第五章　二元一次方程組

5.1　二元一次方程

我們來看下面的問題：

已知兩個數的和是 7，求這兩個數。

這個問題裡有兩個未知數，如果設一個數是 x，另一個數是 y，那麼根據題意，可以列出方程

$$x+y=7$$

這個方程含有兩個未知數，並且含有未知數的項之次數都是 1，這樣的方程叫做**二元一次方程**。

當 $x=3$、$y=4$ 時，方程 $x+y=7$ 左右兩邊的值相等，我們說 $x=3$、$y=4$ 是適合(或滿足)方程 $x+y=7$ 的。適合一個二元一次方程的每一對未知數之值，叫做這個**二元一次方程的一個解**。例如 $x=3$、$y=4$ 就是方程 $x+y=7$ 的一個解，我們把它記作

$$\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$$

要求二元一次方程 $x+y=7$ 的解，可以把這個方程變形，用含有 x 的代數式表示 y，得

$$y=7-x$$

在這個方程裡，如果 x 取一個值，就可以求出與它對應的 y 之一個值。例如：

取 $x=-1$，可以得到 $y=8$；
取 $x=0$，可以得到 $y=7$；
取 $x=2.7$，可以得到 $y=4.3$；
取 $x=5$，可以得到 $y=2$；
$\vdots$

這樣得到的每一對未知數之值都適合方程 $x+y=7$，所以它們都是這個方程的解。

對於任何一個二元一次方程，讓其中一個未知數取任意一個

值，都可求出與它對應的另一個未知數之值。因此任何一個二元一次方程都是有無數個解。

由二元一次方程的所有解組成之集合，叫做這個二元一次方程的解集。

練 習

1. （口答）下列方程中，哪些是二元一次方程？哪些不是？為什麼？

   (1) $2x-3y=9$； (2) $x+1=6z$；

   (3) $\frac{1}{x}+4=2y$； (4) $x-5=3y^2$。

2. （口答）在

$$\begin{cases}x=0\\y=-2\end{cases}、\begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}、\begin{cases}x=1\\y=-5\end{cases}$$

   三對數值中，

   (1) 哪對是方程 $2x-y=7$ 的解？

   (2) 哪對是方程 $x+2y=-4$ 的解？

3. 在下列方程中，用含 x 的代數式表示 y：

   (1) $2x+y=3$； (2) $3x-y=2$；

   (3) $x+3y=0$； (4) $2x-3y+5=0$。

4. 在方程 $3x+2y=12$ 中，設 $x=2$、3、4、5，分別求出對應的 y 之值。

5.2 二元一次方程組

我們再來看下面的問題：

有甲、乙兩個數，甲數的 3 倍比乙數的 2 倍多 11，甲數的 2 倍與乙數的 3 倍之和是 16，求甲、乙兩數。

這個問題，用設一個未知數列一元一次方程的方法來求解，比較困難。如果設兩個未知數，例如甲數是 x，乙數是 y，那麼就可以列出下面兩個二元一次方程：

$$3x-2y=11 \qquad (1)$$

$$2x+3y=16 \qquad (2)$$

上面的問題就是要求出既適合方程(1)，又適合方程(2)的 x 與 y 之值，也就是求出這兩個方程公共解。

　　把這兩個方程變形，用含有 x 的代數式表示 y，得

$$y=\frac{3}{2}x-\frac{11}{2} \qquad (3)$$

$$y=\frac{16}{3}-\frac{2}{3}x \qquad (4)$$

從(3)可以求得方程(1)的一些解

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-\dfrac{11}{2} \end{cases}、\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}、\begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}、\cdots\ ;$$

從(4)可以求得方程(2)的一些解

$$\begin{cases} x=3 \\ y=\dfrac{10}{3} \end{cases}、\begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}、\begin{cases} x=7 \\ y=\dfrac{2}{3} \end{cases}、\cdots\ ;$$

可以看出，其中的

$$\begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$$

既是方程(1)的一個解，又是方程(2)的一個解，所以它就是這兩個方程的公共解。

　　上面所說，可以用圖 5-1 來表示。

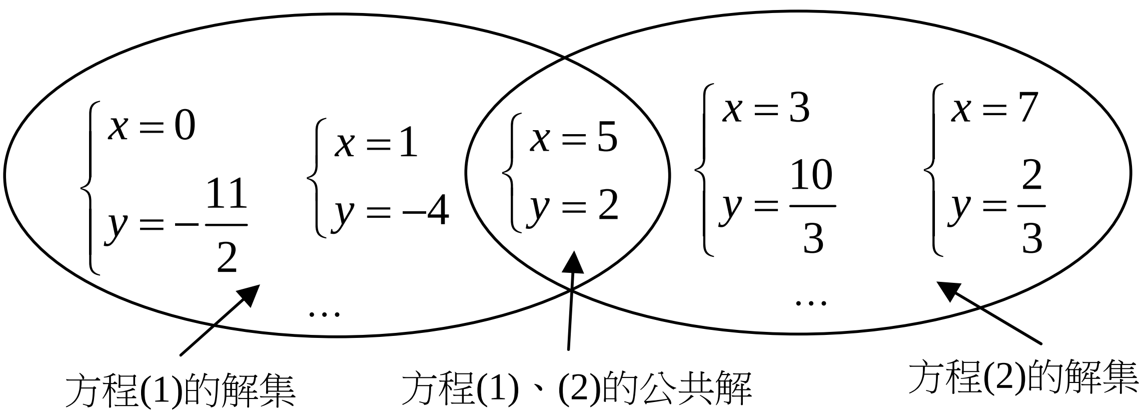


圖 5-1

由幾個方程組成的一組方程，叫做**方程組**。由幾個一次方程組成並含有兩個未知數的方程，叫做**二元一次方程組**。例如，上面的方程(1)，(2)合在一起，就組成一個二元一次方程組，記作

$$\begin{cases} 3x-2y=11 \\ 2x+3y=16 \end{cases}$$

本章中所說的二元一次方程組，都是指由兩個一次方程組成的二元一次方程組。

方程組裡各方程的公共解，叫做這個**方程組的解**。例如，上面的方程(1)，(2)之公共解

$$\begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$$

就是方程組

$$\begin{cases} 3x-2y=11 \\ 2x+3y=16 \end{cases}$$

的解。

練　習

1.（口答）下列方程中，哪些是二元一次方程組？哪些不是？為什麼？

(1) $\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x-3y=3 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x+3y=6 \\ x^2-y^2=8 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x+3y=9 \\ y+z=7 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x+3y=5 \\ xy=2 \end{cases}$　(5) $\begin{cases} x+3y=3 \\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{2y}{3}=1 \end{cases}$　(6) $\begin{cases} x+3y=2 \\ \dfrac{6}{x}-2y=3 \end{cases}$

