第六章　整式的乘除

一、整式的乘法

6.1　同底數的冪之乘法

我們已經學過整式的加減，現在進一步學習整式的乘除。為此，先研究同底數的冪之乘法。我們來計算

$$10^3\times10^2\ ，\ 2^3\times2^2\ 。$$

根據乘方的意義，得

$$\begin{aligned}10^3\times10^2&=(10\times10\times10)\times(10\times10)\\&=10\times10\times10\times10\times10\\&=10^5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2^3\times2^2&=(2\times2\times2)\times(2\times2)\\&=2\times2\times2\times2\times2\\&=2^5\end{aligned}$$

從上面看到，10^3是 3 個 10 連乘，10^2是 2 個 10 連乘，所以$10^3\times10^2$是 5 個 10 連乘。同樣，2^3是 3 個 2 連乘，2^2是 2 個 2 連乘，所以$2^3\times2^2$是 5 個 2 連乘。也就是

$$10^3\times10^2=10^{3+2}$$

$$2^3\times2^2=2^{3+2}$$

同理，

$$\begin{aligned}a^3\bullet a^2&=(aaa)(aa)\\&=aaaaa\\&=a^5\end{aligned}$$

也就是

$$a^3\bullet a^2=a^{3+2}$$

一般地，如果 m、n 都是正整數，那麼

$$a^m\bullet a^n=(\underbrace{aa\cdots a}_{m\text{個}a})(\underbrace{a\cdots a}_{n\text{個}a})=\underbrace{aa\cdots a}_{(m+n)\text{個}a}=a^{m+n}$$

即

$$\boxed{a^m \bullet a^n = a^{m+n}}$$

這就是說，**同底數的冪相乘，底數不變，指數相加**。

當三個或三個以上同底數的冪相乘時，也具有這一性質。例如

$$a^m \bullet a^n \bullet a^p = a^{m+n+p} \quad (m、n、p \text{ 都是正整數})^2$$

【例 1】 計算：

(1) $10^7 \times 10^4$；　(2) $x^2 \bullet x^5$；

(3) $y \bullet y^2 \bullet y^3$；　(4) $-a^2 \bullet a^6$。

解

(1) $10^7 \times 10^4 = 10^{7+4} = 10^{11}$；

(2) $x^2 \bullet x^5 = x^{2+5} = x^7$；

(3) $y \bullet y^2 \bullet y^3 = y^{1+2+3} = y^6$；

(4) $-a^2 \bullet a^6 = -a^{2+6} = -a^8$。

【例 2】 計算：　(1) $x^n \bullet x^2$；　(2) $y^m \bullet y^{m+1}$

解

(1) $x^n \bullet x^2 = x^{n+2}$；

(2) $y^m \bullet y^{m+1} = y^{m+(m+1)} = y^{2m+1}$。

【例 3】 把下列各式化成 $(p+q)^n$ 或 $(s-t)^n$ 的形式。

(1) $(p+q)^3 \bullet (p+q)^2$；

(2) $(s-t)^2 \bullet (s-t) \bullet (s-t)^4$；

(3) $(p+q)^m \bullet (p+q)^n$。

分析： 把 $(p+q)$ 或 $(s-t)$ 看作底數 a，就可以運用同底數的冪相乘之性質來進行計算。

解

(1) $(p+q)^3 \bullet (p+q)^2 = (p+q)^{3+2} = (p+q)^5$；

---

[2] 本章所有的冪指數都是正整數。

(2) $(s-t)^2 \bullet (s-t) \bullet (s-t)^4 = (s-t)^{2+1+4} = (s-t)^7$；

(3) $(p+q)^m \bullet (p+q)^n = (p+q)^{m+n}$。

練　習

1. (口答) 計算：

   (1) $10^5 \bullet 10^6$；(2) $s^5 \bullet s^8$；(3) $a^7 \bullet a^3$；(4) $y^3 \bullet y^2$；

   (5) $b^5 \bullet b$；(6) $x^4 \bullet x^4 \bullet x$；(7) $a^n \bullet a$；(8) $x^n \bullet x^n$。

2. 計算：

   (1) 10×10^8；(2) $a^4 \bullet a^6$；(3) $x^5 \bullet x^5$；(4) $y^{12} \bullet y^6$；

   (5) $x^{10} \bullet x$；(6) $-b^3 \bullet b^7$；(7) $y^4 \bullet y^3 \bullet y^2 \bullet y$；

   (8) $x^5 \bullet x^6 \bullet x^3$；(9) $10^2 \bullet 10^n$；(10) $a^n \bullet a^{2n}$；

   (11) $y^{m+1} \bullet y^{m-1}$；(12) $(-2)^2 \bullet (-2)^3$；(13) $y^n \bullet y \bullet y^{n+1}$。

3. 把下列各式化成$(x+y)^n$的形式：

   (1) $(x+y)^2 \bullet (x+y)^2$；(2) $(x+y)^3 \bullet (x+y)$；

   (3) $(x+y)^3 \bullet (x+y) \bullet (x+y)^2$；(4) $(x+y)^{m+1} \bullet (x+y)^{m+n-1}$。

4. 下面的計算對不對，為什麼？如果不對，應怎樣改正？

   (1) $b^5 \bullet b^5 = 2b^5$；(2) $x^5 + x^5 = x^{10}$；

   (3) $c \bullet c^3 = c^3$；(4) $m^3 \bullet m^2 = m^5$。

6.2　單項式的乘法

我們學了同底數的冪之乘法以後，就可以進一步學習單項式的乘法了。我們來計算

$$2x^2y \bullet 3xy^2 \text{、} 4a^2x^5 \bullet (-3a^3bx^2) \text{。}$$

運用乘法交換律、結合律，可把各因式的係數結合成一組，相同的字母結合成一組，然後相乘，即

$$\begin{aligned} 2x^2y \bullet 3xy^2 &= (2\times 3)(x^2 \bullet x)(y \bullet y^2) \\ &= 6x^3y^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4a^2x^5 \bullet (-3a^3bx^2) &= [4 \bullet (-3)](a^2a^3) \bullet b \bullet (x^5x^2) \\ &= -12a^5bx^7 \end{aligned}$$

一般地，**單項式相乘，用它們的係數之積作為積的係數，對於相同的字母，用它們的指數之和作為積裡這個字母的指數，對於只在一個單項式裡含有的字母，則連同它的指數作為積的一個因式**。

【例 1】 計算： (1) $4n^3 \bullet 5n^2$； (2) $(-5a^2b^3)(-3a)$；
(3) $(4\times10^5)(5\times10^6)(3\times10^4)$。

解 (1) $4n^3 \bullet 5n^2 = (4\times5)(n^3n^2) = 20n^5$；

(2) $(-5a^2b^3)(-3a) = [(-5)\bullet(-3)]\bullet(a^2a)\bullet b^3 = 15a^3b^3$；

(3) $(4\times10^5)(5\times10^6)(3\times10^4) = (4\times5\times3)(10^5\times10^6\times10^4)$
$= 60\times10^{15}$。

注意：用含 10 的冪來記一個數時，通常把前面一個因數寫成一位整數或含有一位整數的小數。上面的計算結果 60×10^{15}，也可以寫成 $6\times10\times10^{15}$，即 6×10^{16}。

【例 2】 計算：

(1) $\dfrac{1}{3}xy^2 \bullet 9x^2y$； (2) $\dfrac{2}{3}x^3y^2 \bullet \left(-\dfrac{3}{4}x^2y^3\right)$；

(3) $(-5a^{n+1}b)(-2a)$； (4) $(-3ab)\bullet(-a^2c)\bullet 6ab^2$。

解 (1) $\dfrac{1}{3}xy^2 \bullet 9x^2y = \left(\dfrac{1}{3}\times9\right)(x\bullet x^2)(y^2\bullet y) = 3x^3y^3$；

(2) $\dfrac{2}{3}x^3y^2 \bullet \left(-\dfrac{3}{4}x^2y^3\right) = \left[\dfrac{2}{3}\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)\right]x^5y^5 = -\dfrac{1}{2}x^5y^5$；

(3) $(-5a^{n+1}b)(-2a) = [(-5)\bullet(-2)](a^{n+1}\bullet a)\bullet b = 10a^{n+2}b$；

(4) $(-3ab)\bullet(-a^2c)\bullet 6ab^2 = [(-3)\bullet(-1)\bullet 6]a^4b^3c$
$= 18a^4b^3c$。

【例 3】 光的速度每秒約是 3×10^5 km，太陽光射到地球上需要的時間約是 5×10^2 秒，地球與太陽的距離約是多少 km？

解　$(3\times10^5)\times(5\times10^2)=15\times10^7=1.5\times10^8$ 。

答：地球與太陽的距離約是1.5×10^8 km。

練　習

1. 計算：
   (1) $3x^5\bullet5x^3$ ；　(2) $4y\bullet(-2xy^3)$ ；
   (3) $(-2.5x^2)\bullet(-4x)$ ；　(4) $\frac{2}{5}x^2y^3\bullet\frac{5}{16}xyz$ ；
   (5) $(-6a^{n+2})\bullet3a^nb$ ；　(6) $8x^ny^{n+1}\bullet\frac{3}{2}x^2y$ ；
   (7) $(-3x)\bullet2xy^2\bullet4y$ ；　(8) $(-4x^2y)\bullet(-x^2y^2)\bullet\frac{1}{2}y^3$ 。
2. 一種電子計算機每秒可作10^{12}次運算。它工作5×10^2秒可作多少次的運算？
3. 下面的計算對不對，為什麼？如果不對，應怎樣改正？
   (1) $4a^3\bullet2a^2=8a^5$ ；　(2) $2x^3\bullet3x^4=5x^7$ ；
   (3) $3x^2\bullet4x^2=12x^2$ ；　(4) $3y^3\bullet5y^3=15y^9$ 。

6.3　冪的乘方

我們來計算

$$(a^4)^3 \text{ 、 } (a^3)^5 \text{ 。}$$

$(a^4)^3$是把冪a^4三次方。如果把a^4看作是底數，那麼根據乘方的意義與同底數的冪之乘法性質，得

$$(a^4)^3=a^4\bullet a^4\bullet a^4=a^{4+4+4}=a^{4\times3} \text{ 。}$$

同樣，得

$$(a^3)^5=a^3\bullet a^3\bullet a^3\bullet a^3\bullet a^3=a^{3+3+3+3+3}=a^{3\times5} \text{ 。}$$

也就是

$$(a^4)^3=a^{4\times3}$$
$$(a^3)^5=a^{3\times5}$$

一般地，如果 m、n 都是正整數，那麼

$$(a^m)^n = \overbrace{a^m \bullet a^m \bullet \cdots \bullet a^m}^{n\text{個}a^m} = a^{\overbrace{m+m+\cdots m}^{n\text{個}m}} = a^{mn}$$

