 $v_0 = \dfrac{2}{3}$ 、 $s_0 = 4$ 。

$$\therefore \quad s = \frac{2}{3}t + 4$$

當 $t = 54$ 時， $s = \dfrac{2}{3} \times 54 + 4 = 40$ (km)。

答：離開 B 站 54 分鐘時，汽車離 A 站 40 km。

在上例中，我們先確定 s 與 t 的函數關係式為 $s = v_0 t + s_0$ 的形式，其中 v_0、s_0 是未知的係數，然後根據條件「 $t = 9$ 時 $s = 10$、$t = 24$ 時 $s = 20$ 」，求出未知係數 $v_0 = \dfrac{2}{3}$ 、 $s_0 = 4$ 。像這樣，先設某些未知的係數，然後根據所給的條件來確定這些未知係數之方法是**待定係數法**。待定係數法是數學中常用的一種方法，我們在以前曾經多次用到。

練　習

已知 $y-3$ 與 x 成正比例，且 $x=2$ 時 $y=7$ 。

(1)　寫出 y 與 x 之間的函數關係式；

(2)　計算 $x=4$ 時 y 的值；

(3)　計算 $y=4$ 時 x 的值。

14.8　一次函數的圖形與性質

我們來畫函數 $y=\dfrac{2}{3}x+4$ 的圖形，並且把它同直線 $y=\dfrac{2}{3}x$ 相比較。

在 x 的取值範圍內列出這兩個函數的對應值表：

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$y=\dfrac{2}{3}x$	$\cdots$	$-\dfrac{4}{3}$	$-\dfrac{2}{3}$	0	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{4}{3}$	$\cdots$
$y=\dfrac{2}{3}x+4$	$\cdots$	$-\dfrac{4}{3}+4$	$-\dfrac{2}{3}+4$	4	$\dfrac{2}{3}+4$	$\dfrac{4}{3}+4$	$\cdots$

它們的圖形如圖 14-19 所示。

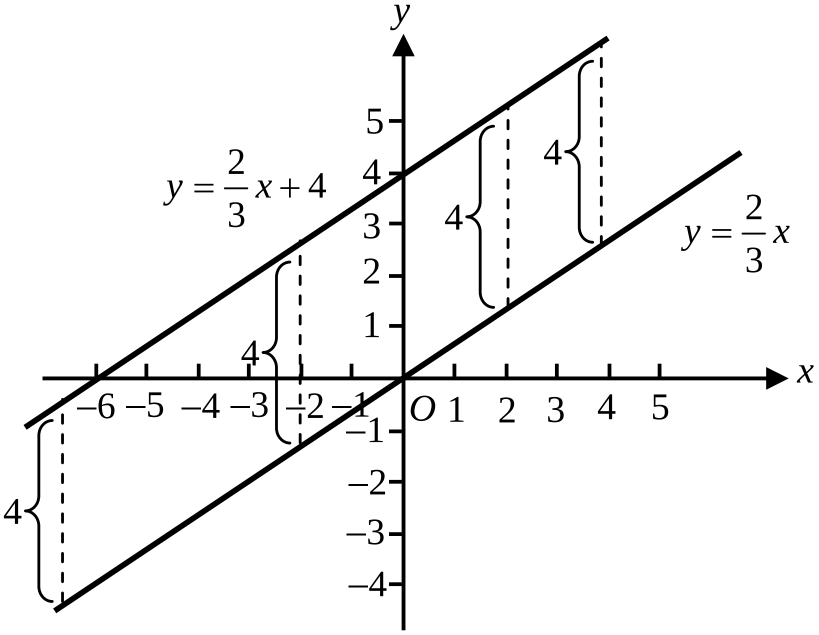


圖 14-19

可以看出，對於 x 的每一個值，函數 $y=\frac{2}{3}x+4$ 的值都比函數 $y=\frac{2}{3}x$ 的值多 4 個單位，因此，把直線 $y=\frac{2}{3}x$ 向上平行移動 4 個單位，就可以得到函數 $y=\frac{2}{3}x+4$ 的圖形。由此可見，一次函數 $y=\frac{2}{3}x+4$ 的圖形是經過點 $(0,\ 4)$ 且平行於直線 $y=\frac{2}{3}x$ 的一條直線。

一般地，一次函數 $y=kx+b$ 的圖形是經過點 $(0, b)$ 且平行於直線 $y=kx$ 的一條直線。因此，我們以後把一次函數 $y=kx+b$ 的圖形叫做直線 $y=kx+b$。

直線 $y=kx+b$ 與 y 軸相交於點 $B(0, b)$，b 叫做直線 $y=kx+b$ 在 y 軸上的截距，簡稱**截距**。

一次函數 $y=kx+b$ 有下列性質：

當 $k>0$ 時，y 隨 x 的增大而增大；當 $k<0$ 時，y 隨 x 的增大而減小。

由於直線的位置可以由直線上的任意兩點唯一確定，所以要畫 $y=kx+b$ 的圖形，只要先確定這條直線上的任意兩點，然後過這兩點畫一條直線就行了。

【例 1】 畫出直線 $y=\frac{1}{2}x+2$。

解　取 $x=0$，得 $y=2$；
取 $y=0$，得 $x=-4$。
經過點 $A(0,\ 2)$ 與點 $B(-4, 0)$ 畫直線，它就是所求的直線(圖 14-20)。

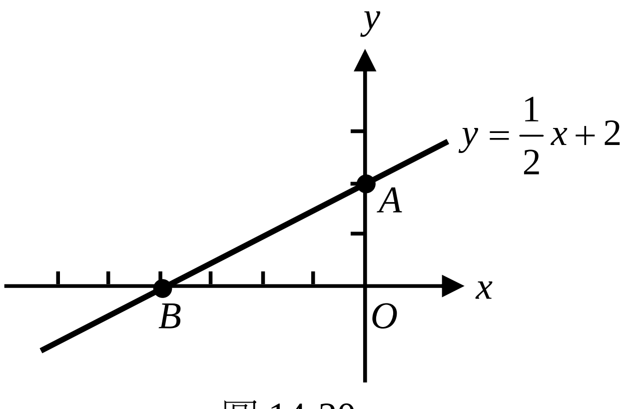


圖 14-20

【例 2】 一根彈簧的原長是 12 cm，它掛的重量不能超過 15 kg，且每掛重 1 kg 就伸長 $\frac{1}{2}$ cm。寫出掛重後彈簧長度 y (cm)與掛重 x (kg)之間的函數關係式，並畫出它的圖形。

分析： 因為彈簧每掛重 1 kg 就伸長 $\frac{1}{2}$ cm，所以掛重 x kg 就伸長 $\frac{1}{2}x$ cm。又因為彈簧的原長是 12 cm，所以掛重 x kg 後的長是 $\left(\frac{1}{2}x+12\right)$ cm。

解　y 與 x 之間的函數關係式為

$$y=\frac{1}{2}x+12 \quad (0\le x\le 15)。$$

(括號中的不等式 $0\le x\le 15$ 表示 x 的取值範圍。)

下面畫 $y=\frac{1}{2}x+12 \quad (0\le x\le 15)$的圖形。

取 $x=0$ ，得 $y=12$ ；取 $x=15$ ，得 $y=19\frac{1}{2}$ 。

描出點 $A(0, 12)$與點 $B(15,19\frac{1}{2})$，然後連成線段 AB(想一想為什麼不畫直線)，這條線段就是所求的圖形(圖 14-21)。