2.（口答）在

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}、\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}、\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$$

三對數值中，哪一對是下列方程組的解？

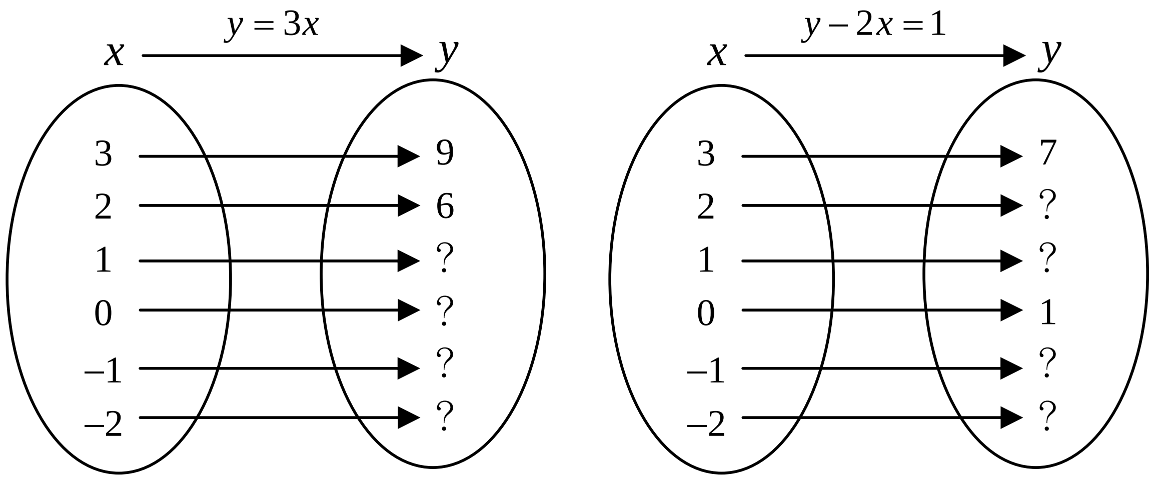
(1) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 3x+4y=10 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} y=2x-3 \\ 4x-3y=1 \end{cases}$

練 習

3. 根據已知條件，求出 y 的值，分別填入各圖的右圖裡，並找出方程組

$$\begin{cases} y = 3x \\ y - 2x = 1 \end{cases}$$

的解。



(第 3 題)

5.3 用代入法解二元一次方程組

求方程組的解之過程，叫做**解方程組**。

下面我們學習解二元一次方程組的兩種常用方法。

我們已經學過解一元一次方程，如果能夠通過二元一次方程組裡的兩個方程,得到一個只含一個未知數的一元方程(即一元一次方程)，求出這個未知數的值，然後再設法求出另一個未知數的值，問題就解決了。

下面我們就按照這條化「二元」為「一元」的思路來分析具體問題。例如，解方程組

$$\begin{cases} y = 2x \\ x + y = 3 \end{cases}$$

這就是要求出這兩個二元一次方程的公共解。如果這兩個二元一次方程有公共解，那麼兩個方程中同一個未知數就應取相同的

值。因此，第二個方程中的 y 可用第一個方程中表示 y 的代數式 $2x$ 來代替：

$$y=\boxed{2x} \qquad (1)$$

$$x+y=3 \qquad (2)$$

把(1)代入(2)，得 $x+2x=3$。這樣，就由兩個二元一次方程得到一個一元一次方程，消去了一個未知數。解這個一元一次方程，得 $x=1$，把 $x=1$ 代入(1)，就可以得到 $y=2$。

要驗算所得結果是不是原方程組的解，應把這對數值代入原方程組裡的每一個方程進行驗算。

經過驗算可以知道，由上述步驟得到的一對未知數之值

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

是原方程組的解。

我們再看幾個例子。

【例 1】 解方程組

$$\begin{cases} y=1-x & (1) \\ 3x+2y=5 & (2) \end{cases}$$

$\boxed{\text{解}}$ 把(1)代入(2)，得

$$3x+2(1-x)=5$$

$$3x+2-2x=5$$

$$\therefore \quad x=3$$

把 $x=3$ 代入(1)，得

$$y=-2$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$$

驗算： 把 $x=3$、$y=-2$ 代入(1)，得

左邊 $=-2$，右邊 $=1-3=-2$，

左邊 = 右邊。

再代入(2)，得

左邊 $3\times3+2\times(-2)=5$ ，右邊 $=5$ ，

左邊 = 右邊。

所以

$$\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$$

是原方程組的解。

(驗算可用口算，不必寫出，以下同。)

【例 2】 解方程組

$$\begin{cases} 2x+5y=-21 & (1) \\ x+3y=8 & (2) \end{cases}$$

分析： 在這個方程組裡，方程(2)中未知數 x 的係數是 1，為了方便起見，可以先把方程(2)變形，用含 y 的代數式表示 x，然後再解。

解 由(2)，得

$$x=8-3y \quad (3)$$

把(3)代入(1)，得

$$2(8-3y)+5y=-21$$

$$16-6y+5y=-21$$

$$-y=-37$$

$$\therefore \quad y=37$$

把 $y=37$ 代入(3)，得

$$x=8-3\times37$$

$$\therefore \quad x=-103$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x=-103 \\ y=37 \end{cases}$$