即

$$\boxed{\mathbf{(a^m)^n = a^{mn}}}$$

這就是說，**冪的乘方，底數不變，指數相乘**。

【例 1】 計算：

(1) $(10^7)^2$；　(2) $(x^3)^2$；　(3) $(z^4)^4$。

解

(1) $(10^7)^2 = 10^{7\times2} = 10^{14}$；

(2) $(x^3)^2 = x^{3\times2} = x^6$；

(3) $(z^4)^4 = z^{4\times4} = z^{16}$。

【例 2】 計算： (1) $(a^m)^2$；　(2) $(b^3)^n$。

解

(1) $(a^m)^2 = a^{m\times2} = a^{2m}$；

(2) $(b^3)^n = b^{3\times n} = b^{3n}$。

【例 3】 計算： (1) $[(x+y)^2]^4$；　(2) $(a^2)^4 \bullet (a^3)^3$。

分析： 在第(1)小題中，把 $(x+y)^2$ 看作一個字母的冪進行計算；在第(2)小題中，先分別計算 $(a^2)^4$、$(a^3)^3$，然後根據同底數的冪之乘法性質進行計算。

解

(1) $[(x+y)^2]^4 = (x+y)^{2\times4} = (x+y)^8$；

(2) $(a^2)^4 \bullet (a^3)^3 = a^8 \bullet a^9 = a^{17}$。

練　習

1. (口答) 計算：

(1) $(x^4)^2$；　(2) $x^4 \bullet x^2$；　(3) $(y^5)^5$；

(4) $y^5 \bullet y^5$；　(5) $(a^m)^3$；　(6) $a^m \bullet a^3$。

練　習

2. (口答) 計算：

(1) $(10^3)^3$；　(2) $(x^4)^3$；　(3) $(a^2)^5$；

(4) $-(y^2)^4$；　(5) $-(x^3)^6$；　(6) $(s^m)^5$。

(7) $[(x+a)^3]^2$；　(8) $[(x+y)^n]^2$；　(9) $(a^2)^3 \bullet a^5$。

(10) $(a^2)^5 \bullet (a^4)^4$；　(11) $(b^3)^2 \bullet (b^2)^3$；　(12) $(c^2)^n \bullet c^{n+1}$。

3. 下面的計算對不對，為什麼？如果不對，應怎樣改正？

(1) $(a^5)^2 = a^7$；　(2) $a^5 \bullet a^2 = a^{10}$；

(3) $(x^4)^7 = x^{28}$；　(4) $(a^{n+1})^2 = a^{2n+1}$。

6.4　積的乘方

我們來計算

$$(ab)^3 \text{、} (ab)^4 \text{。}$$

根據乘方的意義與乘法交換律、結合律，得

$$(ab)^3 = (ab) \bullet (ab) \bullet (ab) = (aaa) \bullet (bbb) = a^3b^3$$

$$(ab)^4 = (ab) \bullet (ab) \bullet (ab) \bullet (ab) = (aaaa) \bullet (bbbb) = a^4b^4$$

一般地，如果 n 是正整數，那麼

$$(ab)^n = \overbrace{(ab) \bullet (ab) \bullet \cdots \bullet (ab)}^{n\text{個}\,ab} = \overbrace{(a \bullet a \bullet \cdots \bullet a)}^{n\text{個}\,a} \bullet \overbrace{(b \bullet b \bullet \cdots \bullet b)}^{n\text{個}\,b} = a^nb^n$$

即

$$\boxed{(ab)^n = a^nb^n}$$

這就是說，**積的乘方，等於把積的每一個因式分別乘方，再把所得的冪相乘**。

當三個或三個以上的積相乘時，也具有這一性質。例如

$$(abc)^n = a^nb^nc^n \text{。}$$

【例 1】 計算：

(1) $(xy)^5$；　(2) $(2a)^4$；　(3) $(-3x)^3$；

(4) $(-5ab)^2$；　(5) $(-xy)^6$；　(6) $(4xy)^2$。

解　(1)　$(xy)^5 = x^5 y^5$；

(2)　$(2a)^4 = 2^4 a^4 = 16a^4$；

(3)　$(-3x)^3 = (-3)^3 x^3 = -27x^3$；

(4)　$(-5ab)^2 = (-5)^2 a^2 b^2 = 25a^2 b^2$；

(5)　$(-xy)^6 = (-1)^6 x^6 y^6 = x^6 y^6$；

(6)　$(4xy)^2 = 4^2 x^2 y^2 = 16x^2 y^2$。

【例 2】計算：　(1)　$(xy^2)^2$；　(2)　$(a^2b^2)^4$；

(3)　$(-2xy^3)^4$；　(4)　$\left(\dfrac{2}{3}a\right)^2$。

解　(1)　$(xy^2)^2 = x^2(y^2)^2 = x^2 y^4$；

(2)　$(a^2b^2)^4 = (a^2)^4 \bullet (b^2)^4 = a^8 b^8$；

(3)　$(-2xy^3)^4 = (-2)^4 \bullet x^4 \bullet (y^3)^4 = 16x^4 y^{12}$；

(4)　$\left(\dfrac{2}{3}a\right)^2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \bullet a^2 = \dfrac{4}{9}a^2$。

【例 3】計算：　(1)　$(2x)^3 \bullet (-5x^2 y)$；

(2)　$(3xy^2)^2 + (-4xy^3) \bullet (-xy)$。

解　(1)　$(2x)^3 \bullet (-5x^2 y) = 8x^3 \bullet (-5x^2 y) = -40x^5 y$；

(2)　$(3xy^2)^2 + (-4xy^3) \bullet (-xy) = 9x^2 y^4 + 4x^2 y^4 = 13x^2 y^4$。

練　習

1. (口答) 下列各式的結果是什麼？

(1)　$(ab)^6$；　(2)　$(xy)^4$；　(3)　$(2m)^3$；

(4)　$(5x^2)^2$；　(5)　$(ab^2)^3$；　(6)　$(-xy)^3$。

2. 計算：

(1)　$(st)^3$；　(2)　$(4a^3)^2$；　(3)　$(-2x^2 y)^2$；　(4)　$\left(\dfrac{1}{2}c^2 d\right)^3$；

(5)　$(2\times 10^2)^2$；　(6)　$(x^2 \bullet x \bullet x^5)^3$；　(7)　$(ab^2)^3 \bullet (ab^2)^2$。

(8)　$(-3x^5)^3 \bullet x^2$；　(9)　$a \bullet (ab^2)^2$；　(10)　$(3y)^2 \bullet (y^2)^3$。

練　習

3. 計算：

(1) $a^2 \bullet (a^2b^3)^2$；　　(2) $(3m)^2 \bullet \left(-\frac{1}{2}mn\right)^3$；

(3) $2a^2 \bullet (-2a)^3 + 2a^4 \bullet 5a$；　　(4) $10a^3 \bullet \frac{3}{5}b + (-3.5a^2) \bullet (ab)^2$。

4. 某工廠要作一個稜長為 4×10^2 cm 的正方體油箱，求這個油箱的容積。

5. 下面的計算對不對？為什麼？如果不對，應怎樣改正？

(1) $(ab^2)^2 = ab^4$；　　(2) $(3xy)^3 = 9x^3y^3$；

(3) $(-2a^2)^2 = -4a^4$；　　(4) $\left(\frac{4}{5}x^2y^3\right)^3 = \frac{64}{125}x^6y^9$。

6.5　單項式與多項式相乘

現在我們來研究單項式與多項式相乘的問題。我們來計算

$$m(a+b+c)\text{。}$$

運用乘法分配律，可得

$$m(a+b+c) = ma + mb + mc\text{。}$$

這個結果也可從圖 6-1 看出[3]。

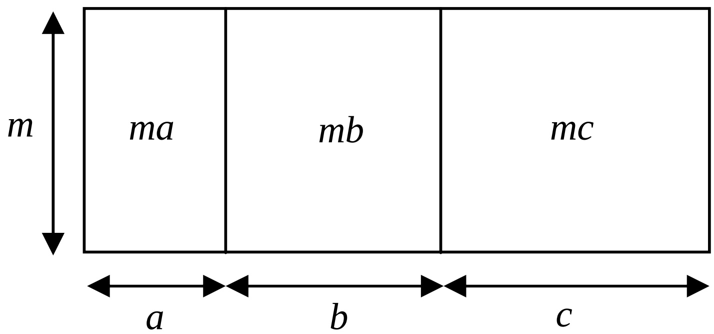


圖 6-1

[3] 圖 6-1 中的 m、a、b、c 都表示正數。實際上，公式 $m(a+b+c) = ma + mb + mc$ 中的 m、a、b、c 還可以表示負數及零。

　　一般地，**單項式與多項式相乘，就是用單項式去乘多項式的每一項，再把所得的積相加。**

【例 1】計算：

(1) $(-4x)\bullet(2x^2+3x-1)$；

(2) $\left(\frac{2}{3}a^2b-2ab+\frac{4}{3}b\right)\bullet\frac{1}{2}ab$。

解 (1)
$$(-4x)\bullet(2x^2+3x-1)$$
$$=(-4x)\bullet(2x^2)+(-4x)\bullet(3x)+(-4x)\bullet(-1)$$
$$=-8x^3-12x^2+4x$$

(2)
$$\left(\frac{2}{3}a^2b-2ab+\frac{4}{3}b\right)\bullet\frac{1}{2}ab$$
$$=\left(\frac{2}{3}a^2b\right)\bullet\left(\frac{1}{2}ab\right)+(-2ab)\bullet\left(\frac{1}{2}ab\right)+\left(\frac{4}{3}b\right)\bullet\left(\frac{1}{2}ab\right)$$
$$=\frac{1}{3}a^3b^2-a^2b^2+\frac{2}{3}ab^2$$

【例 2】化簡：

(1) $(-3xy)\bullet 5x^2y+6x^2\bullet\left(\frac{7}{2}xy^2-2y^2\right)$；

(2) $-2a^2\bullet\left(\frac{1}{2}ab+b^2\right)-5ab\bullet(a^2-1)$。

解 (1)
$$(-3xy)\bullet 5x^2y+6x^2\bullet\left(\frac{7}{2}xy^2-2y^2\right)$$
$$=-15x^3y^2+21x^3y^2-12x^2y^2$$
$$=6x^3y^2-12x^2y^2$$

(2)
$$-2a^2\bullet\left(\frac{1}{2}ab+b^2\right)-5ab\bullet(a^2-1)$$
$$=-a^3b-2a^2b^2-5a^3b+5ab$$
$$=-6a^3b-2a^2b^2+5ab$$

練　習

1. 計算：

(1) $(ab)^2 \bullet (2ab^2)^3$；　(2) $3k \bullet (kh^2)^2$；

(3) $3(2x+1)$；　(4) $-4\left(\dfrac{3}{2}y-5\right)$；

(5) $(x-3y)(-6x)$；　(6) $5x(2x^2-3x+4)$；

(7) $\left(5a^2-\dfrac{4}{9}a+1\right)\bullet(-3a^2)$；　(8) $\left(-x^3y-4x^2y^2+\dfrac{5}{6}y^4\right)\bullet\dfrac{3}{2}xy$