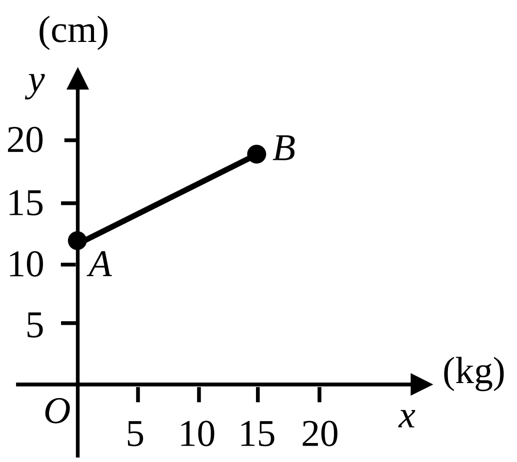


圖 14-21

練習

1. 在同一座標系內，畫出下列函數的圖形，並且把它們與直線 $y=\frac{1}{3}x$ 相比較。

   (1) $y=\frac{1}{3}x+4$；　　(2) $y=\frac{1}{3}x-2$。

2. (1) 已知一次函數 $y=kx+2$ 在 $x=5$ 時的值為 4，求 k；

   (2) 已知直線 $y=kx+2$ 經過點 $P(5, 4)$，畫出這條直線。

習題六

1. 已知當壓力不變時，氣體的體積與溫度之間的函數關係式是 $V_t=V_0+0.0037V_0t$，其中 V_t 是氣體在 t ℃時的體積，V_0 是在 0 ℃時的體積。現在有一定量的氣體，壓力不變，在 0 ℃時的體積是 100 L。求：

   (1) 溫度是 30 ℃時氣體的體積；

   (2) 溫度是多少時氣體的體積是 101 L。

2. 已知 $y=P+z$，這裡 P 是一個常數，z 與 x 成正比例，且 $x=2$ 時 $y=1$、$x=3$ 時 $y=-1$。

   (1) 寫出 y 與 x 之間的函數關係式；

   (2) 計算 $x=0$ 時 y 的值；

   (3) 計算 $y=0$ 時 x 的值。

3. 已知 $y+b$ 與 $x+a$ (其中 a、b 是常數)成正比例，求證 y 是 x 的一次函數。如果 $x=3$ 時 $y=5$、$x=2$ 時 $y=2$，把 y 表示成 x 的函數。

4. 根據實驗知道，酒精的體積與溫度之間的關係在一定範圍內接近於一次函數。現在測得一定量的酒精在 0 ℃時的體積是 5.250 L，在 40 ℃時的體積是 5.481 L。計算這些酒精在 10 ℃與 30 ℃時的體積。

5. 聲音在空氣裡的傳播速度 v (m/秒)與溫度 t (°C)的函數關係式是 $v = 331 + 0.6t$。畫出函數的圖形，並根據圖形求當 $t = -5$ °C 與 $t = 15$ °C 時的聲音的傳播速度。

6. (1) 已知一次函數 $y = kx + b$ 在 $x = -4$ 時的值為 9，在 $x = 6$ 時的值為 3，求 k 與 b；
   (2) 已知直線 $y = kx + b$ 經過點$(-4, 9)$與點$(6, 3)$，求 k 與 b，並畫出這條直線。

7. (1) 在同一座標系內，畫出下列直線：
   $y = 2x + 3$、$y = 2x - 3$、$y = -x + 3$、$y = -x - 3$。
   (2) 這四條直線是不是圍成一個平行四邊形，為什麼？

8. (1) 在同一座標系內，畫出函數 $y = 3x - 2$ 與 $y = 2x + 3$ 的圖形；
   (2) 根據這兩個圖形，求 x 等於什麼值時，函數 $y = 3x - 2$ 與 $y = 2x + 3$ 有相同的值；
   (3) 用圖形法求方程 $6x + 3 = 4x - 7$ 的解。

9. 已知 $y = kx + b$ 的圖形上之點在下列範圍內，分別畫出它的圖形之大致位置，並指出 k 與 b 的符號。
   (1) 在第一、二、三象限內；
   (2) 在第一、二、四象限內；
   (3) 在第一、三、四象限內；
   (4) 在第二、三、四象限內。

10. 畫出函數 $y = 3x + 12$ 的圖形。利用圖形：
   (1) 求當 $x = -2$、-1、$\frac{1}{2}$ 時 y 的值；
   (2) 求當 $y = 3$、9、-3 時對應的 x 值；
   (3) 求圖形與座標軸的兩個交點之座標及交點間的距離；
   (4) 求方程 $3x + 12 = 0$ 的解；
   (5) 求不等式 $3x + 12 > 0$ 的解集；
   (6) 如果 y 的取值範圍為 $-6 \le y \le 6$，求 x 的取值範圍。

五、二次函數的圖形與性質

14.9　二次函數

看下面的例子：

(1)　正方形的邊長是 x (cm)，則它的面積 y 與邊長 x 之間的函數關係式是

$$y = x^2\ (\mathrm{cm}^2)。$$

(2)　工廠第一個月電視機的產量為 50 (台)，第三個月的產量 y (台)與月平均增長率 x 之間的函數關係式是

$$y = 50(1+x)^2\ ，$$

即

$$y = 50x^2 + 100x + 50\ 。$$

上面兩個函數關係式中，自變量 x 的最高次數是 2。我們把形如 $y = ax^2 + bx + c$ (其中 a、b、c 是常數，且 $a \neq 0$)的函數叫做**二次函數**。

練　習

1. 矩形木板長 a cm、寬 b cm。如果長、寬各鋸去 x cm，求加工後木板的面積 y (cm^2)與 x (cm)之間的函數關係式。
2. 設圓柱的高 h (cm)是常量，寫出圓柱的體積 V (cm^3)與底面積周長 C (cm)之間的函數關係式。

14.10　二次函數 $y = ax^2$ 的圖形與性質

我們先研究特殊的二次函數之圖形與性質，然後再研究一般的二次函數之圖形與性質。

【例 1】 畫出函數 $y = x^2$ 與 $y = -x^2$ 的圖形。

$\boxed{\text{解}}$　在 x 的取值範圍內列出函數之對應值表：

x	$\cdots$	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$\cdots$
$y=x^2$	$\cdots$	4	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4	$\cdots$

用表裡各組對應值作為點的座標，進行描點，然後用平滑曲線把它們依序連結起來，就得到函數 $y=x^2$ 的圖形(圖 14-22)。

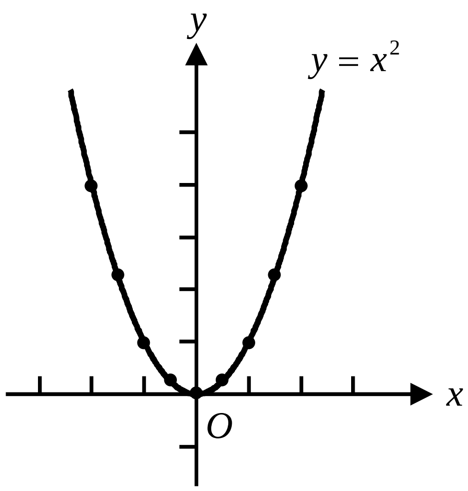


圖 14-22

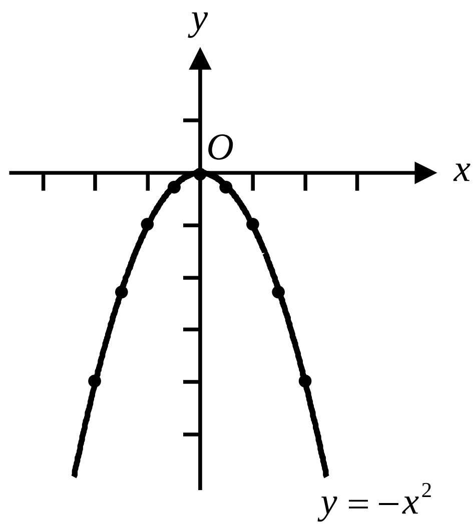


圖 14-23

用同樣方法，可以畫出函數 $y=-x^2$ 的圖形(圖 14-23)。

【例 2】 畫出函數 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 與 $y=2x^2$ 的圖形。

$\boxed{\text{解}}$　先畫函數 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 的圖形。在 x 的取值範圍內列出函數之對應值表：

x	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
$y=x^2$	$\cdots$	8	$4\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$4\frac{1}{2}$	8	$\cdots$