【例 3】 解方程組

$$\begin{cases} 2x-7y=8 & (1) \\ 3x-8y-10=0 & (2) \end{cases}$$

分析： 在這個方程組裡，每個方程中各個未知數的係數都不是 1，但可以運用方程同解原理把其中的一個方程變形，使這個方程中的一個未知數之係數為 1，然後再解。

解 由(1)，得

$$2x=8+7y$$

$$x=\frac{8+7y}{2} \qquad (3)$$

把(3)代入(2)，得

$$\frac{3(8+7y)}{2}-8y-10=0$$

$$24+21y-16y-20=0$$

$$5y=-4$$

$$\therefore \quad y=-\frac{4}{5}$$

把 $y=-\frac{4}{5}$ 代入(3)，得

$$x=\frac{8+7\times\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}$$

$$\therefore \quad x=1\frac{1}{5}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x=1\frac{1}{5} \\ y=-\frac{4}{5} \end{cases}$$

上面幾個例題的解題步驟一般是：

1.　將方程組裡的一個方程變形，用含有一個未知數的代數式表示另一個未知數；

2.　用這個代數式代替另一個方程中相應的未知數，使解二元一次方程組轉化為解一元一次方程，求得一個未知數的值；

3.　把求得的這個未知數之值代入原方程組裡的任意一個方程，求得另一個未知數的值，從而得到方程組的解。

這種解方程組的方法叫做**代入消元法**，簡稱**代入法**。

練　習

1. 用代入法解下列方程，並寫出驗算：

(1) $\begin{cases} y=2x \\ 7x-3y=1 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+5z=6 \\ 3x-6z=4 \end{cases}$

2. 用代入法解下列方程：

(1) $\begin{cases} y=2x-3 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 6x-5y=-1 \\ x=\dfrac{2}{3} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2s=3t \\ 3s-2t=5 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 2x-z=5 \\ 3x+4z=2 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 4x-9y=8 \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} 3m-4n=7 \\ 9m-10n+25=0 \end{cases}$

5.4　用加減法解二元一次方程組

我們再來學習另一種通過消去未知數來解二元一次方程組的方法。例如，解方程組

$$\begin{cases} x+y=5 & (1) \\ x-y=1 & (2) \end{cases}$$

在這個方程組的兩個方程中，未知數 y 的係數互為相反數，如果把這兩個方程的兩邊分別相加，就可以消去 y，得到一個一元一次方程。

$$\begin{cases} x \boxed{+y} = 5 & (1) \\ x \boxed{-y} = 1 & (2) \end{cases}$$

(1) + (2)，得

$$2x = 6 \qquad (3)$$

由(3)，得 $x = 3$。把 $x = 3$ 代入(1)或(2)，得 $y = 2$。經過驗算，

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

是原方程組的解。

在上面的兩個方程中，我們又看到，未知數 x 的係數相等。如果把這兩個方程的兩邊分別相減，就可以消去未知數 x，也能得到一個一元一次方程。

$$\begin{cases} \boxed{x} + y = 5 & (1) \\ \boxed{x} - y = 1 & (2) \end{cases}$$

(1)－(2)，得

$$2y = 4 \qquad (4)$$

由(4)，得 $y = 2$。把 $y = 2$ 代入(1)或(2)，得 $x = 3$。

我們再看幾個例子。

【例 1】 解方程組

$$\begin{cases} 3x + 7y = -20 & (1) \\ 3x - 5y = 16 & (2) \end{cases}$$

分析： 在這兩個方程中，未知數 x 的係數相等，把方程(1)、(2)的兩邊分別相減，就可以消去 x。

$\boxed{解}$ (1)－(2)，得

$$12y = -36$$

$$\therefore \quad y = -3$$

把 $y=-3$ 代入(1)，得

$$3x+7\times(-3)=-20$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=-3 \end{cases}$$

【例 2】 解方程組

$$\begin{cases} 9u+2v=15 & (1) \\ 3u+4v=10 & (2) \end{cases}$$

分析： 在這兩個方程中，同一個未知數的係數之絕對值都不相等，如果直接把這兩個方程的兩邊分別相加或相減，都不能消去任何一個未知數。但是只要在方程(1)的兩邊都乘以 2，就可以使兩個方程中的未知數 v 之係數相等，然後再把兩個方程的兩邊分別相減而消去 v。

$\boxed{\text{解}}$ (1) × 2，得

$$18u+4v=30 \qquad (3)$$

(3)－(2)，得

$$15u=20$$

$$\therefore \quad u=1\frac{1}{3}$$

把 $u=1\frac{1}{3}$ 代入(2)，得

$$3\times1\frac{1}{3}+4v=10$$

$$4v=6$$

$$\therefore \quad v=1\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} u = 1\frac{1}{3} \\ v = 1\frac{1}{2} \end{cases}$$

想一想：能不能先消去未知數 u？如果能，應當怎麼做？

【例 3】 解方程組

$$\begin{cases} 3x + 4y = 16 & (1) \\ 5x - 6y = 33 & (2) \end{cases}$$

分析： 在方程(1)的兩邊都乘以 3，在方程(2)的兩邊都乘以 2，就可以使未知數 y 的係數之絕對值相等，然後把兩個方程的兩邊分別相加而消去 y。

$\boxed{\text{解}}$ (1) × 3，得

$$9x + 12y = 48 \qquad (3)$$

(2) × 2，得

$$10x - 12y = 66 \qquad (4)$$

(3) + (4)，得

$$19x = 114$$

$$\therefore \quad x = 6$$

把 $x = 6$ 代入(1)，得

$$3 \times 6 + 4y = 16$$

$$4y = -2$$

$$\therefore \quad y = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

解上面幾個例題時，我們在方程組裡一個方程的兩邊都乘以一個適當的數，或者分別在兩個方程的兩邊都乘以一個適當的數，使其中某一個未知數的係數之絕對值相等，然後把方程兩邊

分別相加或相減，消去這個未知數，使解二元一次方程組轉化為解一元一次方程。這種解方程組的方法叫做加減消元法，簡稱加減法。用加減法解題時，一般可以先把方程組裡的每個方程整理成含未知數的項在方程左邊、常數項在方程右邊的形式，然後再進行加減消元。