2. 化簡：

(1) $(-a)^2 \bullet (-2ab)+3a^2 \bullet \left(ab-\dfrac{1}{3}b-1\right)$；

(2) $x-\dfrac{1}{2}(x+1)+\dfrac{1}{3}(x-1)$；

(3) $3a(2a-5)+2a(1-3a)$；

(4) $x(x^2+3)+x^2(x-3)-3x(x^2-x-1)$；

(5) $3xy\left[6xy-3\left(xy-\dfrac{1}{2}x^2y\right)\right]$。

6.6　多項式的乘法

現在我們來研究多項式的乘法。我們來計算

$$(a+b)(m+n)\text{ 。}$$

這是多項式乘以多項式。先把 $(m+n)$ 看成一個單項式，運用單項式與多項式相乘的法則，得

$$(a+b)(m+n)=a(m+n)+b(m+n)\text{ 。}$$

再運用單項式與多項式相乘的法則，就得

$$\begin{aligned}(a+b)(m+n)&=a(m+n)+b(m+n)\\&=am+an+bm+bn\end{aligned}$$

即

$$(a+b)(m+n)$$
$$=am+an+bm+bn$$

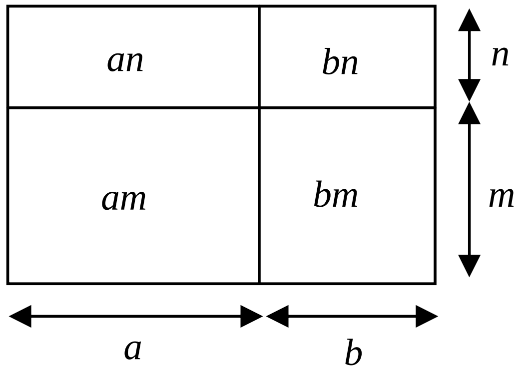


圖 6-2

這個結果也可從圖 6-2 明顯地反映出來。

一般地，**多項式與多項式相乘，先用一個多項式的每一項乘以另一個多項式的每一項，再把所得的積相加。**

【例 1】計算：(1) $(x+2y)(5a+3b)$；
(2) $(2x-3)(x+4)$；
(3) $(3x+y)(x-2y)$。

$\boxed{解}$ (1)

$$(x+2y)(5a+3b)=x\bullet 5a+x\bullet 3b+2y\bullet 5a+2y\bullet 3b$$
$$=5ax+3bx+10ay+6by$$

(2) $(2x-3)(x+4)=2x^2+8x-3x-12$
$$=2x^2+5x-12$$

(3) $(3x+y)(x-2y)=3x^2-6xy+xy-2y^2$
$$=3x^2-5xy-2y^2$$

【例 2】計算：(1) $\left(-\frac{a}{2}+3b^2\right)(a^2-2b)$；
(2) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$。

$\boxed{解}$ (1) $\left(-\frac{a}{2}+3b^2\right)(a^2-2b)=-\frac{a^3}{2}+ab+3a^2b^2-6b^3$

(2) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$$= x^3 - x^2y + xy^2 + x^2y - xy^2 + y^3$$
$$= x^3 + y^3$$

練　習

1. (口答) 計算：
   (1) $(m+n)(u+v)$；　(2) $(x+y)(a-b)$；
   (3) $(p-q)(r+s)$；　(4) $(a-b)(c-d)$。
2. 計算：
   (1) $(2n+6)(n-3)$；　(2) $(2x+3)(3x-1)$；
   (3) $(2a-3b)(a+5b)$；　(4) $(3x-2y)(3x+2y)$；
   (5) $(2a+3)\left(\dfrac{3}{2}b-5\right)$；　(6) $(2x+5)(2x+5)$。
3. 計算：
   (1) $(x+1)(x^2-2x+3)$；　(2) $(x-1)(x^2+x+1)$；
   (3) $(4x-3)(5x^2-4x+7)$；　(4) $(3x+2)(3x-2)(x^2-1)$；
   (5) $(3a-2)(a-1)+(a+1)(a+2)$；
   (6) $(2x^2-1)(x-4)-(x^2+3)(2x-5)$。

【例 3】計算：　(1)　$(x+2)(x+5)$；　(2)　$(y+2)(y-5)$。

解　(1)　$(x+2)(x+5) = x^2+5x+2x+10 = x^2+7x+10$；

(2)　$(y+2)(y-5) = y^2-5y+2y-10 = y^2-3y-10$。

從例 3 可以看出，含有一個相同字母的兩個一次二項式相乘，得到的積是同一個字母的二次多項式，從例 3 還可以看出，如果因式中一次項的係數都是 1，那麼積的二次項係數也是 1。這時，由於積的一次項是由兩個因式中的常數項分別乘以兩個因式中的一次項後，合併同類項得到的，因此，積的一次項係數等於兩個因式中常數項的和。積的常數項等於兩個因式中常數項的積，因此，如果 a、b 分別表示兩個因式中的常數項，那麼

$$\boxed{(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab}$$

【例 4】 解下列方程：

(1) $(x+3)(x-4)=x^2-16$ ；

(2) $3x(x+2)+(x+1)(x-1)=4(x^2+8)$ 。

$\boxed{解}$ (1)

$$\begin{aligned}(x+3)(x-4)&=x^2-16\\ x^2-x-12&=x^2-16\\ -x&=-4\\ x&=4\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}3x(x+2)+(x+1)(x-1)&=4(x^2+8)\\ 3x^2+6x+x^2-1&=4x^2+32\\ 6x&=33\\ x&=5\frac{1}{2}\end{aligned}$$

練　習

1. 計算：

(1) $(x+1)(x+4)$ ；　　(2) $(m-2)(m+3)$ ；

(3) $(y+4)(y-5)$ ；　　(4) $(x-3)(x-5)$ 。

(5) $\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{1}{3}\right)$ ；　　(6) $(7x+8)(6x-5)$ ；

(7) $\left(\frac{1}{2}x+4\right)\left(6x-\frac{3}{4}\right)$ ；　　(8) $(y^2+y+1)(y+2)$ ；

(9) $(x+2)(x+3)-x(x+1)-8$ ；

(10) $(3y-1)(2y-3)+(6y-5)(y-4)$ 。

2. 解下列方程：

(1) $(2x+3)(x-4)-(x+2)(x-3)=x^2+6$ ；

(2) $2x(3x-5)-(2x-3)(3x+4)=3(x+4)$ 。

習　題　三

1. 計算：

(1) $a^3 \bullet a^4$；　(2) $x^3 \bullet x$；　(3) $10^5 \bullet 10 \bullet 10^3$；

(4) $-b^3 \bullet b^2$；　(5) $x^7 \bullet x \bullet x^{12}$；　(6) $y^8 \bullet y^4 \bullet y \bullet y^4$。

2. 計算：

(1) $10^m \bullet 10^n$；　(2) $c^2 \bullet c^m$；

(3) $x^3 \bullet x^{n+1}$；　(4) $a^{n+2} \bullet a^{n+1}$；

(5) $y^n \bullet y \bullet y^{2n-1}$；　(6) $b^m \bullet b^n \bullet b^s$；

(7) $a^2 \bullet a \bullet a^5 + a^3 \bullet a^2 \bullet a^3$　(8) $x^2 \bullet x^6 \bullet x^3 + x^5 \bullet x^4 \bullet x$。

3. 把下列各式化成$(x-y)^n$的形式：

(1) $(x-y)^2(x-y)^4$；　(2) $(x-y)^3(x-y)(x-y)^{2m}$。

4. 計算：

(1) $(ax^2)(ax^n)$；　(2) $(2ab^2)(-3ab)$；

(3) $(mn)(-m^2n)$；　(4) $(3x^2y)(-3xy)$；

(5) $(-5a^2b^3)(2a^2b)$；　(6) $(2c^3)\left(\frac{1}{4}c^2\right)(-2c)$；

(7) $\left(-\frac{3}{4}ax\right)\left(-\frac{2}{3}bx^5\right)$；　(8) $(2a^nb^3)\left(-\frac{1}{6}ab^{n-1}\right)$。

(9) $-0.2xy^2 + 3x^2y \bullet \left(-\frac{1}{3}xy^5\right)$；

(10) $0.6m^2n \bullet \frac{1}{4}m^2n^2 - (-10m) \bullet m^3n^3$。

5. 長方形的長是2.2×10^3 cm，寬是1.5×10^2 cm，求它的面積。

6. 光的速度約是3×10^5 km/秒，從太陽系外距地球最近的一顆恆星(比鄰星)發出的光，需要 4 年的時間才能到達地球，一年以3×10^7秒計算，求這顆恆星與地球的距離。

7. 衛星繞地球運動的速度(即第一宇宙速度)是7.9×10^3 m/秒，求衛星繞地球運行2×10^2秒走過的路程。

8. 計算：

(1) $(a^3)^3$；　(2) $(x^6)^5$；　(3) $-(y^7)^2$；

(4) $(a^m)^3$；　(5) $(b^2)^m$；　(6) $[(x+3)^2]^3$；

(7) $[(ab)^n]^3$；　(8) $(x^2)^3\bullet x^4$；　(9) $(y^3)^4\bullet(y^4)^3$；

(10) $(-c)^3\bullet(c^2)^5\bullet c$。

9. 計算：

(1) $[(-1)^2]^3$；　(2) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2$；

(3) $(a^2)^3+a^3\bullet a^3$；　(4) $(x^4)^2+(x^5)^3$。

10. 求下列各式的平方：

(1) $2xy^2$；　(2) $-pq$；　(3) ab^2c^3；

(4) $-3m^2$；　(5) $-\frac{1}{2}st$；　(6) $0.2cd^4$。

11. 計算：

(1) $(ab)^5$；　(2) $(2x)^3$；　(3) $(-3xy^2)^2$；

(4) $-7(m^3n)^3$；　(5) $(-a^2b^3)^2$；　(6) $\left(\frac{4}{5}xy^2z\right)^2$；

(7) $[1.5\times10^2]^2$；　(8) $(3y^2)^3\bullet y^4$；　(9) $(3xy^2)^3\bullet(y^3)^5$；

(10) $(a^2\bullet a\bullet a^3\bullet b^n)^4$。

12. 計算：

(1) $[(-2x^2y)^3]^2$；　(2) $[(ab^2)^3]^3$；

(3) $\left(-\frac{2}{3}ax^3\right)^2+(2ax^2)^2\bullet x^2$；　(4) $(a^nb)^2+(a^2b^3)^n$；

(5) $(-2a)^6-(-3a^3)^2-[-(2a)^2]^3$。

13. 地球的半徑$r=6.4\times10^6$ m。球的體積公式是$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$。求地球的體積(π取 3.14，結果保留兩個有效數字)。

14. 計算：

(1) $(3x^2y-xy^2)\bullet 3xy$；　(2) $(4ab-b^2)\bullet(-2bc)$；

(3) $2x\bullet\left(x^2-\dfrac{1}{2}x+1\right)$；　(4) $5ab\bullet(2a-b+0.2)$；

(5) $(-2ab^2)^2\bullet(3a^2b-2ab-4b^3)$；

(6) $\left(\dfrac{3}{4}x^2y-\dfrac{1}{2}xy^2-\dfrac{5}{6}y^3\right)\bullet(-4xy^2)$。