用表裡各組對應值作為點的座標，進行描點，然後用平滑曲線把它們依序連結起來，就得到函數 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形(圖 14-24)。

用同樣的方法，可以畫出函數 $y=2x^2$ 的圖形。我們把它畫在圖 14-24 所示的座標系內。

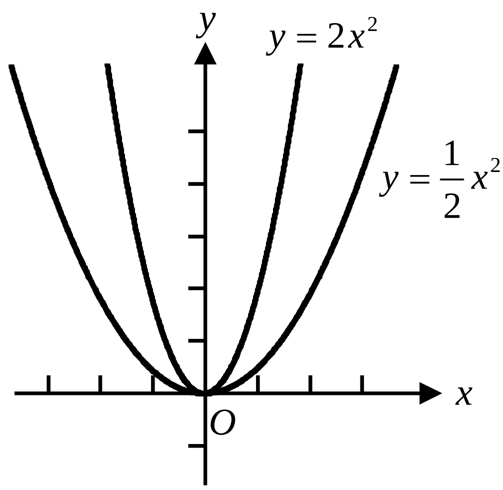


圖 14-24

函數 $y=ax^2$ 的圖形形如物體拋射時所經過的路線，我們把它叫做**拋物線**。這條拋物線關於 y 軸對稱，y 軸叫做拋物線的**對稱軸**。對稱軸與拋物線的交點叫做拋物線的**頂點**，這條拋物線的頂點是原點。

從圖 14-22、14-23、14-24 可以看出，**二次函數 $y=ax^2$ 有下列性質：**

(1) 拋物線 $y=ax^2$ 的頂點是原點，對稱軸是 y 軸。

(2) 當 $a>0$ 時，拋物線 $y=ax^2$ 在 x 軸的上方(頂點在 x 軸上)，它的開口向上，並且向上無限延伸；
當 $a<0$ 時，拋物線 $y=ax^2$ 在 x 軸的下方(頂點在 x 軸上)，它的開口向下，並且向下無限延伸。

(3) 當 $a>0$ 時，在對稱軸的左側，y 隨著 x 的增大而減小；在對稱軸的右側，y 隨著 x 的增大而增大；函數 y 當 $x=0$ 時的值最小。
當 $a<0$ 時，在對稱軸的左側，y 隨著 x 的增大而增大；在對稱軸的右側，y 隨著 x 的增大而減小；函數 y 當 $x=0$ 時的值最大。

練 習

1. 在同一座標系內，畫出下列函數的圖形，並比較它們的位置關係：

   (1) $y=\frac{2}{3}x^2$；　　(2) $y=-\frac{2}{3}x^2$。

2. 圓面積公式為 $A=\pi r^2$，其中 r 為圓的半徑，A 為圓的面積，π 取 3.14。

   (1) 求 $r=3$、5、2.5 (cm)時圓的面積；

   (2) 畫出函數 $A=\pi r^2$ ($0<r\le 8$)的圖形；

   (3) 根據圖形，求面積 $A=20$、40、60 (cm^2)時圓的半徑。

14.11　二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形與性質

【例 1】在同一座標系內，畫出函數

$$y=\frac{1}{2}x^2$$

$$y=\frac{1}{2}(x+3)^2$$

$$y=\frac{1}{2}(x+3)^2-2$$

的圖形。

$\boxed{\text{解}}$　在 x 的取值範圍內列出這幾個函數之對應值表：

x	$\cdots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$y=\frac{1}{2}x^2$				$\cdots$	$4\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$4\frac{1}{2}$	$\cdots$
$y=\frac{1}{2}(x+3)^2$	$\cdots$	$4\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$4\frac{1}{2}$	$\cdots$			
$y=\frac{1}{2}(x+3)^2-2$	$\cdots$	$2\frac{1}{2}$	0	$-1\frac{1}{2}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	0	$2\frac{1}{2}$	$\cdots$			

用描點法畫出它們的圖形(圖 14-25)。

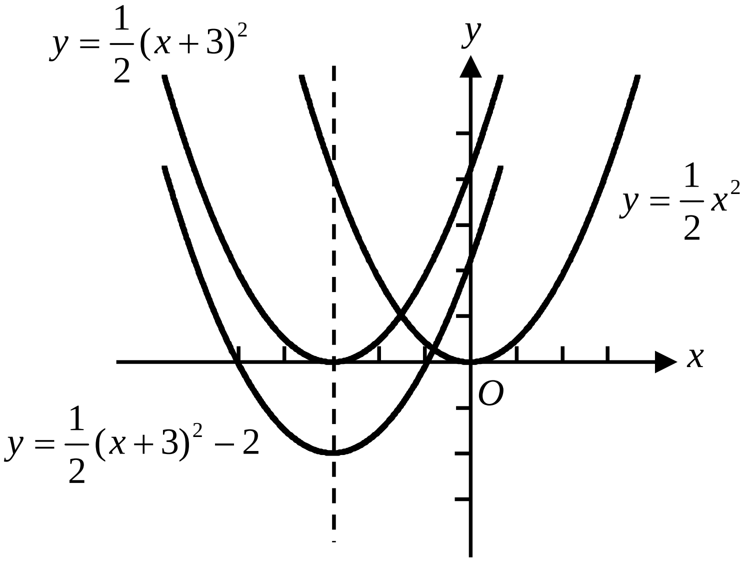


圖 14-25

從圖中可以看出，把函數$y=\frac{1}{2}x^2$的圖形向左平移 3 個單位後，就得到函數$y=\frac{1}{2}(x+3)^2$的圖形；再把函數$y=\frac{1}{2}(x+3)^2$的圖形向下平移 2 個單位，就得到函數$y=\frac{1}{2}(x+3)^2-2$的圖形。由於$\frac{1}{2}(x+3)^2-2=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$，這也就是$y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$的圖形。

由此可知，函數$y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$的圖形與函數$y=\frac{1}{2}x^2$的圖形形狀是一樣的，只是位置不同。容易知道，函數$y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$ $=\frac{1}{2}(x+3)^2-2$當$x=-3$時的值最小，最小值是-2，因此拋物線$y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$的頂點是$(-3,-2)$，對稱軸是經過點$(-3,-2)$且與$y$軸平行的直線$x=-3$。[2]

[2] 「直線$x=-3$」的意思是：這條直線是由橫座標為-3的一切點所構成的。它平行於y軸。「直線$x=h$」的意思也是這樣。

一般地，函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形與函數 $y=ax^2$ 的圖形之形狀是一樣的，只是位置不同。由於

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2+bx+c \\
&= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\
&= a\left[x^2+2\bullet\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right] \\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}
\end{aligned}
$$