【例 4】 解方程組

$$\begin{cases} 2(x-150)=5(3y+50) & (1) \\ 10\% \bullet x+6\% \bullet y=8.5\% \times 800 & (2) \end{cases}$$

$\boxed{\text{解}}$ 把方程(1)、(2)分別化簡，得

$$\begin{cases} 2x-15y=550 & (3) \\ 5x+3y=3400 & (4) \end{cases}$$

(3) + (4) × 5，得

$$27x=17550$$

$\therefore$ $$x=650$$

把 $x=650$ 代入(4)，得

$$5\times 650+3y=3400$$

$$3y=150$$

$\therefore$ $$y=50$$

$\therefore$ $$\begin{cases} x=650 \\ y=50 \end{cases}$$

練　習

用加減法解下列方程組：

1. (1) $\begin{cases} 3x+y=8 \\ 2x-y=7 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3m+2n=16 \\ 3m-n=1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3p+7q=9 \\ 4p-7q=5 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x+2z=9 \\ 3x-z=-1 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 5x+2y=25 \\ 3x+4y=15 \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} 3x-7y=1 \\ 5x-4y=17 \end{cases}$

練 習

(7) $\begin{cases} 8s+9t=23 \\ 17s-6t=74 \end{cases}$　　(8) $\begin{cases} 4x-15y-17=0 \\ 6x-25y-23=0 \end{cases}$

2. (1) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}=1 \\ 3(x+y)+2(x-3y)=15 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+y=60 \\ 30\%\bullet x+6\%\bullet y=10\%\times 60 \end{cases}$

5.5　三元一次方程組的解法舉例

含有三個未知數，並且含有未知數的項之次數都是 1 的方程叫做**三元一次方程**。例如，$x+3y+5z=4$ 就是一個關於 x、y、z 的三元一次方程。任何三元一次方程都有無數個解。

由幾個一次方程組並含有三個未知數的方程組，叫做**三元一次方程組**。例如，方程組

$$\begin{cases} 3x+2y+z=13 & (1) \\ x+y+2z=7 & (2) \\ 2x+3y-z=12 & (3) \end{cases}$$

就是由三個一次方程組成的三元一次方程組。

本章中所說的三元一次方程組，都是指由三個一次方程組成的三元一次方程組。下面我們學習三元一次方程組的一種解法。

解三元一次方程組，可以把方程組裡的一個方程分別與另外兩個方程結合成兩組，利用代入法或加減法消去這兩組中的同一個未知數，得到含另外兩個未知數的兩個二元一次方程，解由這兩個二元一次方程組成的二元一次方程組，求得兩個未知數的值後，再求出被消去的那個未知數之值。這樣，通過把「三元」的問題逐步化為「二元」、「一元」的問題後，從而求得了原方程組的解。我們看幾個例子。

【例 1】 解前面給出的三元一次方程組。

分析： 在這個方程組裡，方程(1)中未知數 z 的係數為 1，可以把方程(1)分別與(2)、(3)結合，先消去 z。

$\boxed{解}$ (1) + (3)，得

$$5x+5y=25 \tag{4}$$

(1) × 2－(2)，得

$$5x+3y=19 \tag{5}$$

把方程(4)、(5)組成一個二元一次方程組

$$\begin{cases} 5x+5y=25 & (4) \\ 5x+3y=19 & (5) \end{cases}$$

解這個二元一次方程組，得

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

把 $x=2$ 、 $y=3$ 代入(1)，得

$$3\times 2+2\times 3+z=13$$

$$\therefore \quad z=1$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases}$$

要驗算所得的結果是不是原方程組的解，應把這組值代入原方程組裡每一個方程進行驗算，請自行寫出驗算。

【例 2】 解方程組

$$\begin{cases} 3x+4z=7 & (1) \\ 2x+3y+z=9 & (2) \\ 5x-9y+7z=8 & (3) \end{cases}$$

分析： 在這個方程組裡，方程(1)只含兩個未知數 x、z，所以只要由(2)、(3)消去 y，就可以得到含 x、z 的二元一次方程組。因此先消去 y 比較方便。

$\boxed{解}$ (2) × 3 + (3)，得

$$11x+10z=35 \qquad (4)$$

把方程(1)、(4)組成一個二元一次方程組

$$\begin{cases} 3x+7z=7 & (1) \\ 11x+10z=35 & (4) \end{cases}$$

解這個二元一次方程組，得

$$\begin{cases} x=5 \\ z=-2 \end{cases}$$

把 $x=5$ 、 $z=-2$ 代入(2)，得

$$2\times5+3y-2=9$$

$$3y=1$$

$$\therefore \quad y=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x=5 \\ y=\dfrac{1}{3} \\ z=-2 \end{cases}$$

練 習

解下列三元一次方程組：

(1) $\begin{cases} 3x-y+z=4 \\ 2x+3y-z=12 \\ x+y+z=6 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x+4y+3z=9 \\ 3x-2y+5z=11 \\ 5x-6y+7z=13 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4x-9z=17 \\ 3x+y+15z=18 \\ x+2y+3z=2 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} z=x+y \\ 2x-3y+2z=5 \\ x+2y-z=3 \end{cases}$