15. 化簡：

(1) $3x^2\bullet(-3xy)^2-x^2(x^2y^2-2x)$；

(2) $5x\bullet(x^2-2x+4)+x^2(x-1)$；

(3) $t^3-2t[t^2-2(t-3)]$；

(4) $x-\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{3x}{2}\right)-\dfrac{1}{3}x\left(2-\dfrac{x}{4}\right)$。

16. 計算：

(1) $(3x+1)(x+2)$；　(2) $(4y-1)(y-5)$；

(3) $(2x-3)(4x-1)$；　(4) $(3a+2)(4a+1)$；

(5) $(5m+2)(4m-3)$；　(6) $(5n-4)(3n-1)$；

(7) $(7x^2-8y^2)(x^2+3y^2)$；　(8) $\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{2}y\right)\left(\dfrac{3}{4}x-\dfrac{2}{3}y\right)$；

(9) $(9m-4n)(9m+4n)$；　(10) $(x+2)(x-2)(x^2+4)$；

(11) $(1-2x+4x^2)(1+2x)$；　(12) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$；

(13) $5x(x^2+2x+1)-(2x+3)(x-5)$；

(14) $(3x-y)(y+3x)-(4x-3y)(4x+3y)$。

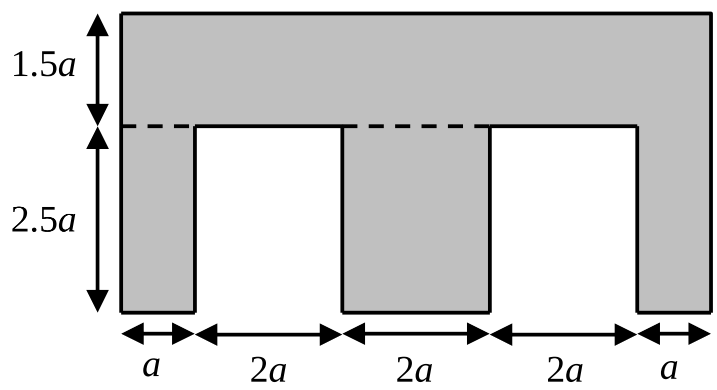
17. 計算：

(1) $(x+3)(x+2)$；　(2) $(a+5)(a-3)$；
(3) $(x-5)(x+3)$；　(4) $(m+2)(m-8)$；
(5) $(x+7)(x-7)$；　(6) $(y-3)(y+3)$；
(7) $(y-6)(y-3)$；　(8) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$。

18. 先化簡，再求值：
(1) $(3x+1)(2x-3)-(6x-5)(x-4)$，其中 $x=-2$；
(2) $(y-2)(y^2-6y-9)-y(y^2-2y-15)$，其中 $y=\frac{1}{2}$。

19. 解方程：
(1) $2(x^2-2)-6x(x-1)=4x(1-x)+16$；
(2) $x(x+3)-x(1-2x)=9+3x^2$；
(3) $(2x+3)(x-1)-28=(1+x)(2x+11)$；
(4) $(x-3)(x-2)+18=(x+9)(x+1)$。

20. 如圖，計算下圖陰影部份的面積 (圖中的長度單位：cm)。



(第 20 題)

21. 長方形的長是 $(2a+b)$ cm，寬是 $(a+b)$ cm，求它的周長與面積。

二、乘法公式

在多項式的乘法運算中，對於某些特殊形式的多項式相乘，我們把它們寫成公式並加以熟記，以便遇到類似形式的多項式相乘時，就直接運用有關公式進行運算。

6.7　平方差公式

我們來計算：

$$(a+b)(a-b)$$

得

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2 - ab + ab - b^2 \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

由此得到

$$\boxed{\boldsymbol{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}}$$

這就是說，**兩個數的和與這兩個數的差之積等於這兩個數的平方差**。這個公式就是**平方差公式**，對於形如兩數和與這兩數差相乘的乘法，就可以運用上述公式來計算。例如，計算

$$(1+2x)(1-2x)$$

如果把 1 看成 a，把 $2x$ 看成 b，那麼

$$(1+2x)(1-2x)$$

就是

$$(a+b)(a-b)$$

的形式，因此，可用平方差公式來計算。即

$$(1+2x)(1-2x) = 1^2 - (2x)^2 = 1 - 4x^2$$

$$(a+b)\ \ (a-b) = a^2 -\ \ b^2$$

【例 1】 運用平方差公式計算：(1)　$(3m+2n)(3m-2n)$ ；

(2)　$(b^2+2a^3)(2a^3-b^2)$ 。

解

(1)　$(3m+2n)(3m-2n) = (3m)^2 - (2n)^2 = 9m^2 - 4n^2$

(2)　$$\begin{aligned}(b^2+2a^3)(2a^3-b^2) &= (2a^3+b^2)(2a^3-b^2) \\ &= (2a^3)^2 - (b^2)^2 \\ &= 4a^6 - b^4\end{aligned}$$

【例 2】 運用平方差公式計算：(1) $\left(-\frac{1}{2}x+2y\right)\left(-\frac{1}{2}x-2y\right)$；

(2) $(-4a-1)(4a-1)$。

$\boxed{解}$ (1) $\left(-\frac{1}{2}x+2y\right)\left(-\frac{1}{2}x-2y\right)=\left(-\frac{1}{2}x\right)^2-(2y)^2$

$=\frac{1}{4}x^2-4y^2$

(2) $(-4a-1)(4a-1)=[(-1)-4a][(-1)+4a]$

$=(-1)^2-(4a)^2$

$=1-16a^2$

或

$(-4a-1)(4a-1)=-(4a+1)(4a-1)$

$=-[(4a)^2-1^2]$

$=-(16a^2-1)$

$=1-16a^2$

【例 3】 運用平方差公式計算：

(1) 102×98；

(2) $(y+2)(y-2)(y^2+4)$。

$\boxed{解}$ (1) $102\times98=(100+2)(100-2)$

$=100^2-2^2$

$=10000-4$

$=9996$

(2) $(y+2)(y-2)(y^2+4)=(y^2-4)(y^2+4)$

$=(y^2)^2-4^2$

$=y^4-16$

練 習

1. 運用平方差公式計算：

(1) $(x+a)(x-a)$ ；　(2) $(m-n)(m+n)$ ；

(3) $(a+3b)(a-3b)$ ；　(4) $(1-5y)(1+5y)$ ；

(5) $(2a+3)(2a-3)$ ；　(6) $(-2x^2+5)(-2x^2-5)$ ；

(7) $(4x-5y)(4x+5y)$ ；　(8) $\left(\frac{2}{3}x-7y\right)\left(\frac{2}{3}x+7y\right)$ 。

2. 運用平方差公式計算：

(1) 103×97 ；　(2) 59.8×60.2 ；

(3) $(x+3)(x-3)(x^2+9)$ ；　(4) $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 。

3. 化簡下列各式：

(1) $(x-y)(x+y)+(2x-y)(2x+y)$ ；

(2) $(2a-b)(2a+b)-(3a-2b)(3a+2b)$ 。

4. 下面各式的計算對不對？為什麼？如果不對，應怎樣改正？

(1) $(x-6)(x+6)=x^2-6$ ；

(2) $(2x+3)(x-3)=2x^2-9$ ；

(3) $(5ab+1)(5ab-1)=25a^2b^2-1$ 。

6.8　完全平方公式

我們來計算

$$(a+b)^2 \text{、} (a-b)^2 \text{，}$$

得

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a^2+ab+ab-b^2\\ &= a^2+2ab+b^2\\ (a-b)^2 &= (a-b)(a-b)\\ &= a^2-ab-ab-b^2\\ &= a^2-2ab+b^2\end{aligned}$$

由此得到

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\end{aligned}}$$

這就是說，**兩數和(或差)的平方，等於它們的平方和，加上(或者減去)它們的積之 2 倍。**這兩個公式就是**完全平方公式**。

這兩個公式可以分別從圖 6-3 與圖 6-4 中看出。

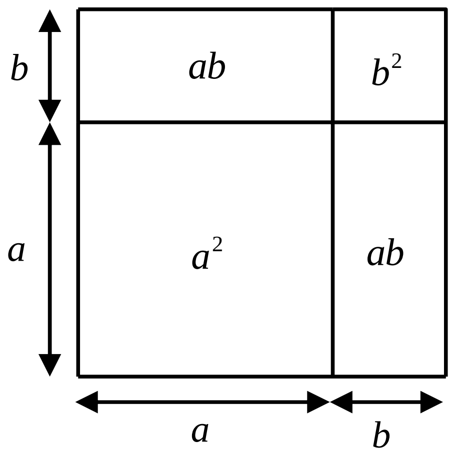


圖 6-3

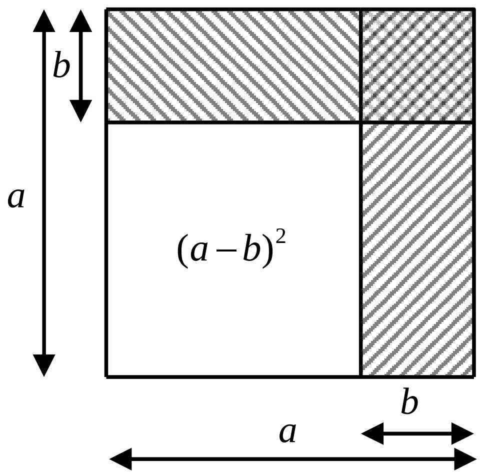


圖 6-4

對於兩數和(或差)的平方，就可以運用上述公式來計算。例如，計算

$$(x+2y)^2 \text{ 、 } (2x-5y)^2 \text{ 。}$$

如果在 $(x+2y)^2$ 中，把 x 看成 a，把 $2y$ 看成 b，在 $(2x-5y)^2$ 中，把 $2x$ 看成 a，把 $5y$ 看成 b，那麼

$$(x+2y)^2 \text{ 、 } (2x-5y)^2$$

就分別是

$$(a+b)^2 \text{ 、 } (a-b)^2$$

的形式。因此，可用完全平方公式來計算，即

$$(x+2y)^2 = x^2+2\bullet x\bullet 2y+(2y)^2 = x^2+4xy+4y^2$$

$$\boxed{(a+b)^2} = \boxed{a^2+2\ \ a\ \ b\ +\ b^2}$$

$$(2x-5y)^2 = (2x)^2 - 2\bullet 2x \bullet 5y + (5y)^2 = 4x^2 - 20xy + 25y^2$$

$$\boxed{(a-b)^2} = \boxed{a^2 \quad -2 \quad a \quad b \quad + \quad b^2}$$

【例 1】 運用完全平方公式計算：　(1)　$(-b^2+4a^2)^2$ ；

(2)　$\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2$ 。

$\boxed{解}$　(1)　$(-b^2+4a^2)^2 = (-b^2)^2 + 2\bullet(-b^2)\bullet(4a^2) + (4a^2)^2$