所以它的圖形可以通過平行移動 $y=ax^2$ 的圖形：當 $\frac{b}{2a}>0$ 時，向左移動 $\frac{b}{2a}$ 個單位；當 $\frac{b}{2a}<0$ 時，向右移動 $\left|\frac{b}{2a}\right|$ 個單位；而當 $\frac{4ac-b^2}{4a}>0$ 時，向上移動 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ 個單位；當 $\frac{4ac-b^2}{4a}<0$ 時，向下移動 $\left|\frac{4ac-b^2}{4a}\right|$ 個單位。因此，函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形是一條拋物線，它的頂點是 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$，對稱軸是平行於 y 軸的直線 $x=-\frac{b}{2a}$。當 $a>0$ 時，拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 的開口向上，它的頂點是最低點。因此，當 $a>0$ 且 $x=-\frac{b}{2a}$ 時，函數 y 有最小值，即

$$y_{最小值}=\frac{4ac-b^2}{4a}\;;$$

當 $a<0$ 時，拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 的開口向下，它的頂點是最高點。因此，當 $a<0$ 且 $x=-\frac{b}{2a}$ 時，函數 y 有最大值，即

$$y_{\text{最大值}}=\frac{4ac-b^2}{4a}\text{ 。}$$

綜上所述，**二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 有下列性質：**

(1) 拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 的頂點是 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$，對稱軸是直線 $x=-\frac{b}{2a}$。

(2) 當 $a>0$ 時，拋物線的開口向上，並且向上無限延伸；當 $a<0$ 時，拋物線的開口向下，並且向下無限延伸。

(3) 當 $a>0$ 時，在對稱軸的左側，y 隨著 x 的增大而減小；在對稱軸的右側，y 隨著 x 的增大而增大；函數 y 當 $x=-\frac{b}{2a}$ 時有最小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$。

當 $a<0$ 時，在對稱軸的左側，y 隨著 x 的增大而增大；在對稱軸的右側，y 隨著 x 的增大而減小；函數 y 當 $x=-\frac{b}{2a}$ 時有最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$。

【例 2】 求拋物線 $y=-\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{5}{2}$ 的對稱軸與頂點座標，並畫圖。

解 在函數 $y=-\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{5}{2}$ 中，$a=-\frac{1}{2}$、$b=-3$、$c=-\frac{5}{2}$，所以

$$-\frac{b}{2a}=-3\text{ 、 }\frac{4ac-b^2}{4a}=2\text{ 。}$$

也可以將 $-\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{5}{2}$ 配方，得

$$y=-\frac{1}{2}(x^2+6x+5)=-\frac{1}{2}[(x+3)^2-4]=-\frac{1}{2}(x+3)^2+2\text{ 。}$$

因此，拋物線 $y=-\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{5}{2}$ 的對稱軸是 $x=-3$，頂點座標是 $(-3, 2)$。

在 x 的取值範圍內，根據函數的對稱性，列出函數的對應值表：

x	$\cdots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	$\cdots$
y	$\cdots$	$-2\frac{1}{2}$	0	$1\frac{1}{2}$	2	$1\frac{1}{2}$	0	$-2\frac{1}{2}$	$\cdots$

用描點法畫出它的圖形(圖 14-26)。

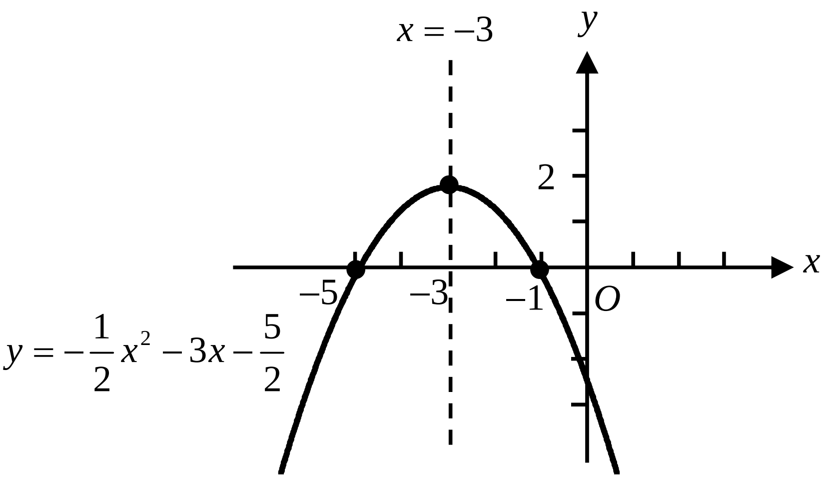


圖 14-26

【例 3】 求二次函數 $y=2x^2-8x+1$ 的最大值或最小值。

$\boxed{解}$ $y=2x^2-8x+1=2(x^2-4x+4)-8+1=2(x-2)^2-7$，

因為 $a=2>0$，所以 y 有最小值。當 $x=2$ 時，

$$y_{最小值}=-7 \text{。}$$

練 習

1. 用配方法把下列函數化成 $y=a(x+h)^2+k$ 的形式，並指出它們的圖形之開口方向、頂點與對稱軸(不用畫圖)：

   (1) $y=x^2-2x-3$；　　(2) $y=x^2+6x+10$；

   (3) $y=2x^2-3x+4$；　　(4) $y=-2x^2-5x+7$；

   (5) $y=3x^2+2x$；　　(6) $y=\frac{5}{2}x-2-3x^2$。

練　習

2. 畫出下列函數的圖形：

(1) $y=-x^2-2x$；　(2) $y=1-3x^2$；

(3) $y=-2x^2+8x-8$；　(4) $y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$。

3. (1) 求函數 $y=2(x-3)^2$ 在 $x=1$、2、2.5、2.9、3、3.1、3.5、4、5 時的值。這些值中哪一個最小？函數的最小值是什麼？

(2) 求函數 $y=4-(x+2)^2$ 在 $x=-5$、-4、-3、-2、-1、0、1 時的值。這些值中哪一個最大？函數的最大值是什麼？

4. 求下列函數的最大值或最小值：

(1) $y=x^2-2x+4$；　(2) $y=-x^2+3x$；

(3) $S=1-2t-t^2$；　(4) $u=2V^2+4V-5$；

(5) $V=-3t^2+4t$；　(6) $y=x(8-x)$；

(7) $h=100-5t^2$；　(8) $y=(x-2)(2x+1)$。

習　題　七

1. (1) 設流速是 a m/分，求每小時流過水管的水量 V (m^3)與水管直徑 D (m)之間的函數關係式；

(2) 正方形的邊長是 3，若邊長增加 x，則面積增加 y，求 y 與 x 之間的函數關係式。

2. 畫出函數 $y=x^2$ 的圖形，並根據圖形求：

(1) $x=2$、2.4、-1.7 時 y 的值(精確到 0.1)；

(2) $x=1.2^2$、$(-2.3)^2$ 時 y 的值(精確到 0.1)；

(3) $y=2$、5.8 時 x 的值(精確到 0.1)；

(4) $y=\sqrt{3}$、$\sqrt{8}$ 時 x 的值(精確到 0.1)。

3. 已知 x 的一個二次函數在 $x=0$ 時的值是 4，在 $x=1$ 時的值是 3，在 $x=2$ 時的值是 6。求這個二次函數。

4. 已知抛物線 $y=ax^2+bx+c$ 經過 $A(0,\ 1)$、$B(1,\ 3)$、$C(-1,\ 1)$ 三點，確定 a、b、c 的值並畫出這條抛物線。

5. 已知函數 $y=\frac{1}{4}x^2$、$y=-\frac{3}{2}x^2+2$、$y=x^2+\frac{1}{2}x$、$y=3x^2-4x+1$
   (1) 分別畫出每個函數的圖形。
   (2) 分別指出每個圖形的對稱軸、頂點的座標以及開口方向。
   (3) 從圖形上觀察 x 取哪些值時，函數值
       (i) 大於零；　(ii) 小於零；　(iii) 等於零。