習　題　十　六

1. 已知二元一次方程 $2x-7y=4$
   (1)　用含 x 的代數式表示 y；
   (2)　用含 y 的代數式表示 x。

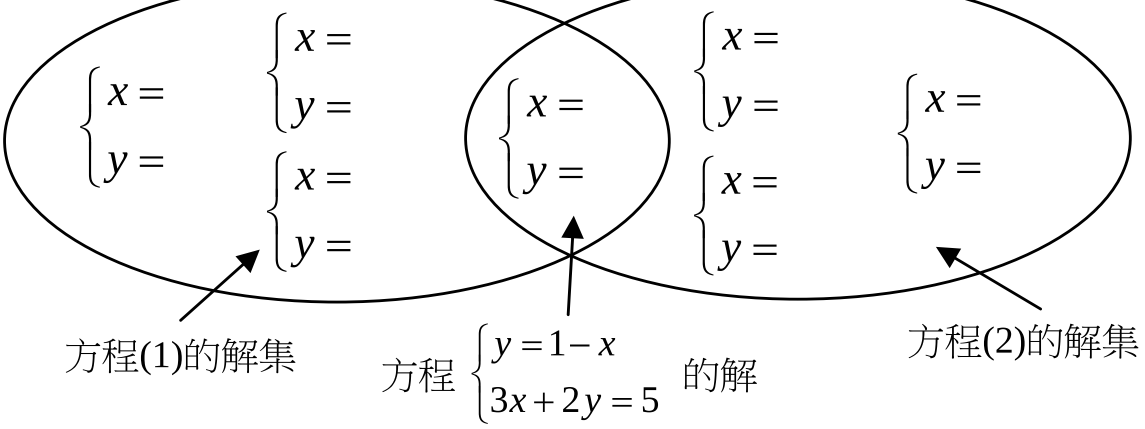
2. 根據表中給定的 x (或 y)之值，從方程 $3x+y=5$，求出對應的 y (或 x)之值。

x	-2	0	$\frac{2}{3}$	2				
y					$-\frac{1}{2}$		0	3

3. 已知二元一次方程組

$$\begin{cases} y=1-x & (1) \\ 3x+2y=5 & (2) \end{cases}$$

   (1)　求出方程(1)的四個解，其中 x = 1、2、3、4；
   (2)　求出方程(2)的四個解，其中 x = 1、2、3、4；
   (3)　找出這組方程的解；
   (4)　把上面的結果填入下圖。



(第 3 題)

4. 用代入法解下列方程組：

(1) $\begin{cases} y = x + 3 \\ 7x + 5y = 9 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x - 5z = 6 \\ x + 4z = -15 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3p = 5q \\ 2p - 3q = 1 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 9p - 13q + 12 = 0 \\ p = 2 - 3q \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \dfrac{m}{5} - \dfrac{n}{2} = 2 \\ 2m + 3n = 4 \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} 3x - z = 5 \\ 5x + 2z = 25.2 \end{cases}$

5. 用加減法解下列方程組：

(1) $\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2s + 5t = \dfrac{1}{2} \\ 3s - 5t = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 6x + 5z = 25 \\ 3x + 4z = 20 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 5s + 6t = 16 \\ 7s - 9t = 5 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 8u + 3v + 2 = 0 \\ 6u + 5v + 7 = 0 \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 13 \\ \dfrac{y}{3} - \dfrac{z}{4} = 3 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} 2m - 3n = 1 \\ 3m + 5n = 12.9 \end{cases}$　　(8) $\begin{cases} 6.28u - 4v = 0.2 \\ 8u - 5v = 1 \end{cases}$

6. 解下列方程組：

(1) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 3x = 11 - 2y \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3(x-1) = y + 5 \\ 5(y-1) = 3(x+5) \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 5(m-1) = 2(n+3) \\ 2(m+1) = 3(n-3) \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} \dfrac{2u}{3} + \dfrac{3v}{4} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{4u}{5} + \dfrac{5v}{6} = \dfrac{7}{15} \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x+1=5(z+2) \\ 3(2x-5)-4(3z+4)=5 \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} \dfrac{y}{3}-\dfrac{x+1}{6}=3 \\ 2\left(x-\dfrac{y}{2}\right)=3\left(x+\dfrac{y}{18}\right) \end{cases}$

(7) $\begin{cases} v=2.6+9.8t \\ \dfrac{v}{3}-3t=1 \end{cases}$

(8) $\begin{cases} x+y=2800 \\ 96\%\bullet x+64\%\bullet y=2800\times 92\% \end{cases}$

7. 解下列三元一次方程組：

(1) $\begin{cases} 3x-y+2z=3 \\ 2x+y-3z=11 \\ x+y+z=12 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 5x-3y+4z=13 \\ 2x+7y-3z=19 \\ 3x+2y-z=18 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y=2x-7 \\ 5x+3y+2z=2 \\ 3x-4z=4 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 4x+9y=12 \\ 3y-2z=1 \\ 7x+5z=4\dfrac{3}{4} \end{cases}$

5.6　一次方程組的應用

對於某些含有兩個或兩個以上未知數的問題，有時可以用一次方程組來求解。下面我們看幾個例子。

【例 1】 某工地派 48 人去挖土與運土，如果每人每天平均可挖土 5 立方單位或運土 3 立方單位，那麼應怎樣分配挖土與運土的人數，正好能夠使挖出的土可及時運走？

分析： 這個問題裡有兩個未知數—挖土人數與運土人數。未知數與已知數之間有以下的相等關係：

(1)　挖土人數 + 運土人數 = 派出的總人數；
(2)　每天挖土的總方數 = 每天運土的總方數，即
　　$5 \times$ (挖土人數) = $3 \times$ (運土人數)。

如果分別用 x、y 表示挖土人數與運土人數，那麼根據上述相等關係，就可以列出一個二元一次方程組。

解　設應分配 x 人挖土，y 人運土，根據題意，得

$$\begin{cases} x+y=48 & (1) \\ 5x=3y & (2) \end{cases}$$

由(2)，得

$$x=\frac{3}{5}y \qquad (3)$$

把(3)代入(1)，得

$$\frac{3}{5}y+y=48$$

$$8y=240$$

$$\therefore \quad y=30$$

把 $y=30$ 代入(3)，得

$$x=18$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x=18 \\ y=30 \end{cases}$$

答：應分配 18 人挖土，30 人運土。

【例 2】運往某地兩批物資。第一批的重量為 360 T，用 6 節火車加上 15 輛汽車正好裝完；第二批的重量為 440 T，用 8 節火車加上 10 輛汽車正好裝完。請問每節火車與每輛汽車平均各可裝多少 T。

分析：這個問題裡有兩個未知數—每節火車與每輛汽車平均所裝貨物的 T 數。未知數與已知數之間有以下的相等關係：

(1) 6 × (每節火車平均裝貨的 T 數)

+ 15 × (每輛汽車平均裝貨的 T 數) = 360；

(2) 8 × (每節火車平均裝貨的 T 數)