$= b^4 - 8a^2b^2 + 16a^4$

或

$(-b^2+4a^2)^2 = (4a^2-b^2)^2$

$= 16a^4 - 8a^2b^2 + b^4$

(2)　$\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2 = y^2 + y + \dfrac{1}{4}$

練　習

1. 運用完全平方公式計算：

(1) $(a+6)^2$ ；　(2) $(4+x)^2$ ；

(3) $(x-7)^2$ ；　(4) $(8-y)^2$ ；

(5) $(3a+b)^2$ ；　(6) $(4x+3y)^2$ ；

(7) $\left(\dfrac{1}{2}x-3y\right)^2$ ；　(8) $(-a^2-b)^2$ ；

(9) $(0.4x+5y)^2$ ；　(10) $\left(\dfrac{3}{4}x-\dfrac{2}{3}y^2\right)^2$ 。

2. 下面各式的計算，錯在哪裡？為什麼？應怎樣改正？

(1) $(a+b)^2 = a^2+b^2$ ；　(2) $(a-b)^2 = a^2-b^2$ 。

【例 2】 運用完全平方公式計算： (1) 102^2； (2) 199^2。

$\boxed{解}$

(1) $102^2 = (100+2)^2$

$= 100^2 + 2\times 100\times 2 + 2^2$

$= 10000 + 400 + 4$

$= 10404$

(2) $199^2 = (200-1)^2$

$= 200^2 - 2\times 200\times 1 + 1^2$

$= 40000 - 400 + 1$

$= 39601$

【例 3】 運用乘法公式計算： (1) $(m+n)(m-n)(m^2-n^2)$；

(2) $(a+b+c)^2$；

(3) $(x+2y-3)(x-2y+3)$；

(4) $\left(\dfrac{x}{2}+5\right)^2 - \left(\dfrac{x}{2}-5\right)^2$。

$\boxed{解}$

(1) $(m+n)(m-n)(m^2-n^2) = (m^2-n^2)(m^2-n^2)$

$= (m^2-n^2)^2$

$= m^4 - 2m^2n^2 + n^4$

(2) $(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2$

$= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$

$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

(3) $(x+2y-3)(x-2y+3) = [x+(2y-3)][x-(2y-3)]$

$= x^2 - (2y-3)^2$

$= x^2 - (4y^2 - 12y + 9)$

$= x^2 - 4y^2 + 12y - 9$

(4) $\left(\dfrac{x}{2}+5\right)^2 - \left(\dfrac{x}{2}-5\right)^2 = \dfrac{x^2}{4} + 5x + 25 - \dfrac{x^2}{4} + 5x - 25 = 10x$

練 習

1. 運用完全平方公式計算：

(1) $(2x+1)^2$；　　(2) $(3y-4)^2$；

(3) 91^2；　　(4) 79.8^2。

2. 運用乘法公式計算：

(1) $(x+3)(x-3)(x^2-9)$；　　(2) $(x+6)^2-(x-6)^2$；

(3) $(a+2b+c)^2$；　　(4) $(2a+b+1)(2a+b-1)$。

(5) $(a-2b+3c)(a+2b-3c)$；

(6) $[(x+y)^2+(x-y)^2](x^2-y^2)$；

(7) $[(x-1)(x+1)]^2$。

6.9 立方和與立方差公式

我們來計算

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) \text{、} (a-b)(a^2+ab+b^2)\text{，}$$

得

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2-ab+b^2) &= a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3\\ &= a^3+b^3\\ (a-b)(a^2+ab+b^2) &= a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3\\ &= a^3-b^3\end{aligned}$$

由此可得

$$\boxed{\begin{aligned}&\boldsymbol{(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3}\\ &\boldsymbol{(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3}\end{aligned}}$$

這就是說，**兩數和(或差)乘以它們的平方和與它們的積之差(或和)，等於這兩個數的立方和(或差)。**這兩個公式就是**立方和公式與立方差公式**。

對於形如兩數和(或差)與它們的平方和減去(或加上)它們的積之差(或和)相乘的乘法，就可以運用上述公式來計算。例如，計算

$$(x+3)(x^2-3x+9) \text{、} (2y-1)(4y^2+2y+1) \text{。}$$

如果在 $(x+3)(x^2-3x+9)$ 中，把 x 看成 a，把 3 看成 b，在 $(2y-1)\bullet(4y^2+2y+1)$ 中，把 $2y$ 看成 a，把 1 看成 b，那麼

$$(x+3)(x^2-3x+9) \text{、} (2y-1)(4y^2+2y+1)$$

就分別是

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) \text{、} (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

的形式。因此，可用立方和與立方差公式來計算，即

$$\begin{aligned}&(x+3)(x^2-3x+9)\\ =\ &(x+3)(x^2-x\bullet 3+3^2)=x^3+3^3=x^3+27\\ &\boxed{(a+b)(a^2-a\ \ b+b^2)}=\boxed{a^3+b^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(2y-1)(4y^2+2y+1)\\ =\ &(2y-1)[(2y)^2+(2y)\bullet 1+1^2]=(2y)^3-1^3=8y^3-1\\ &\boxed{(a-b)\ (a^2+\ \ a\ \ b+b^2)}=\boxed{a^3-b^3}\end{aligned}$$

【例 1】 運用立方和公式與立方差公式計算：

(1) $(4+a)(16-4a+a^2)$；

(2) $\left(5x-\dfrac{1}{2}y\right)\left(25x^2+\dfrac{5}{2}xy+\dfrac{1}{4}y^2\right)$。

$\boxed{解}$ (1) $(4+a)(16-4a+a^2)=(4+a)(4^2-4\bullet a+a^2)$

$$=4^3+a^3$$

$$=64+a^3$$

(2) $\left(5x-\frac{1}{2}y\right)\left(25x^2+\frac{5}{2}xy+\frac{1}{4}y^2\right)$

$=\left(5x-\frac{1}{2}y\right)\left[(5x)^2+(5x)\bullet\frac{1}{2}y+\left(\frac{1}{2}y\right)^2\right]$

$=(5x)^3-\left(\frac{1}{2}y\right)^3$

$=125x^3-\frac{1}{8}y^3$

【例 2】 運用乘法公式計算：$(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ 。

解

$(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$=[(x+1)(x^2-x+1)][(x-1)(x^2+x+1)]$

$=(x^3+1)(x^3-1)$

$=x^6-1$

或

$(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$=(x^2-1)[(x^2+1)+x][(x^2+1)-x]$

$=(x^2-1)[(x^2+1)^2-x^2]$

$=(x^2-1)(x^4+2x^2+1-x^2)$

$=(x^2-1)(x^4+x^2+1)$

$=x^6-1$

練　習

1. 運用乘法公式計算：

(1) $(x^2+1)(x^4-x^2+1)$ ；　(2) $(y-3)(y^2+3y+9)$ ；

(3) $(5+c)(25-5c+c^2)$ ；　(4) $(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$ ；

(5) $(2x+5)(4x^2+25-10x)$ ；

(6) $\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}b\right)\left(\frac{4}{9}a^2+\frac{1}{3}ab+\frac{1}{4}b^2\right)$ 。

練習

2. 運用乘法公式計算：
   (1) $(a+2)(a-2)(a^2-2a+4)(a^2+2a+4)$；
   (2) $(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)$；
   (3) $x(x-1)^2-(x^2-x+1)(x+1)$；
   (4) $(y+1)^2+(y+1)(y^2-2y+1)$。

習　題　四

1. 運用平方差公式計算：
   (1) $(x+2y)(x-2y)$；　(2) $(2a-3b)(2a+3b)$；
   (3) $(-1+3x)(-1-3x)$；　(4) $(-2b-5)(2b-5)$；
   (5) $(2x^3+15)(2x^3-15)$；　(6) $\left(\frac{2}{5}x^2-y\right)\left(\frac{2}{5}x^2+y\right)$；
   (7) $\left(4x^2-\frac{1}{2}\right)\left(4x^2+\frac{1}{2}\right)$；　(8) $(0.3x-0.1)(0.3x+0.1)$；
   (9) $(x+2)(x-2)(x^2+4)$；
   (10) $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$。

2. 運用平方差公式計算：
   (1) 69×71；　(2) 503×497；
   (3) 40.5×39.5；　(4) $40\frac{2}{3}\times 39\frac{1}{3}$。

3. 計算：
   (1) $x(x-3)-(x+7)(x-7)$；
   (2) $(2x-5)(x-2)+(3x-4)(3x+4)$；
   (3) $\left(\frac{3}{2}x+\frac{2}{3}y\right)\left(\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}y\right)-\left(\frac{2}{3}y+\frac{3}{2}x\right)\left(\frac{2}{3}y-\frac{3}{2}x\right)$；
   (4) $x^2(x^2+y^2)(x^2-y^2)+(x^2+y^2)(2x^4-3y^4)$。

4. 運用乘法公式計算：

(1) $(6a+5b)^2$；　(2) $(4x-3y)^2$；

(3) $(-2m-1)^2$；　(4) $\left(\frac{1}{4}m-2n\right)^2$；

(5) $(4x+0.5)^2$；　(6) $\left(1.5a-\frac{2}{3}b\right)^2$；

(7) $\left(a-b+\frac{1}{2}\right)^2$；　(8) $(2x+y-3)^2$；

(9) $[(x+3y)(x-3y)]^2$；

(10) $(3x+2y+4)(3x+2y-4)$；

(11) $(a+3b-2)(a-3b+2)$；

(12) $(1+x+y)(1-x-y)$；

5. 運用完全平方公式計算：

(1) 63^2；　(2) 895^2；　(3) 9.98^2；　(4) $\left(14\frac{1}{2}\right)^2$。

6. 計算：

(1) $(2a+1)^2+(1-2a)^2$；　(2) $(2x)^2-3(2x+1)^2$；

(3) $3(2-y)^2-4(y+5)^2$；　(4) $a^4-(1-a)(1+a)(1+a^2)$；

(5) $(3x-y)^2-(2x+y)^2+5y^2$；

(6) $3(m+1)^2-5(m+1)(m-1)+2(m-1)^2$。

7. 運用乘法公式計算：

(1) $(5-2y)(25+10y+4y^2)$；

(2) $(3s+2t)(9s^2+4t^2-6st)$；

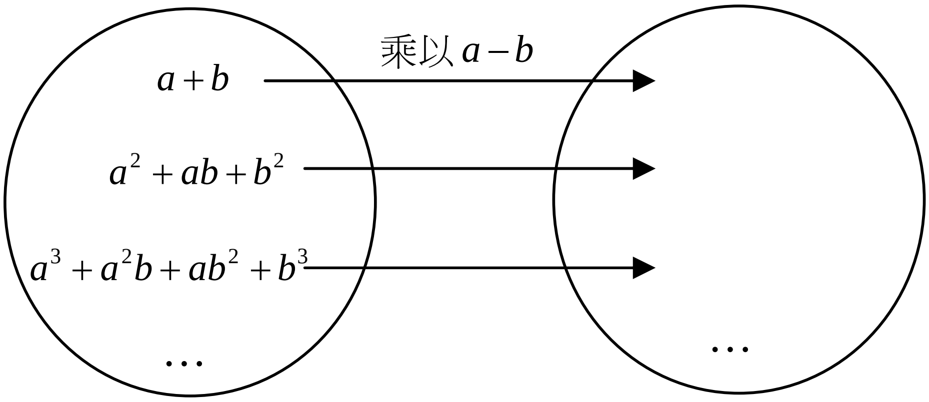
(3) $(x^2+2)(4-2x^2+x^4)$；

(4) $\left(\frac{1}{2}a+2b\right)\left(\frac{1}{4}a^2+4b^2+ab\right)$；

(5) $(x-2)(x+2)(x^4+4x^2+16)$；

(6) $(x-2)(x^2+2x+4)+(x+5)(x^2-5x+25)$。

8. 把圖中左圈裡的每一個代數式，分別乘以 $a-b$ ，然後把積寫在右圈。



(第 8 題)