六、一元一次不等式組與一元二次不等式

14.12　一元一次不等式組及其解法

我們已經學習了一元一次不等式，現在來學習一元一次不等式組。

幾個一元一次不等式所組成的不等式組叫做**一元一次不等式組**，所有這些一元一次不等式的解集之公共部分叫做這個一元一次不等式組的**解集**。

【例 1】 解不等式組

$$\begin{cases} 2x-1>x+1 \\ x+8<4x-1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{解}}$ 不等式 $2x-1>x+1$ 的解集是 $x>2$。

不等式 $x+8<4x-1$ 的解集是 $x>3$。

所以這個不等式組的解集是 $x>3$。

把這個不等式組的解集在數軸上表示出來，如圖 14-27 所示。

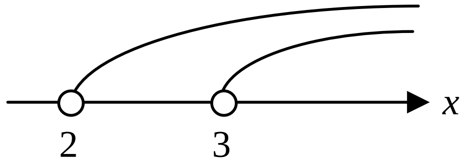


圖 14-27

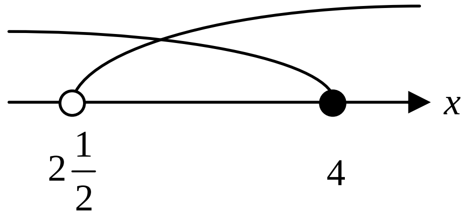


圖 14-28

【例 2】 解不等式組

$$\begin{cases} 5x-2>3(x+1) \\ \dfrac{1}{2}x-1\le 7-\dfrac{3}{2}x \end{cases}$$

$\boxed{解}$ 不等式 $5x-2>3(x+1)$ 的解集是 $x>2\frac{1}{2}$ 。

不等式 $\frac{1}{2}x-1\le 7-\frac{3}{2}x$ 的解集是 $x\le 4$ 。

所以這個不等式組的解集是 $2\frac{1}{2}<x\le 4$ 。

把這個不等式組的解集在數軸上表示出來，如圖 14-28 所示。

【例 3】 解不等式組

$$\begin{cases} 2x+3<5 \\ 3x-2>4 \end{cases}$$

$\boxed{解}$ 不等式 $2x+3<5$ 的解集是 $x<1$ 。

不等式 $3x-2>4$ 的解集是 $x>2$ 。

由此可知，兩個不等式的解集沒有公共部分，也就是說，沒有一個數能夠使得兩個不等式同時成立。這時，我們說不等式組的解集是空集。

從上面的例子可以看出，兩個一元一次不等式所組成的不等式組之解集有以下四種情形。

設 $a<b$ ，那麼：

1.　不等式組

$$\begin{cases} x>a \\ x>b \end{cases}$$

的解集是 $x>b$ (圖 14-29)；

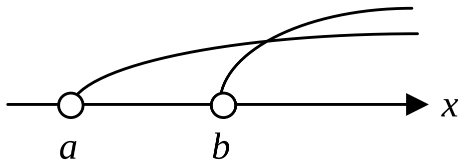


圖 14-29

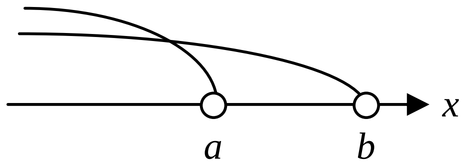


圖 14-30

2.　不等式組

$$\begin{cases} x<a \\ x<b \end{cases}$$

的解集是 $x<a$ (圖 14-30)；

3.　不等式組

$$\begin{cases} x>a \\ x<b \end{cases}$$

的解集是 $a<x<b$ (圖 14-31)；

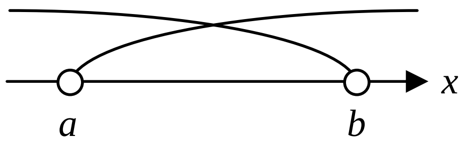


圖 14-31

4.　不等式組

$$\begin{cases} x<a \\ x>b \end{cases}$$

的解集是空集。

練 習

解下列不等式組，並把不是空集的解集在數軸上表示出來：

(1) $\begin{cases} x > -4 \\ x < 2 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x > -5 \\ x > -3 \end{cases}$　　(3) $\begin{cases} x < 7 \\ x < -1 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x < 0 \\ x > 3 \end{cases}$　　(5) $\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ 4 - x > 0 \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} -3x < 0 \\ 4x + 7 > 0 \end{cases}$

14.13　$|x| < a$、$|x| > a$ （$a > 0$） 型的不等式及其解法

我們來求$|x| < a$、$|x| > a$ （$a > 0$） 型不等式的解集。

例如，解不等式$|x| < 2$。

由絕對值的意義可知，$|x| < 2$ 可化成下面兩個不等式組：

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x < 2 \end{cases} \tag{1}$$

及

$$\begin{cases} x < 0 \\ -x < 2 \end{cases} \tag{2}$$

不等式組(1)的解集是$0 \leq x < 2$。

不等式組(2)的解集是$-2 < x < 0$。

所以$|x| < 2$ 的解集是$-2 < x < 2$(圖 14-32)。

從圖 14-32 可以看出，表示$|x| < 2$ 的解集之線段(除去端點)，就是數軸上與原點距離小於 2 的點之集合。

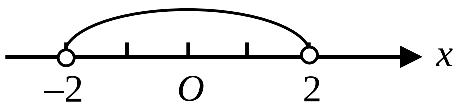


圖 14-32

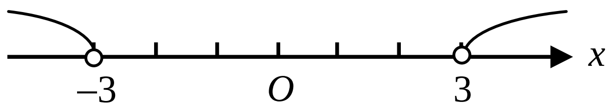


圖 14-33

又如，解不等式$|x| > 3$。

這個不等式可化成下面兩個不等式組：

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x > 3 \end{cases} \tag{1}$$

或

$$\begin{cases} x<0 \\ -x>3 \end{cases} \qquad (2)$$

不等式組(1)的解集是 $x>3$ 。

不等式組(2)的解集是 $x<-3$ 。

因此，$|x|>3$ 的解集是 $x>3$ 或 $x<-3$ (圖 14-33)。

從圖 14-33 可以看出，表示 $|x|>3$ 的解集之兩條射線(除去端點)，就是數軸上與原點距離大於 3 的點之集合。

一般地來說，不等式 $|x|<a$ ($a>0$)的解集是 $-a<x<a$ (圖 14-34)，不等式 $|x|>a$ ($a>0$)的解集是 $x>a$ 或 $x<-a$ (圖 14-35)。