+ 10 × (每輛汽車平均裝貨的 T 數) = 440；

如果分別用 x、y 每節火車與每輛汽車平均裝貨的 T 數，那麼根據上述相等關係，就可以列出一個二元一次方程組。

解 設每節火車平均裝貨 x T，每輛汽車平均裝貨 y T，根據題意，得

$$\begin{cases} 6x+15y=360 & (1) \\ 8x+10y=440 & (2) \end{cases}$$

$(2)\times\frac{1}{2}-(1)\times\frac{1}{3}$，得

$$2x=100$$

$\therefore$ $x=50$

把 $x=50$ 代入(2)，得

$$8\times 50+10y=440$$

$$10y=40$$

$\therefore$ $y=4$

$\therefore$ $\begin{cases} x=50 \\ y=4 \end{cases}$

答：每節火車平均裝貨 50 T，每輛汽車平均裝貨 4 T。

【例 3】 大愛文具公司捐贈一批筆給向上中學，如果每位學生分 6 隻筆，就缺少 200 隻筆；如果每位學生分 5 隻筆，就剩餘 300 隻筆。請問向上中學有多少位學生？大愛文具公司捐贈多少隻筆？

分析： 這個問題裡有兩個未知數一向上中學的學生人數？大愛文具公司捐贈筆的隻數。如果分別用 x、y 表示這兩個未知數，那麼未知數與已知數之間的關係如圖 5-2 所示。

解　設向上中學有 x 位學生、大愛文具公司捐贈 y 隻筆，
根據題意，得

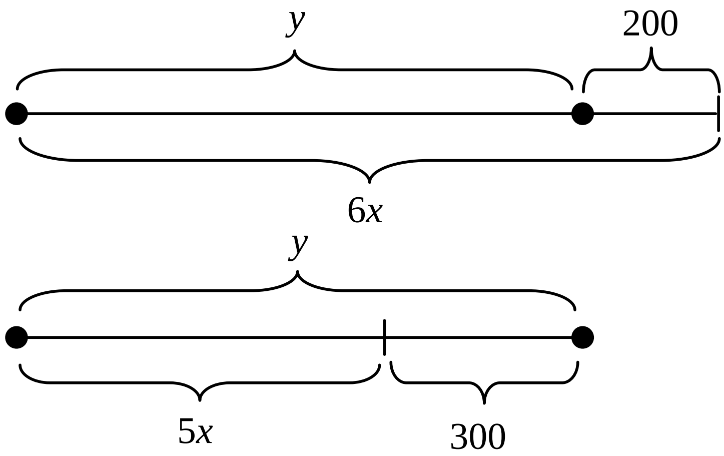


圖 5-2

$$\begin{cases} 6x = y + 200 & (1) \\ 5x = y - 300 & (2) \end{cases}$$

(1)－(2)，得

$$x = 500$$

把 $x = 500$ 代入(1)，得

$$6 \times 500 = y + 200$$

$$\therefore \quad y = 2800$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x = 500 \\ y = 2800 \end{cases}$$

答：向上中學有 500 位學生、大愛文具公司捐贈 2800 隻筆。

練　習

列出一次方程組解下列應用題：

1. 用大小兩台耕耘機耕地，一小時共耕了 30 公畝地。已知大耕耘積的效率是小耕耘機的 1.5 倍，求大小耕耘機各耕了多少公畝地。
2. 某工廠有 28 名工人，生產自行車，每人每天平均能生產車身 12 個或車輪 18 個。應分配多少人生產車身，多少人生產車輪，能夠使出產的車身與車輪剛好配套(一個車身必需配二個車輪)？

練　習

3. 五元與二元硬幣共 100 枚，值 320 元。這兩種硬幣各有多少枚？
4. 一條船的載重量是 520 T，貨艙載貨容積是 2000 m^3。現在裝運甲、乙兩種貨物，甲種貨物每 T 的體積是 2 m^3，乙種貨物每 T 的體積是 8 m^3。這兩種貨物各裝多少 T，才能最大限度地利用這條船的載重量及載貨容積？
5. 某工廠接受一批訂單，按計畫天數進行生產，如果平均每天生產 20 件，就比訂單任務還少 100 件；如果平均每天生產 23 件，就可超過訂單任務 20 件。這批訂單是多少件？原計畫幾天完成？
6. 汽車從甲地到乙地，如果每小時行駛 45 km，就要延誤$1\frac{1}{2}$小時到達；如果每小時行駛 50 km，就可提前$\frac{1}{2}$小時到達，求從甲地到乙地的路程及原計畫行駛的時間。

【例 4】用濃度為 5%與 53%的兩種果汁混合配製成濃度為 25%的果汁 300 kg，需用這兩種果汁各多少 kg？

分析：這個問題裡有兩個未知數—濃度為 5%果汁的 kg 數與濃度為 53%果汁的 kg 數。如果分別用 x、y 表示這兩個未知數，那麼未知數與已知數之間的關係如下表所示：

濃度 / 重量	5%的果汁	53%的果汁	混合成 25%的果汁
果汁的重量 (kg)	x	y	300
所含純果汁的重量 (kg)	$5\% \cdot x$	$53\% \cdot y$	$25\% \cdot 300$

根據下面的相等關係，可以列出一個二元一次方程組：

混合前果汁的總重量 ＝ 混合後果汁的總重量；
混合前溶液中所含純果汁的重量 ＝ 混合後溶液中所含純果汁的重量。

解 設需用 5%的果汁 x kg，53%的果汁 y kg，
根據題意，得

$$\begin{cases} x+y=300 & (1) \\ 5\%\bullet x+53\%\bullet y=25\%\bullet 300 & (2) \end{cases}$$

化簡(2)，得

$$5x+53y=7500 \qquad (3)$$

(3)－(1) × 5，得

$$48y=6000$$

$$\therefore \quad y=125$$

把 $y=125$ 代入(1)，得

$$x+125=300$$

$$\therefore \quad x=175$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x=175 \\ y=125 \end{cases}$$