9. 回答下列問題：

(1) a^2+b^2 加上什麼式子可以得到 $(a+b)^2$ ？

(2) a^2+b^2 加上什麼式子可以得到 $(a-b)^2$ ？

(3) $(a-b)^2$ 加上什麼式子可以得到 $(a+b)^2$ ？

(4) a^2+ab+b^2 加上什麼式子可以得到 $(a-b)^2$ ？

(5) $a+b$ 乘以什麼式子可以得到 a^3+b^3 ？

(6) $a-b$ 乘以什麼式子可以得到 a^3-b^3 ？

10. 先化簡，再求值：

(1) $(x+2)(x^2-2x+4)+(x-1)(x^2+x+1)$ ，其中 $x=-\dfrac{2}{3}$ ；

(2) $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)$ ，其中 $a=3$ 、 $b=0.2$ ；

(3) $\left[\left(a+\dfrac{1}{2}b\right)^2+\left(a-\dfrac{1}{2}b\right)^2\right]\left(2a^2-\dfrac{1}{2}b^2\right)$，其中 $a=1$、$b=-2$ 。

11. 解方程：

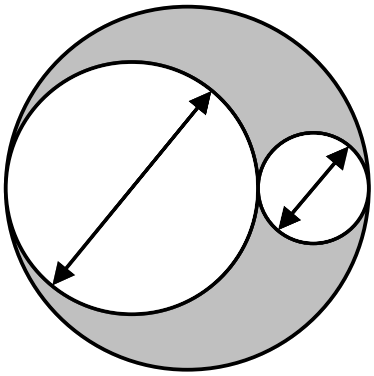
(1) $\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2-\left(x-\dfrac{1}{4}\right)\left(x+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$ ；

(2) $(x+1)(x^2-x+1)-x(x-2)(x+2)=9$ ；

(3) $3(x+5)^2-2(x-3)^2-(x+9)(x-9)=180$ 。

12. 一個正方形的邊長增加 3 cm，它的面積就增加 39 cm^2。求這個正方形的邊長。

13. 有一塊直徑為 $a+b$ 的圓形紙板，挖去直徑分別為 a 與 b 的兩個圓，求剩下的紙板面積。



(第 13 題)

三、整式的除法

6.10　同底數的冪之除法

現在我們來學習整式的除法。我們知道，除法是乘法的逆運算，因此可以從整式乘法得出整式除法的法則。

這一節先研究兩個同底數的冪之除法。我們來計算

$$10^5 \div 10^3 \text{ 、 } 2^5 \div 2^3$$

根據除法是乘法的逆運算，我們知道，計算被除數除以除數所得的商，就是要求一個數，使它與除數的積等於被除數。

$\because$ $$10^2 \times 10^3 = 10^5$$

$\therefore$ $$10^5 \div 10^3 = 10^2$$

$\because$ $$2^2 \times 2^3 = 2^5$$

$\therefore$ $$2^5 \div 2^3 = 2^2$$

也就是

$$10^5 \div 10^3 = 10^{5-3}$$

$$2^5 \div 2^3 = 2^{5-3}$$

同樣，

$\because$ $a^2 \bullet a^3 = a^5$

$\therefore$ $a^5 \div a^3 = a^2$ [4]

也就是

$$a^5 \div a^3 = a^{5-3}$$

一般地，如果 m、n 都是正整數，並且 $m > n$，那麼

$$\boxed{\boldsymbol{a^m \div a^n = a^{m-n} \ \ (a \neq 0)}}$$

這就是說，**同底數的冪相除，底數不變，指數相減。**

同底數的冪相除，如果被除式的指數等於除式的指數，例如

$$3^2 \div 3^2 、\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \div \left(-\frac{1}{2}\right)^3 、a^m \div a^m$$

那麼，可以看出所得的商等於 1。

這就是說，**指數相同的同底數之冪相除，商等於 1。**

【例 1】計算：

(1) $x^8 \div x^2$； (2) $a^9 \div a^4$； (3) $(-a)^4 \div (-a)$。

解

(1) $x^8 \div x^2 = x^{8-2} = x^6$；

(2) $a^9 \div a^4 = a^{9-4} = a^5$；

(3) $(-a)^4 \div (-a) = (-a)^{4-1} = (-a)^3 = -a^3$。

【例 2】計算：

(1) $(ab)^5 \div (ab)^2$； (2) $(a+b)^3 \div (a+b)^2$；

(3) $y^{n+2} \div y^2$； (4) $x^{n+m} \div x^{n+m}$。

[4] 這裡 $a \neq 0$。在本章中，所遇到的除式之值都不等於零。

解 (1) $(ab)^5 \div (ab)^2 = (ab)^{5-2} = (ab)^3 = a^3b^3$；
(2) $(a+b)^3 \div (a+b)^2 = (a+b)^{3-2} = a+b$；
(3) $y^{n+2} \div y^2 = y^{n+2-2} = y^n$；
(4) $x^{n+m} \div x^{n+m} = 1$。

練 習

1. (口答) 計算：
   (1) $x^7 \div x^5$； (2) $y^9 \div y^8$； (3) $z^{11} \div z^8$；
   (4) $a^{10} \div a^3$； (5) $b^6 \div b^6$； (6) $c^7 \div c^7$。
2. 在下列各式的括號裡填上適當的代數式，使等式成立：
   (1) $x^5 \bullet (\quad\quad) = x^9$； (2) $a^6 \bullet (\quad\quad) = a^{12}$；
   (3) $b^3 \bullet b^3 \bullet (\quad\quad) = b^{36}$； (4) $x^2 \bullet x^5 \bullet (\quad\quad) = x^{20}$。
3. 下面等式的計算對不對？如果不對，應怎樣改正？
   (1) $x^6 \div x^3 = x^2$； (2) $z^5 \div z^4 = z$；
   (3) $a^3 \div a = a^3$； (4) $(-c)^4 \div (-c)^2 = -c^2$。
4. 計算：
   (1) $(xy)^5 \div (xy)^3$； (2) $(a+b)^5 \div (a+b)^4$；
   (3) $a^{n+2} \div a^{n+1}$； (4) $x^{12} \div x^3 \div x^4$；
   (5) $y^{10} \div (y^4 \div y^2)$； (6) $(c^{4n} \div c^{2n}) \bullet c^{3n}$。

6.11 單項式除以單項式

這一節要研究兩個單項式相除的問題。我們來計算

$$12a^3b^2x^3 \div 3ab^2$$ [5]

我們已經知道，這就是要求一個單項式(商式)，使它與$3ab^2$(除式)的積等於$12a^3b^2x^3$(被除式)。

∵ $$4a^2x^3 \bullet 3ab^2 = 12a^3b^2x^3$$

∴ $$12a^3b^2x^3 \div 3ab^2 = 4a^2x^3$$

---

[5] 這個式子就是$(12a^3b^2x^3) \div (3ab^2)$的意思。

這就是說，所指的商式是$4a^2x^3$，其中係數$4=12\div 3$，字母 a 的指數$2=3-1$，字母 x 的指數仍然是3，它不含字母 b。

一般地，**單項式相除，把係數、同底數冪分別相除，作為商的因式，對於只在被除式裡含有的字母，則連同它的指數作為商的一個因式。**

【例】　計算：

(1)　$28x^4y^2\div 7x^3y$；　(2)　$-5a^5b^3c\div 15a^4b$；

(3)　$-a^2x^4y^3\div\left(-\dfrac{5}{6}axy^2\right)$；(4)　$(6x^2y^3)^2\div(3xy^2)^2$。

$\boxed{解}$

(1)　$28x^4y^2\div 7x^3y=(28\div 7)\bullet x^{4-3}y^{2-1}=4xy$；

(2)　$-5a^5b^3c\div 15a^4b=[(-5)\div 15]\bullet a^{5-4}b^{3-1}c=-\dfrac{1}{3}ab^2c$；

(3)　$-a^2x^4y^3\div\left(-\dfrac{5}{6}axy^2\right)=\dfrac{6}{5}ax^3y$；

(4)　$(6x^2y^3)^2\div(3xy^2)^2=36x^4y^6\div 9x^2y^4=4x^2y^2$。

練　習

1. (口答) 計算：

(1) $16a\div 4$；　(2) $10ab^3\div(-5)$；

(3) $-8a^2b^2\div 6ab^2$；　(4) $6x^2y\div 3xy$；

(5) $-21x^2y^4\div(-3x^2y^3)$；　(6) $(-2ab^2)^3\div(-2ab^2)^2$；

(7) $(6\times 10^8)\div(3\times 10^5)$；　(8) $(4\times 10^9)\div(-2\times 10^3)$。

2. 計算：

(1) $24a^3b^2\div 8ab^2$；　(2) $-14a^2x^3\div 7ax^2$；

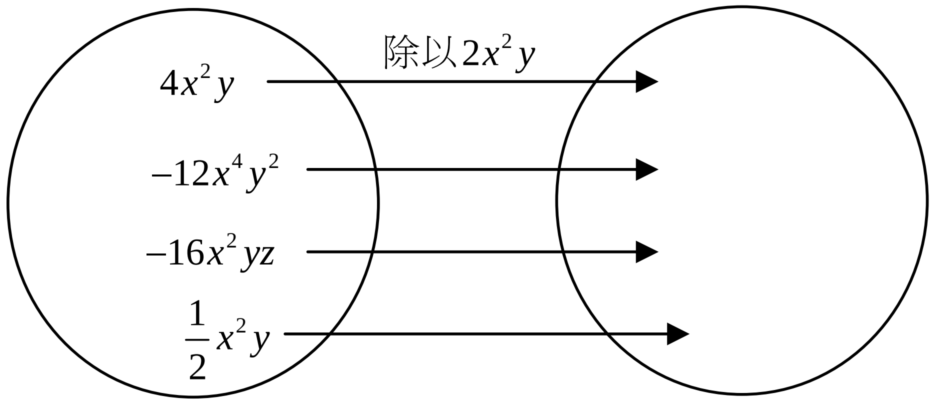
(3) $9c^3d^2\div(-9c^3d^2)$；　(4) $(-0.5a^2bx^2)\div\left(-\dfrac{2}{5}ax^2\right)$；