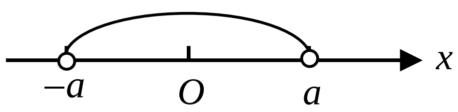


圖 14-34

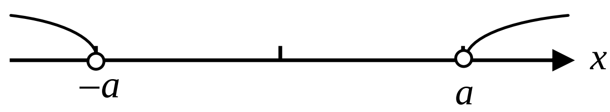


圖 14-35

【例 1】 解不等式 $|3x|<8$ 。

解　由原不等式可得

$$-8<3x<8 \text{ 。}$$

各除以 3，得

$$-2\frac{2}{3}<x<2\frac{2}{3} \text{ 。}$$

所以原不等式的解集是 $-2\frac{2}{3}<x<2\frac{2}{3}$ 。

【例 2】 解不等式 $|x-5|<8$ 。

解　由原不等式可得

$$-8<x-5<8 \text{ 。}$$

各加上 3，得

$$-3<x<13 \text{ 。}$$

所以原不等式的解集是 $-3<x<13$ 。

【例 3】 解不等式$|x+9|\le 86$。

解　　由原不等式可得

$$-86\le x+9\le 86\ 。$$

各減去 9，得

$$-95\le x\le 77\ 。$$

所以原不等式的解集是$-95\le x\le 77$。

【例 4】 解不等式$|x-3|>5$。

解　　由原不等式可得

$$x-3>5\text{ 或 }x-3<-5\ 。$$

也就是

$$x>8\text{ 或 }x<-2\ 。$$

所以原不等式的解集是$x>8$或$x<-2$。

【例 5】 解不等式$|x+6|\ge 53$。

解　　由原不等式可得

$$x+6\ge 53\text{ 或 }x+6\le -53\ 。$$

也就是

$$x\ge 47\text{ 或 }x\le -59\ 。$$

所以原不等式的解集是$x\ge 47$或$x\le -59$。

練　習

1. 解下列不等式，並把不是空集的解集在數軸上表示出來：
   (1) $|x|<4$；　　(2) $|x|>4$。
2. 解下列不等式：
   (1) $|x+4|>9$；　　(2) $\left|\frac{1}{4}+x\right|\le\frac{1}{2}$；
   (3) $|2-x|\ge 3$；　　(4) $\left|x-\frac{2}{3}\right|<\frac{1}{3}$。

14.14　一元二次不等式及其解法

含有一個未知數並且未知數之最高次數是二次的不等式叫做**一元二次不等式**，它的一般形式是

$$ax^2+bx+c>0 \text{或} ax^2+bx+c<0 \quad (a \neq 0)。$$

下面利用二次函數的圖形來討論一元二次不等式的解法。

例如，對於二次函數 $y=x^2-x-6$，我們來求

(1)　x 取哪些值時，$y=0$；

(2)　x 取哪些值時，$y>0$；

(3)　x 取哪些值時，$y<0$。

畫出拋物線 $y=x^2-x-6$ 的圖形，如圖 14-36 所示，它與 x 軸相交於兩點 $(-2, 0)$ 與 $(3, 0)$，這兩點將 x 軸分成三段。從圖 14-36 可以看出：

(1)　當 $x=-2$，或 $x=3$ 時，$y=0$；

(2)　當 $x<-2$，或 $x>3$ 時，$y>0$；

(3)　當 $-2<x<3$ 時，$y<0$。

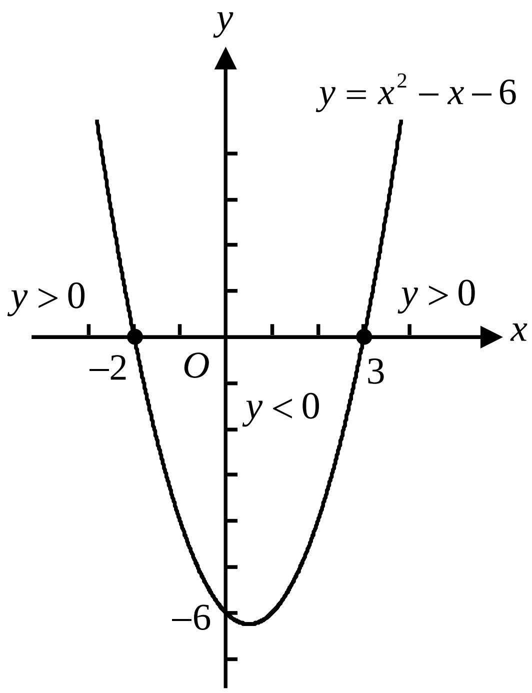


圖 14-36

這就是說，拋物線 $y=x^2-x-6$ 與 x 軸有兩個交點，即方程 $x^2-x-6=0$ 有兩個不相等的實根(相異實根) $x_1=-2$、$x_2=3$。在這個情況下，不等式

$$x^2-x-6>0$$

的解集是

$$x<-2\text{，或 } x>3\text{；}$$

而不等式

$$x^2-x-6<0$$

的解集則是

$$-2<x<3。$$

一般地，對於二次函數 $y=ax^2+bx+c\,(a>0)$，設 $\Delta=b^2-4ac$。

1. 如果 $\Delta>0$，此時拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 與 x 軸的兩個交點(圖 14-37)，即方程 $ax^2+bx+c=0$ 有兩個相異實根 x_1、x_2 ($x_1<x_2$)。那麼，不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是

$$x<x_1\text{，或 }x>x_2\text{；}$$

而不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是

$$x_1<x<x_2\text{。}$$

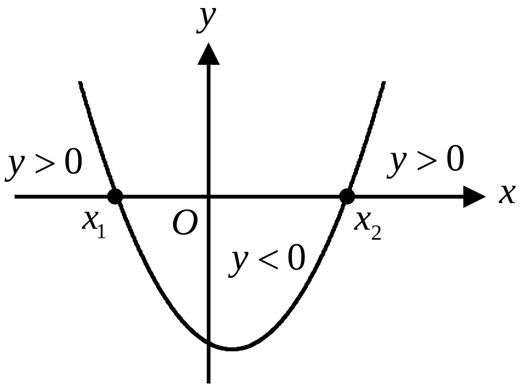


圖 14-37

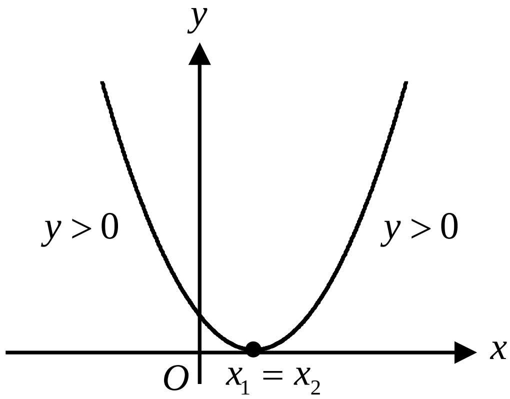


圖 14-38

2. 如果 $\Delta=0$，此時拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 與 x 軸只有一個交點(圖 14-38)，即方程 $ax^2+bx+c=0$ 有兩個相等的實根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$。那麼，不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是所有不等於 $-\dfrac{b}{2a}$ 的實數，而不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集則是空集。

3. 如果 $\Delta<0$，此時拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 與 x 軸沒有交點(圖 14-39)，即方程 $ax^2+bx+c=0$ 無實根。那麼，不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是全體實數，而不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集則是空集。

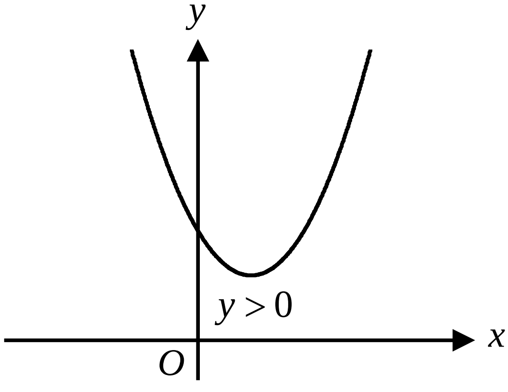


圖 14-39

二次項係數是負數(即$a<0$)的不等式，可以先化成二次項係數是正數的不等式，再求它的解集。

【例 1】 解不等式$(x+4)(x-1)<0$。

$\boxed{解}$ 如果將$(x+4)(x-1)$展開，它是一個二次項係數為正數的二次函數。因為方程$(x+4)(x-1)=0$的根是

$$x_1=-4、x_2=1，$$

所以不等式的解集是

$$-4<x<1。$$

【例 2】 解不等式$2x^2-3x-2>0$。

$\boxed{解}$ 因為$\Delta=b^2-4ac>0$，方程$2x^2-3x-2=0$的根是

$$x_1=-\frac{1}{2}、x_2=2，$$

所以不等式的解集是

$$x<-\frac{1}{2}\text{或}x>2。$$

【例 3】 解不等式$-3x^2+6x>2$。

$\boxed{解}$ 兩邊都乘以-1，移項，得

$$3x^2-6x+2<0。$$

因為$\Delta>0$，方程$3x^2-6x+2=0$的解是

$$x_1=1-\frac{\sqrt{3}}{3}、x_2=1+\frac{\sqrt{3}}{3}，$$

所以原不等式的解集是

$$1-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<1+\frac{\sqrt{3}}{3}。$$