答：需用 5%的果汁 175 kg，53%的果汁 125 kg。

【例 5】在代數式 $px+q$ 中，當 $x=2$ 時，它的值是 -1；當 $x=3$ 時，它的值是 1。求 p、q 的值。

分析： 這裡的未知數是 p、q。把 $x=2$ 及 $x=3$ 代入 $px+q$，分別得值 -1、1，這就得到一個關於 p、q 的二元一次方程組。解這個方程組，就可以求出 p、q 的值。

解 根據題意，得

$$\begin{cases} 2p+q=-1 & (1) \\ 3p+q=1 & (2) \end{cases}$$

(2)－(1)，得

$$p=2$$

把 $p=2$ 代入(1)，得

$$2\times 2+q=-1$$

$$\therefore \quad q=-5$$

答： $p=2$ ， $q=-5$ 。

練 習

列出一次方程組解下列應用題：

1. 一種果汁的濃度是 30%，另一種果汁的濃度是 6%，要配製成濃度是 10%的果汁 60 kg，應取這兩種果汁多少 kg？

2. 用含糖 16%的糖水與含蘇打 0.1%的蘇打水混合配製成含糖 0.5%的飲料 6600 cc，需要這種糖水與蘇打水各多少 cc(精確到 10 cc)？

3. 在代數式 $ax+by$ 中，當 $x=5$、$y=2$ 時，它的值是 7；當 $x=4$、$y=3$ 時，它的值是 0。求 a、b 的值。

4. 在代數式 x^2+mx+n 中，當 $x=3$ 時，它的值是 5；當 $x=-4$ 時，它的值是 -9 。求 m、n 的值。

習 題 十 七

列出一次方程組解下列應用題：

1. 一艘輪船順流航行(此時航速 = 船在靜水中的速度 + 水速)，每小時 20 km；逆流航行(此時航速 = 船在靜水中的速度－水速)，每小時 16 km。求輪船在靜水中的速度及水流的速度。

2. 某校學生 100 人到第一、第二間教室參加活動。到第一間教室的人數比到第二間教室的人數之 2 倍少 8 人。到兩間教室參加活動的人數各是多少？

3. 用白鐵皮做罐頭盒，每張鐵皮可裁盒身 16 個，或裁盒底 43 個，一個盒身與兩個盒底配成一個罐頭盒，現有 150 張白鐵皮，用多少張裁盒身，多少張裁盒底，正好能夠配成整套罐頭盒？

4. 某農莊有土地 870 公畝，計畫將 182 公畝山坡地開闢為果園，其餘的土地種植稻米與蔬菜，種稻米的土地公畝數是種蔬菜的 $4\frac{1}{3}$ 倍。求計畫種稻米與蔬菜的土地各是多少公畝。

5. 一批玩偶共 840 個。如果甲先做 4 天，乙加入合做，那麼再做 8 天正好完成；如果乙先做 4 天，甲加入合做，那麼再做 9 天也正好完成。兩人每天各做幾個玩偶？

6. 甲、乙兩人從相距 18 km 的兩地同時出發，相向而行，$1\frac{4}{5}$ 小時相遇。如果甲比乙先出發 $\frac{2}{3}$ 小時，那麼在乙出發後 $1\frac{1}{2}$ 小時兩人相遇。求兩人每小時各走多少 km。

7. 甲、乙兩人從同一地點出發，同向而行，甲騎自行車，乙步行。如果乙先走 12 km，那麼甲用 1 小時就能追上乙；如果乙先走 1 小時，那麼甲只用 $\frac{1}{2}$ 小時就能追上乙。求兩人的速度各是多少 km/h。

8. 某公司前年的營業額比總支出多 500 萬元。去年的營業額比總支出多 950 萬元。已知去年的營業額比前年增加 15%，去年的總支出比前年少 10%，求前年的營業額及總支出。

9. 某農莊的兩塊稻田原來可以收稻米 5730 kg。使用新品種後，這兩塊地可以收稻米 6240 kg，其中第一塊地收成增加了 10%，第二塊地的收成增加了 8%。求這兩塊地原來各可以收稻米多少 kg。

10. 甲、乙兩工廠原計畫在上個月共生產機器 360 台，結果甲廠完成了計畫的 112%，乙廠完成了計畫的 110%，兩廠共生產了機器 400 台。上個月兩廠各超額生產機器多少台？

11. 一列火車裝運一批貨物，原來每節車廂平均裝 46 T，結果有 100 T 的貨物未能裝進去；後來改進裝車方法，使每節車廂多裝 4 T，結果這批貨物裝完後，還剩下兩節空車廂，這列火車有多少節車廂？這批貨物有多少 T？

12. 某麵包店用麵粉，如果每天用 130 kg，按預計天數計算，就缺少 60 kg；如果每天用 120 kg，那麼到期後還可剩餘 60 kg，此麵包店存有麵粉多少 kg？預計用多少天？

13. 已知梯形面積為 42 cm^2，高為 6 cm，它的下底比上底之 2 倍少 1 cm。梯形的上底、下底各為多少 cm？

14. 把含酒精 5%的葡萄酒與含酒精 8%的葡萄酒混合製成含酒精 6%的葡萄酒 600 g，應取兩種葡萄酒各多少 g？

15. 要配製濃度為 10%的柳橙汁 1000 kg，已有濃度為 60%的柳橙汁 85 kg，還需濃度為 98%的柳橙汁與水各多少 kg？

16. (1) 在等式 $y = kx + b$ 中，當 x=0 時，y=2；當 x=3 時，y=3。求 k、b 的值

(2) 已知

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}、\begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases}、\begin{cases} x = -5 \\ y = 9 \end{cases}$$

三對數值都能滿足 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$。求 D、E、F 的值。

小　结

一、本章主要內容是二元一次方程組的解法與它的應用，以及三元一次方程組的解法舉例。

二、解一次方程組可以通過逐步「消元」，變「多元」為「一元」，例如：三元一次方程組$\xrightarrow{\text{消元}}$二元一次方程組$\xrightarrow{\text{消元}}$一元一次方程，從而實現由「未知」到「知」的轉化。