(5) $\left(-\dfrac{3}{4}a^2b^2c\right)\div 3a^2b$；　(6) $(3mn^2)^3\div 3m^2n^3$；

(7) $(4x^2y^3)^2\div(-2xy^2)^2$；　(8) $(5ab^2c)^4\div(-5ab^2c)^2$。

練 習

3. 把圖中左圈裡的每一個代數式，分別除以 $2x^2y$，然後把商寫在右圈。



(第 3 題)

6.12 多項式除以單項式

現在來研究多項式除以單項式的問題。例如，計算

$$(am+bm+cm)\div m \text{ ，}$$

這就是要求一個多項式，使它與 m 的積是

$$am+bm+cm \text{ 。}$$

$$\because \quad (a+b+c)m = am+bm+cm$$

$$\therefore \quad (am+bm+cm)\div m = a+b+c$$

我們知道，

$$am\div m+bm\div m+cm\div m = a+b+c \text{ ，}$$

所以

$$(am+bm+cm)\div m = am\div m+bm\div m+cm\div m \text{ 。}$$

一般地，**多項式除以單項式，先把這個多項式的每一項除以這個單項式，再把所得的商相加。**

【例 1】 計算 $(28a^3-14a^2+7a)\div 7a$ 。

解

$$(28a^3-14a^2+7a)\div 7a = 28a^3\div 7a-14a^2\div 7a+7a\div 7a \text{ ；}$$
$$= 4a^2-2a+1$$

【例 2】 計算 $(36x^4y^3-24x^3y^2+3x^2y^2)\div(-6x^2y)$ 。

解 $$(36x^4y^3-24x^3y^2+3x^2y^2)\div(-6x^2y)=-6x^2y^2+4xy-\frac{1}{2}y$$

練 習

1. (口答) 計算：

   (1) $(6xy+5x)\div x$ ；　(2) $(15x^2y-10xy^2)\div 5xy$ ；

   (3) $(8a^2b-4ab^2)\div 4ab$ ；　(4) $(4c^2d+c^3d^2)\div(-2c^2d)$ 。

2. 計算：

   (1) $(16m^3-24m^2)\div(-8m^2)$ ；　(2) $(9x^3y^2-21xy^2)\div 7xy^2$ ；

   (3) $(12a^2b^3-9a^4b^2c)\div(3a^2b^2)$ ；

   (4) $(25x^2+15x^3y-20x^4)\div(-5x^2)$ ；

   (5) $(-4a^3+12a^2b-7a^3b^2)\div(-4a^2)$ ；

6.13 多項式除以多項式

現在我們可以學習多項式除以多項式了。

兩個多項式相除，可以先把這兩個多項式都按照同一字母降冪排列，然後再仿照兩個多位數相除的演算方法，用豎式進行演算。例如，我們來計算

$$(6x^2+7x+2)\div(2x+1) ,$$

仿照$672\div 21$，演算如下：

$$\begin{array}{r}
32 \\
21\overline{)672} \\
\underline{63} \\
42 \\
\underline{42} \\
0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
3x+2 & \longleftarrow \text{商式} \\
\text{除式} \longrightarrow 2x+1\overline{)6x^2+7x+2} & \longleftarrow \text{被除式} \\
\underline{6x^2+3x} & \\
4x+2 & \\
\underline{4x+2} & \\
0 & \longleftarrow \text{餘式}
\end{array}$$

$$\therefore \qquad (6x^2+7x+2)\div(2x+1)=3x+2$$

演算的步驟是：

1. 用除式的第一項 $2x$ 去除被除式的第一項 $6x^2$，得商式的第一項 $3x$；
2. 用商式的第一項 $3x$ 去乘除式，把積 $6x^2+3x$ 寫在被除式下面(同類項對齊)，從被除式中減去這個積，得 $4x+2$；
3. 把 $4x+2$ 當作新的被除式，再按照上面的方法繼續演算，直到餘式是 0(或餘式的次數低於除式的次數)為止。

一般多項式的除法也可按照上面演算步驟進行。

【例 1】 計算 $(5x^2+2x^3-1)\div(1+2x)$ 。

$\boxed{解}$

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & x^2 & +2x & -1 \\ \cline{2-5}
2x+1 \big) & 2x^3 & +5x^2 & & -1 \\
 & 2x^3 & +x^2 & & \\ \cline{2-5}
 & & 4x^2 & & \\
 & & 4x^2 & +2x & \\ \cline{3-5}
 & & & -2x & -1 \\
 & & & -2x & -1 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

$$\therefore\quad (5x^2+2x^3-1)\div(1+2x)=x^2+2x-1$$

注意：按照 x 降冪排列，如果被除式有缺項，要留出空位。也可採加零的辦法補足缺項，例如，把 $2x^3+5x^2-1$ 寫成 $2x^3+5x^2+0-1$。

例 1 的餘式為零。如果一個多項式除以另一個多項式的餘式為零，我們就說這個多項式能被另一個多項式**整除**，這時也可說除式能整除被除式。

整式除法也有不能整除的情況。按照某個字母降冪排列的整式除法，當餘式不是零而次數低於除式的次數時，除法演算就不能繼續進行了，這說明除式不能整除被除式。

【例 2】計算$(2x^3+9x^2+3x+5)\div(x^2+4x-3)$。

解

$$
\begin{array}{r}
2x+1 \\
x^2+4x-3 \overline{\big) 2x^3+9x^2+3x+5} \\
\underline{2x^3+8x^2-6x \quad\quad} \\
x^2+9x+5 \\
\underline{x^2+4x-3} \\
5x+8
\end{array}
$$

$\therefore$ 商式$=2x+1$，餘式$=5x+8$

我們知道，整數相除，有時不能整除，帶有餘數，例如，

$$
\begin{array}{r}
37 \\
21\overline{\big)785} \\
\underline{63} \\
155 \\
\underline{147} \\
8
\end{array}
$$

在數的帶餘除法中，有下面的關係：

$$
\begin{array}{ccccccc}
785 & = & 21 & \times & 37 & + & 8 \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
\text{被除數} & & \text{除數} & & \text{商數} & & \text{餘數}
\end{array}
$$

與數的帶餘除法類似，在上面的例 2 中，也有下面的關係：

$$
\begin{array}{ccccccc}
(2x^3+9x^2+3x+5) & = & (x^2+4x-3) & & (2x+1) & + & (5x+8) \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
\text{被除式} & & \text{除式} & & \text{商式} & & \text{餘式}
\end{array}
$$

一般地，被除式、除式、商式及餘式之間有下面的關係：

被除式 = 除式 × 商式 ＋ 餘式

練　習

1. 計算：
   (1) $(3x^2+14x-5)\div(x+5)$；　(2) $(6x^2+14x+4)\div(3x+1)$；
   (3) $(8x^2+52x-21)\div(x+7)$；　(4) $(1+x^2+x^4)\div(x^2+1-x)$；
   (5) $(x^3-3x+x^2-8)\div(x-2)$；
   (6) $(3x^3-4x-5x^2+3)\div(x^2-x+5)$。

2. 已知除式、商式及餘式，求被除式：
   (1) 除式$=3x-5$，商式$=2x+7$，餘式$=10$；
   (2) 除式$=x^2-2x+1$，商式$=x^2+2x-1$，餘式$=4x$。

習　題　五

1. 計算：
   (1) $a^7\div a^4$；　(2) $x^{10}\div x^6$；
   (3) $y^8\div y^8$；　(4) $(-5)^6\div(-5)^3$；
   (5) $(ax)^5\div(ax)^3$；　(6) $\left(-\frac{1}{2}y\right)^4\div\left(-\frac{1}{2}y\right)$；
   (7) $a^{3n}\div a^n$；　(8) $x^{2n+1}\div x^{n+1}$；
   (9) $(a^2)^m\div a^m$；　(10) $t^6\div(t^4\div t^3)$；
   (11) $a^3\bullet(a^2)^3\div a^4$；　(12) $(a+b)^3\div(a+b)^2\bullet(a+b)^4$。

2. 計算：
   (1) $-12a^5b^3c\div(-3a^2b)$；　(2) $42x^6y^8\div(-3x^2y)^3$；
   (3) $24x^2y^5\div(-6x^2y^3)$；　(4) $-25t^8k\div(-5t^5k)$；
   (5) $(-5r^2c)^2\div 5r^4c$；　(6) $7m^2(4m^3p)\div 7m^5$；
   (7) $-45(u^3v^4)^2\div 5u^5v^4$；　(8) $-12(s^4t^3)^3\div\left(\frac{1}{2}s^2t^3\right)^2$；
   (9) $(-5r^2st^3)^2(-2rs^2t)^3$；　(10) $(2a^2bc)^3\left(\frac{1}{2}ab^3c^2\right)^5$；

(11) $(-38x^4y^5z)\div 19xy^5\bullet\left(-\dfrac{3}{4}x^3y^2\right)$；

(12) $(2ax)^2\bullet\left(-\dfrac{2}{5}a^4x^3y^3\right)\div\left(-\dfrac{1}{2}a^5xy^2\right)$。

3. 一顆人造衛星的速度是2.88×10^7 m/小時，一架噴氣式飛機的速度是1.8×10^6 m/小時，這顆人造衛星的速度是這架噴氣式飛機速度的多少倍？。

4. 計算：

(1) $(6x^4-8x^3)\div(-2x^2)$；　(2) $(8a^3b-5a^2b^2)\div 4ab$；

(3) $(12x^3-8x^2+16x)\div 4x$；

(4) $\left(\dfrac{2}{5}y^3-7xy^2+\dfrac{2}{3}y^5\right)\div\dfrac{2}{3}y^2$；

(5) $(9a^3x^5-6a^2x^4+15a^4x^3)\div(-3a^2x^3)$；

(6) $[28x^7y^3-21x^5y^5+2y(7x^3y^3)^2]\div 7x^5y^3$；

(7) $\left(0.25a^3b^2-\dfrac{1}{2}a^4b^5-\dfrac{1}{6}a^5b^3\right)\div(-0.5a^3b^2)$；

(8) $(3a^{n+1}+6a^{n+2}-9a^n)\div 3a^{n-1}$。

5. 化簡：

(1) $[(2x+y)^2-y(y+4x)]\div 2x$；

(2) $[(3x+2y)(3x-2y)-(x+2y)(5x-2y)]\div 4x$；

(3) $\left[\left(4x-\dfrac{1}{2}y\right)^2+4y\left(x-\dfrac{y}{16}\right)\right]\div 8x^2$；

(4) $\left[(-3xy)^2\bullet x^3-2x^2\bullet(3xy^2)^3\bullet\dfrac{1}{2}y\right]\div 9x^4y^2$。