【例 4】解不等式 $4x^2-4x+1>0$。

解　因為 $\Delta=0$，方程 $4x^2-4x+1=0$ 有兩個相等的實根

$$x_1=x_2=\frac{1}{2}\text{。}$$

所以原不等式的解集是所有不等於 $\frac{1}{2}$ 的實數。

【例 5】解不等式 $-x^2+2x-3>0$。

解　兩邊都乘以 -1，得

$$x^2-2x+3<0\text{。}$$

因為 $\Delta<0$，所以方程 $x^2-2x+3=0$ 無實根，即不等式 $x^2-2x+3<0$ 的解集是空集。故可以得知原不等式 $-x^2+2x-3>0$ 的解集是空集。

【例 6】m 是什麼實數的時候，方程 $x^2-(m+2)x+4=0$ 有實根？

解　這個方程的判別式是

$$[-(m+2)]^2-4\times1\times4=m^2+4m-12\text{。}$$

我們知道：判別式大於或等於零的時候，原方程有實根；判別式小於零的時候，原方程沒有實根。

由 $m^2+4m-12=0$，得 $m=2$ 或 $m=-6$；

由 $m^2+4m-12>0$，得 $m<-6$ 或 $m>2$。

由此可知，當 $m\le-6$ 或 $m\ge2$ 時，原方程有實根。

練　習

1. 解下列不等式：

(1) $(x+2)(x-3)>0$；　　(2) $x(x-2)<0$；

(3) $3x^2-7x+2<0$；　　(4) $4x^2+4x+1<0$；

(5) $-6x^2-x+2\le0$；　　(6) $x(x-1)<x(2x-3)+2$；

(7) $x^2+10\ge6x+1$；　　(8) $x^2-4\frac{1}{3}x+5\frac{1}{3}\le0$。

練 習

2. x 是什麼實數時，函數 $y=x^2-4x+1$ 的值：
   (1) 等於零？　　(2) 是正數？　　(3) 是負數？

3. x 是什麼實數時，$\sqrt{x^2+x-12}$ 有意義？

4. k 是什麼實數時，方程
$$x^2+2x-11=k(3-x)$$
有實數根？

習 題 八

1. 解下列不等式組：

(1) $\begin{cases} 5x+6>4x \\ 15-9x<10-4x \end{cases}$；　(2) $\begin{cases} x-3(x-2)\geq 4 \\ \dfrac{1+2x}{3}>x-1 \end{cases}$；

(3) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}<\dfrac{x+1}{5} \\ \dfrac{2x-1}{5}<\dfrac{x+1}{2} \end{cases}$；　(4) $\begin{cases} x+2>0 \\ x-4>0 \\ x-6<0 \end{cases}$。

2. 解下列不等式：

(1) $\left|\dfrac{1}{3}x\right|\geq 7$；　(2) $|10x|<\dfrac{22}{7}$；

(3) $|x-6|<0.001$；　(4) $3\leq|8-x|$。

3. 解下列不等式：

(1) $4x^2-4x>15$；　(2) $14-4x^2\geq x$；

(3) $x(x+2)<x(3-x)+1$。

4. x 是什麼實數時，下列函數的值大於零？等於零？小於零？

(1) $y=25-x^2$；　(2) $y=x^2-14x+45$；

(3) $y=x^2+6x+10$；　(4) $y=-x^2+4x-4$。

5. 求下列函數中自變量 x 的取值範圍：

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$；　(2) $y=\sqrt{x^2-4}$；

(3) $y=\sqrt{x+2}\sqrt{x-2}$；　(4) $y=\sqrt{-x^2+2x-1}$。

6. (1) m 是什麼實數時，方程

$$x^2+2(m-1)x+3m^2=11$$

有不相等的實根？

(2) m ($m\neq 0$)是什麼實數時，方程

$$mx^2-(1-m)x+m=0$$

有實根？

7. 證明對於任何實數 k，方程

$$x^2-(k+1)x+k=0$$

有實根？

8. k 是什麼實數時，方程組

$$\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ x-y=k \end{cases}$$

有實數解？

小　结

一、本章主要內容是直角座標系與兩點間距離公式、函數的概念與函數的表示法、正比例函數、反比例函數、一次函數與二次函數的圖形與性質、以及一元一次不等式組、一元二次不等式的解法。

二、利用平面直角座標系，可以由一對有序實數確定平面內一點的位置。在座標平面內，點與它的座標成一一對應，設

$P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$是座標平面內的任意兩點，那麼P_1、P_2之間的距離可用公式

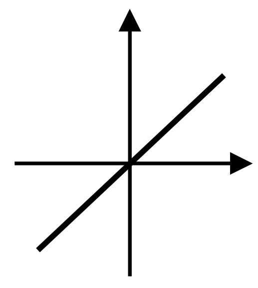
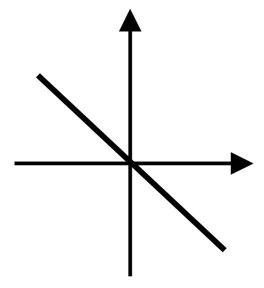
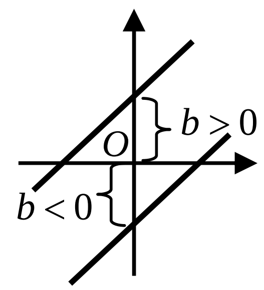
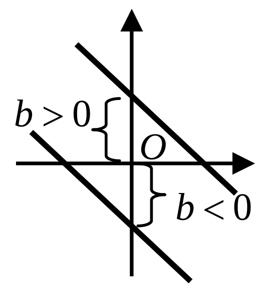
$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

來計算。

三、客觀世界中，無論什麼事物的運動都採取兩種狀態，相對地靜止的狀態與顯著地變動的狀態。常量與變量，就是這兩種狀態在數量上的某種反應。常量與變量是相對的，是對某一變化過程而言的。在一定條件下，它們可以向其反面轉化。

四、變量在變化過程中不是孤立的，而是互相聯繫的。函數反映了變量之間的某種聯繫。函數的本質就是兩個變量之間的一種對應關係。表示函數的方法，最常用的是解析法、列表法、圖形法三種。

五、一次函數$y = kx + b$ ($k \neq 0$)是最簡單的函數。當$b = 0$時，一次函數就是正比例函數$y = kx$。它們的圖形與性質如下：

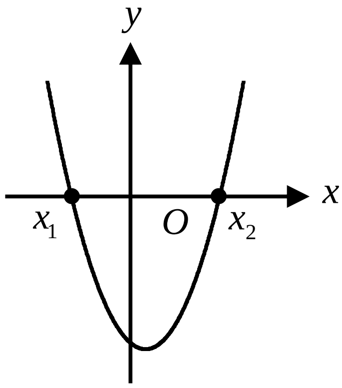
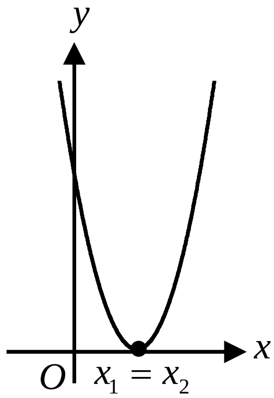
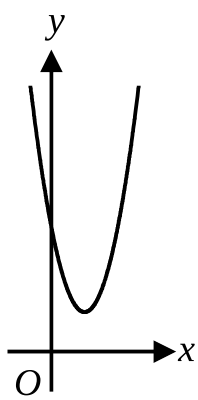
一次函數$y = kx + b$ ($k \neq 0$)			
$b = 0$(正比例函數$y = kx$)		$b \neq 0$	
$k > 0$	$k < 0$	$k > 0$	$k < 0$
			