三、本章介紹了二元一次方程組的兩種消元之方法：

(1)　代入法：把其中一個方程的某一個未知數用含另一個未知數的代數式表示，然後代入另一個方程，就可以消去這個未知數。

(2)　加減法：先使兩個方程中的某一個未知數之係數的絕對值相等，然後把方程的兩邊分別相加或相減，就可以消去這個未知數。

對於多元的一次方程組也可以用以上的方法逐步消元。

一般說來，當某個未知數的係數為 1 時，用代入法比較簡便；當兩個方程中有一個未知數的係數之絕對值相等或成整數倍時，用加減法比較簡便。

四、對於含有多個未知數的問題，利用方程組來解，在列方程時常常比列一元一次方程容易一些。列方程時，一般地說，選定幾個未知數，就要根據問題中的相等關係列出幾個方程。解由這些方程組成的方程組，求出未知數的值，並且根據問題的實際意義，檢查求得的值是不是合理，即可得出問題的答案。

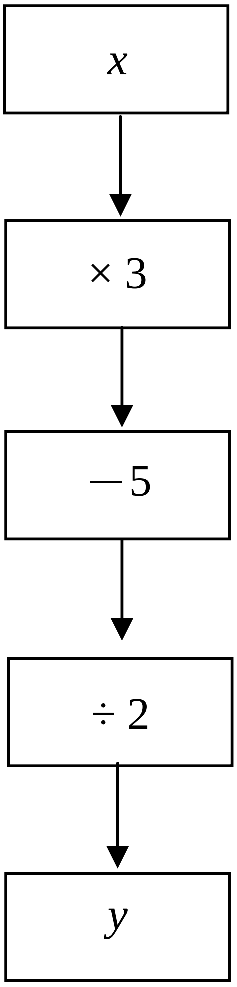
複習參考題五

1. (1) 已知二元一次方程

$$3x-2y=5$$

把它變形為

$$y=\frac{3x-5}{2}$$



我們可以根據給定的 x 值，按左邊的程序框圖進行計算，求出對應的 y 值。按照這個程序計算出右表的 y 值。

x	y
1	-1
2	$\frac{1}{2}$
3	
0	
-1	
-2	
-3	

(2) 已知二元一次方程 $y-4x=7$。仿照上題編出計算 y 的程序框圖，並算出 x = 1、2、0、-1、-2 時的對應之 y 值。

2. (1) 有一個兩位數，它的十位數碼與個位數碼之和為 5，求出所有符合這個條件的兩位數；

(2) 求出方程 $2x+y=9$ 在正整數範圍內的解。

3. (1) 已知

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 7 \end{cases}$$

滿足方程 $kx - 2y = 1$，求 k 的值。

(2) 已知

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

是方程組

$$\begin{cases} ax - 3y = 1 \\ x + by = 5 \end{cases}$$

的解，求 a、b 的值。

4. 判斷方程組

$$\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$$

的解是不是方程 $5x - y = 6$ 的一個解。

5. (1) 解不等式

$$2x - 3 > 5(x - 3)$$

$$\frac{x+2}{4} - \frac{2x-3}{6} < 1$$

(2) 這兩個不等式的解集有公共部分嗎？如果有，就把它在數軸上表示出來。

6. 解下列方程組：

(1) $\begin{cases} 110 = 5I_1 - I_2 \\ 110 = 9I_2 - I_1 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 7I_1 - 3I_2 = 5 \\ -5I_1 + 6I_2 = -6 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 2 \\ 0.2x + 0.3y = 2.8 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 0.2x - 0.5y = 0 \\ 5(x+1) - 3(y+17) = 0 \end{cases}$

(5) $3x+2y=5y+12x=-3$

(提示：先把它寫成方程組

$$\begin{cases} 3x+2y=-3 \\ 5y+12x=-3 \end{cases}$$

的形式)

(6) $\dfrac{2v+t}{3}=\dfrac{3v-2t}{8}=3$

(7) $\begin{cases} \dfrac{m+n}{3}-\dfrac{n-m}{4}=2 \\ 4m+\dfrac{n}{3}=14 \end{cases}$

(8) $\begin{cases} 7+\dfrac{x-3y}{4}=2x-\dfrac{y+5}{3} \\ \dfrac{10(x-y)-4(1-x)}{3}=y \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=6 \\ z+x=3 \end{cases}$

(10) $\begin{cases} x+y-z=11 \\ y+z-x=5 \\ z+x-y=1 \end{cases}$

7. 解下列關於 x、y 的方程組：

(1) $\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y=x+c \\ x+2y=5c \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=3a \\ x-y=a \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x+y-n=0 \\ 5x-3y+n=0 \end{cases}$

列出一次方程組解下列應用題：

8. 有一個兩位數，十位數碼與個位數碼的和是 13，如果把這兩個數碼的位置對換，那麼所得的新數比原數小 27。求這個兩位數。

9. 有一個兩位數，個位數碼比十位數碼大 5，如果把這兩個數碼的位置對換，那麼所得的新數與原數之和為 143。求這個兩位數。

10. 由實驗得出，一塊重 148 kg 的銅銀合金在水中減輕$14\frac{2}{3}$ kg。已知 21 kg 的銀在水中減輕 2 kg，9 kg 的銅在水中減輕 1 kg。這塊銅銀合金內含銀、銅各多少 kg？

11. (我國古代問題)[1]有大小兩種盛米的容器，已經知道 5 個大容器加上 1 個小容器可以盛米 3 斛(斛，音ㄏㄨˊ，是古代的一種容量單位)，1 個大容器加上 5 個小容器可以盛米 2 斛。問 1 個大容器、1 個小容器各可以盛米多少斛？

12. (1) 在公式$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$中，當 t = 1 時，s = 13；當 t = 2 時，s = 42。求v_0、a 的值，並求當 t = 3 時，s 的值。

(2) 在代數式ax^2+bx+c中，當 x =1、2、3 時，代數式的值分別是 0、3、28。求 a、b、c 的值。當$x=-1$時，這個代數式的值是多少？

---

[1] 這道題選自古代算書《九章算術》卷七「盈不足」。原題是：「今有大器五小器一容三斛，大器一小器五容二斛。問大小器各容幾何。答曰：大器二十四分斛之十三，小器二十四分斛之七」。