6. 計算：

(1) $(2x^2+23x+56)\div(2x+7)$；

(2) $(2x^3+27x-12x^2-27)\div(x-3)$；

(3)　$(2x^3+9x^2+10x+5)\div(x^2+x+1)$；

(4)　$(2y^4-y^3+y-3)\div(3-2y+y^2)$。

7. 長方形的面積是$a^2-3ab+2b^2$，它的一條邊長是$a-b$，求它的周長。

8. 已知除式、商式及餘式，求被除式：

(1) 除式$=6x^2+3x-5$，商式$=4x-5$，餘式$=-8$；

(2) 除式$=-2x^2-x+1$，商式$=x^2-2$，餘式$=3x+7$。

小　结

一、本章主要內容是整式乘除法，其中包括冪的運算性質、單項式乘以(或除以)單項式、多項式乘以(或除以)單項式、多項式乘以(或除以)多項式等。

二、本章學過冪的運算性質有：

$$a^m \bullet a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0，m > n)$$

三、整式乘除法法則是以單項式乘以(或除以)單項式、多項式乘以(或除以)單項式、多項式乘以(或除以)多項式分別給出的。其中以單項式乘以(或除以)單項式法則為基礎。

四、有些特殊形式的多項式乘法，應用很廣，把它們寫成公式，可以直接使用。本章學過的乘法公式有

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

$$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$$

五、整式相乘的結果還是整式。

複習參考題六

1. 計算：

(1) $x\bullet(x^2)^2\bullet(x^3)^3$；
(2) $2m^4\bullet(-m^2)^2$；

(3) $(ab)^2\bullet(-a)^2\bullet(-b)^3$；
(4) $2a^3b\bullet(-3ab)^3$；

(5) $(-0.4xy^3z)\bullet(-0.5x^2z)$；
(6) $(-x^2y^n)^2\bullet(xy)^3$；

(7) $\left(-\dfrac{2}{3}a^7b^5\right)\div\left(\dfrac{3}{2}a^5b^5\right)$；
(8) $(2a)^3\bullet b^4\div 12a^3b^2$；

(9) $[(-2a^3b)^3]^2\div(-3a^2b)^2$；
(10) $(4x^{n+1}y^n)^2\div[(-xy)^2]^n$。

2. 臺灣面積約是$3.6\times10^4\,\text{km}^2$。平均每 km^2 的土地上，一年內從太陽得到的能量相當於燃燒$1.5\times10^5\,\text{T}$ 煤所產生的能量。求臺灣一年內從太陽得到的能量約相當於燃燒多少 T 煤所產生的能量(保留兩個有效數字)。

3. 衛星脫離地球進入太陽系的速度(即第二宇宙速度)是$1.12\times10^4\,\text{m/秒}$。計算$3.6\times10^3$秒衛星行走多少 m(保留兩個有效數字)。

4. 計算：

(1) $2a^3b(3ab^2c-2bc)$；
(2) $(0.3a^2-0.2a+0.1)\times0.2$；

(3) $\left(-\dfrac{2}{3}a\right)\left(\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{1}{6}a-\dfrac{1}{4}\right)$；

(4) $(4\pi r^2h-2\pi rh)\div6\pi rh$；

(5) $\left(\dfrac{6}{5}a^3x^4-0.9ax^3\right)\div\dfrac{3}{5}ax^3$；

(6) $(3a^{n+4}+2a^{n+1})\div(-3a^{n-1})$；

(7) $6xy\bullet[x^2(5x+3)-3x^2(-4y)]$；

(8) $[5xy^2(x^2-3xy)-(-3x^2y)^3]\div2x^2y^2$；

(9) $2a^2b-(-3a)^2\bullet(2b)+(4a^3b^2)^2\div4a^4b^3$；

(10) $(3xy)^2(x^2-y^2)-(4x^2y^2)^2\div8y^2+9x^2y^4$。

5. 任意想一個正整數 n，按下列程序計算下去，把答案填寫在表中空格內。然後看看有什麼規律，想想這是為什麼？

$\boxed{n} \rightarrow \boxed{平方} \rightarrow \boxed{+n} \rightarrow \boxed{\div n} \rightarrow \boxed{-n} \rightarrow \boxed{答案}$

輸　入　n	3				
輸 出 答 案	1				

6. 計算：

(1) $(2a+3b)(2a-4b)$；　(2) $(5a-b)(-a-4b)$；

(3) $(9u-2v)(u+v)$；　(4) $(x^2+3)(x^2-2)$；

(5) $(3t^2+2r)(3t+5r)$；

(6) $(-3a^2b-4ab)(-a^2+5ab^2)$；

(7) $(0.3a^2b-0.4ab^2)(0.5ab^2-0.1a^2b)$；

(8) $\left(\frac{3}{5}xy^3-\frac{2}{3}x^2y\right)\left(\frac{5}{4}x^2y^2-\frac{6}{5}xy\right)$；

(9) $(3x-5)(x^2-7x+3)$；

(10) $(5a+2b)(ab-4a^2+3b^2)$；

(11) $3(2x-1)(x+6)-5(x-3)(x+6)$；

(12) $(x^3+2xy^2-3y^3)(2x-y)-8xy(x^2-y^2)$。

7. 計算：

(1) $\left(\frac{1}{3}a^2-\frac{1}{4}b\right)\left(-\frac{1}{4}b-\frac{1}{3}a^2\right)$；　(2) $5x^2(x+3)(x-3)$；

(3) $\left(2x+\frac{1}{2}\right)\left(2x-\frac{1}{2}\right)\left(4x^2+\frac{1}{4}\right)$；(4) $\left(\frac{7}{3}x+\frac{3}{2}y\right)^2$；

(5) $\left(\frac{2}{3}c^2-0.6d^2\right)^2$；

(6) $4x(x-1)^2-x(2x+5)(2x-5)$；

(7) $3(2x+1)(2x-1)-4\left(\frac{3}{2}x-3\right)\left(\frac{3}{2}x+3\right)$；

(8) $5(2x+5)^2+(3x-4)(-3x-4)$ ；

(9) $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$ ；

(10) $(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2)$ ；

(11) $(x-y)^2(x+y)^2$ ；

(12) $(2x+y-z)^2$ ；

(13) $(x+y)^2(x^2-xy+y^2)^2$ ；

(14) $\left[\left(\frac{1}{2}x-y\right)^2-\left(\frac{1}{2}x+y\right)^2\right]\left(2x^2-\frac{1}{2}y^2\right)$ ；

(15) $(2x+y-z+5)(2x-y+z+5)$ ；

(16) $(x+y-z)(x-y+z)-(x+y+z)(x-y-z)$ 。

8. 計算：

(1) $(a+b)^2+(a-b)^2+(-2a-b)(a+2b)$ ；

(2) $5(m+n)(m-n)-2(m+n)^2-3(m-n)^2$ ；

(3) $(x-y)[(x+y)^2-xy]+(x+y)[(x-y)^2+xy]$ ；

(4) $(a+b+c)^2+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ 。

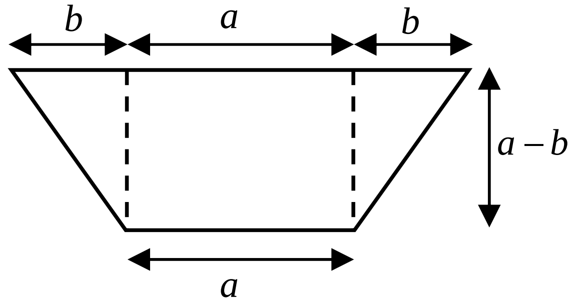
9. 先化簡，再求值：

(1) $(25y^2-5y+1)(5y+1)-5(1-4y^2)$ ，其中 $y=\frac{2}{5}$ ；

(2) $8m^2-5m(-m+3n)+4m\left(-4m-\frac{5}{2}n\right)$，其中 $m=2$、$n=-1$；

(3) $x(y-z)-y(z-x)+z(x-y)$，其中 $x=\frac{1}{2}$、$y=1$、$z=-\frac{1}{2}$ 。

10. 一條水渠，其橫斷面為梯形，尺寸如圖所示，求橫斷面面積的代數式，並計算當 $a=2$、$b=0.8$時的面積。



(第 10 題)

11. 已知甲數為 $2a$，乙數比甲數的 2 倍多 3，丙數比甲數的 2 倍少 3，求甲、乙、丙三數的積。當 $a=-2.5$時，積是多少？

12. (1) 一個多項式除以 x^2-4x+1，得 $x+2$，求這個多項式；

(2) 一個多項式乘以 $x+4$，得 x^3+3x^2-4x，求這個多項式；

(3) 一個多項式除以 x^2-4x+1，商式為 $x+1$，餘式為 $3x+1$，求這個多項式。

13. 計算：

(1) $(4x^2+4x-3)\div(2x+3)$；

(2) $(x^3-3x^2-9x+22)\div(x-2)$；

(3) $(6x^2+19x+15)\div(2x+5)$；

(4) $(x^3-x^2+x-1)\div(x^2-3x+5)$。

14. 已知 $A=x^3-7x+6$、$B=x^2+2x-3$、$C=x^2+x-6$，計算：

(1) $A\div(B-C)$；

(2) $A\div B-A\div C$。

15. 已知 $A=a^2+b^2+c^2$、$B=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$，計算 $A-\dfrac{B}{2}$。

16. (1) a、b 是什麼數時，$ab>0$？$ab<0$？$ab=0$？

(2) a、b 是什麼數時，$a\div b$是正數？是負數？是零？沒有意義？

17. 解下列不等式：

(1) $5x+4>3x-1$；

(2) $\dfrac{x-1}{3}-\dfrac{x+2}{6}<\dfrac{x}{2}-2$；

(3) $(2x-5)^2+(3x+1)^2>13(x^2-10)$；

(4) $(3x+4)(3x-4)<9(x-2)(x+3)$。

18. 解下列方程：

(1) $x^2-(x+1)(x-5)=2(x-5)$；

(2) $(x+3)^2+2(x-1)^2=3x^2+13$；

(3) $(x-5)(x+5)-(x+1)(x+5)=24$；

(4) $(2x+3)(x-4)=(x-2)(2x+5)$；

(5) $(x-1)^2+28=\left(\dfrac{4}{3}x-12\right)\left(\dfrac{3}{4}x-12\right)$。

19. 解下列方程組：

(1) $\begin{cases}(x+3)(y+4)-xy=17\\x-y=3\end{cases}$；

(2) $\begin{cases}(x+1)^2-(x+1)(x-1)=y\\(y-1)^2-(y+1)(y-1)=x\end{cases}$；

(3) $\begin{cases}(x+5)(y-4)-xy=0\\3x-2y=-1\end{cases}$；

(4) $\begin{cases}(x+2)^2-(y-3)^2=(x+y)(x-y)\\x-3y=2\end{cases}$。

20. 將一些水果糖平分給一群小朋友，若每人分 27 顆糖時，還剩餘 23 顆糖；若每人分 28 顆糖時，還剩餘 8 顆糖。問共有多少位小朋友？共有多少顆水果糖？

21. (1) 兩個有理數的和、差、積、商(除數不為 0)是不是有理數？

(2) 兩個整式的和、差、積是不是整式？