六、反比例函數$y = \dfrac{k}{x}$ ($k \neq 0$)的圖形是雙曲線。

七、二次函數$y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)的圖形是以$x = -\dfrac{b}{2a}$為對稱軸，以$\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$為頂點的拋物線。如果$a > 0$ ($a < 0$)，

當 $x < -\dfrac{b}{2a}$ 時，y 隨 x 增大而減小(增大)；當 $x = -\dfrac{b}{2a}$ 時，y 取最小(大)值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ ；當 $x > -\dfrac{b}{2a}$ 時，y 隨 x 增大而增大 (減小)。

八、二次函數、一元二次方程、一元二次不等式的主要結論與三者之間的密切聯繫，如下表所示：

<table>
<tr><td colspan="2">判別式
$\Delta = b^2 - 4ac$</td><td>$\Delta > 0$</td><td>$\Delta = 0$</td><td>$\Delta < 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">二次函數
$y = ax^2 + bx + c$
$(a > 0)$的圖形</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">一元二次方程
$ax^2 + bx + c = 0$
$(a \neq 0)$的根</td><td>有兩相異實根
$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$(x_1 < x_2)$</td><td>有兩相等實根
$x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$</td><td>沒有實根</td></tr>
<tr><td rowspan="2">一元二次不等式的解集</td><td>$ax^2 + bx + c > 0$
$(a > 0)$</td><td>$x < x_1$ 或 $x > x_2$</td><td>所有不等於
$-\dfrac{b}{2a}$ 的實數</td><td>全體實數</td></tr>
<tr><td>$ax^2 + bx + c < 0$
$(a > 0)$</td><td>$x_1 < x < x_2$</td><td>空集</td><td>空集</td></tr>
</table>

九、一元一次不等式組的解集是這個不等式組中所有不等式的解集之公共部分。

十、當 $a>0$ 時，$|x|<a$ 的解集是 $-a<x<a$；$|x|>a$ 的解集是 $x>a$，或 $x<-a$。

複習參考題十四

1. 在座標平面內，
   (1) 位於第一象限的點之橫座標是什麼符號？縱座標是什麼符號？
   (2) 位於第四象限的點之橫座標是什麼符號？縱座標是什麼符號？
   (3) 橫座標為負數、縱座標為正數的點位於哪一象限？
   (4) 橫座標、縱座標都是負數的點位於哪一象限？

2. 以 $P_1(0,2)$、$P_2(8,-4)$、$P_3(5,-8)$、$P_4(-3,-2)$ 四個點為頂點的四邊形是不是平行四邊形？是不是矩形？在座標平面內畫出這個四邊形。

3. 已知圓錐的體積公式是 $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$，這裡 V 是圓錐的體積、r 是它的底面圓半徑、h 是它的高。
   (1) 在 r 是常量時，V 與 h 之間是什麼對應關係？
   (2) 在 h 是常量時，V 與底面積 $A(=\pi r^2)$ 之間是什麼對應關係？
   (3) 在 V 是常量時，A 與 h 之間是什麼對應關係？
   (4) 在 V 是常量時，r 與 h 之間是否成反比例，為什麼？
   (5) 畫出 $r=1$ 時 V 隨著 h 變化的圖形。
   (6) 畫出 $V=6$ 時 A 隨著 h 變化的圖形。

4. 設從管口流出的水量 Q(L)與時間 t (秒)之間的函數關係式是 $Q=kt$，這裡 k 是常量。

(1) Q 與 t 之間是什麼對應關係？
(2) 已知 5 秒鐘內管口流出的水量是 120 L，求比例係數 k；
(3) 根據第(2)小題中求出的比例係數，求 8.5 秒鐘管口流出的水量；
(4) 根據第(2)小題中求出的比例係數，求管口流出 320 L 水所需要的時間。

5. (1) 如果 x 與 y 成正比例，y 與 z 成正比例，那麼 x 與 z 之間是什麼對應關係？
(2) 如果 x 與 y 成反比例，y 與 z 成反比例，那麼 x 與 z 之間是什麼對應關係？
(3) 如果 x 與 y 成正比例，y 與 z 成反比例，那麼 x 與 z 之間是什麼對應關係？

6. 已知兩個函數 $y_1 = k_1 x + b_1$ 、 $y_2 = k_2 x + b_2$ 。
(1) 如果 $k_1 = k_2$ 、 $b_1 \neq b_2$ ，那麼這兩個函數的圖形之間有什麼關係？
(2) 如果 $k_1 \neq k_2$ 、 $b_1 = b_2$ ，那麼這兩個函數的圖形之間有什麼關係？
(3) 如果 $k_1 = k_2$ 、 $b_1 = b_2$ ，那麼這兩個函數的圖形之間有什麼關係？

7. 點(x_1, y_1)、(x_2, y_2)的座標滿足一次函數關係式 $y = kx + b$ ，求這個一次函數。

8. 已知函數 $y = 3x - 15$ 。
(1) 畫出這個函數的圖形。
(2) 從圖形上觀察當 x 取什麼值時，函數的值
(i) 大於零； (ii) 小於零； (iii) 等於零。
由此能發現一次函數與一元一次方程及一元一次不等式三者之間有什麼聯繫嗎？

9. 利用 $y=2x-3$ 的圖形，在圖上表示：

(1) 當 $y=2$ 時 x 的值；

(2) 當 $x<0$ 時 y 的取值範圍；

(3) 當 $y>3$ 時 x 的取值範圍；

(4) 當 $y<5$ 時 x 的取值範圍。

10. 求經過 $A(0,\ 1)$、$B(-1,\ 1)$、$C(1,-1)$ 三點且對稱軸平行於 y 軸的拋物線，並求其頂點座標與對稱軸。

11. 已知對稱軸平行於 y 軸的拋物線之頂點在點(2, 3)，且拋物線經過點(3, 1)，求這條拋物線。

12. 求下列函數的最大或最小值，並說明這時自變量取什麼值。

(1) $y=2x^2+5$；　　(2) $y=(x-3)^2-2$；

(3) $y=ax^2-bx$ (要討論)；　　(4) $y=(a+x)(b-x)$。

13. 解關於 x 的不等式 $ax+b>cx+d$ (要討論)。

14. 解下列不等式組：

(1) $\begin{cases} 1-\dfrac{x+1}{2}\le 2-\dfrac{x+2}{3} \\ x(x-1)\ge (x+3)(x-3) \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3+x<4+2x \\ 5x-3<4x-1 \\ 7+2x>6+3x \end{cases}$

15. 解下列關於 x 的不等式(要討論)：

(1) $|x-a|<b$；　　(2) $|x-a|>b$。

16. 求不等式組

$$\begin{cases} x(x^2+1)\ge (x+1)(x^2-x+1) \\ 1-2x>3(x-9) \end{cases}$$

的整數解。

17. 解不等式 $0<x^2-x-2<4$。