第七章　因式分解

7.1　因式分解

在算術裡學習分數的時候，常常要進行約分與通分，因此，常要把一個數分解因數(即分解約數)。例如，把 33 分解成3×11，把 42 分解成$2\times3\times7$ 。

在代數裡學習分式的時候，也常要進行約分與通分，因此，也常要把一個多項式化成幾個整式的積。

把一個多項式化成幾個整式的積之形式，叫做**因式分解**，也可以叫做**分解因式**。

因式分解與乘法正好相反。例如，從$(a+b)(a-b)$求得a^2-b^2是我們學過的乘法，反過來，從a^2-b^2求得$(a+b)(a-b)$就是因式分解。因此，我們可以從整式乘法得出因式分解的某些方法。

下面學習幾種常用的因式分解之方法。

7.2　提公因式法

我們先看一個例子：怎樣把多項式$am+bm-cm$分解因式。由單項式與多項式相乘的法則，我們有

$$m(a+b-c)=ma+mb-mc\ ,$$

反過來，就可以得到

$$ma+mb-mc=m(a+b-c)\ ,$$

這就說，多項式$ma+mb-mc$可以分解成因式 m 與因式$a+b-c$的積。

在等式$ma+mb-mc=m(a+b-c)$中：

左邊是要分解因式的多項式$ma+mb-mc$，它的各項含有相同之因式 m。一個多項式每一項都含有的相同之因式，叫做這個多項式各項的**公因式**。m 是多項式$ma+mb-mc$各項的公因式。

右邊是分解後的式子 $m(a+b-c)$，可以看出它是因式 m 與因式 $a+b-c$ 的積，其中 m 是 $ma+mb-mc$ 中各項的公因式，$a+b-c$ 則等於用 m 去除 $ma+mb-mc$ 所得的商式。

從上面的例子可以看出：如果一個多項式的各項含有公因式，就可以提出這個公因式作為多項式的一個因式；用這個因式去除這個多項式，所得的商式就是另一個因式；再把多項式寫成這兩個因式的積。這種分解因式的分法叫做**提公因式法**。

【例 1】把 $4a^3b^2-6ab^3c$ 分解因式。

$\boxed{解}$ $$4a^3b^2-6ab^3c = 2ab^2 \bullet 2a^2 - 2ab^2 \bullet 3bc$$ 。

$$= 2ab^2(a^2-3bc)$$

從例 1 可以看出，所提出的公因式是各項係數的最大公因數與各項都含有的字母之最低次冪的積。

【例 2】把 $3x^2-6xy+x$ 分解因式。

$\boxed{解}$ $$3x^2-6xy+x = x\bullet 3x - x\bullet 6y + x\bullet 1$$ 。

$$= x(3x-6y+1)$$

注意：在例 2 中，$x = x\bullet 1$，這個係數「1」通常可以省略，但在因式分解時不能漏掉。

【例 3】把 $-4m^3+16m^2-6m$ 分解因式。

$\boxed{解}$ $$-4m^3+16m^2-6m = -(4m^3-16m^2+6m)$$ 。

$$= -(2m\bullet 2m^2 - 2m\bullet 8m + 2m\bullet 3)$$

$$= -2m(2m^2-8m+3)$$

如果多項式的第一項係數是負數，一般要提出「－」號，使括號內的第一項係數是正數。在提出「－」號時，多項式的各項都要變號。

練　習

1. (口答) 下面由左邊到右邊的變形，哪些是因式分解？哪些不是？為什麼？

   (1) $(x+2)(x-3)=x^2-x-6$；　(2) $x^2-4=(x+2)(x-2)$；

   (3) $x^2-4+3x=(x+2)(x-2)+3x$。

2. (口答) 如果用提公因式法把下列多項式分解因式，應該分別提出怎樣的公因式？

   (1) $ax+ay$；　(2) $3mx-6nx$；

   (3) $4a^2+10ab$；　(4) $15a^2+5a$；

   (5) x^2y+xy^2；　(6) $12xyz-9x^2y^2$。

3. 把下列各式分解因式：

   (1) $nx-ny$；　(2) a^2+ab；

   (3) $4x^3-6x^2$；　(4) $8m^2n+2mn$；

   (5) $3a^2y-3ay+6y$；　(6) $a^2b+5ab-b$；

   (7) $-x^2+xy-xz$；　(8) $-24x^2y-12xy^2+28y^3$；

   (9) $-3ma^2-6ma^2+12ma$；　(10) $56x^3yz+14x^2y^2z-21xy^2z^2$

【例 4】 把 $2a(b+c)-3(b+c)$ 分解因式。

分析： 把這個多項式看成一個二項式，第一項是 $2a(b+c)$，第二項是 $-3(b+c)$，這兩項含有公因式 $b+c$，所以可以用提公因式法分解因式。

解　$2a(b+c)-3(b+c)=(b+c)(2a-3)$。

【例 5】 把 $6(x-2)+x(2-x)$ 分解因式。

分析： 把這個多項式看成一個二項式，因為 $2-x=-(x-2)$，所以各項含有公因式 $x-2$，可以用提公因式法分解因式。

解

$$\begin{aligned}6(x-2)+x(2-x)&=6(x-2)-x(x-2)\\&=(x-2)(6-x)\end{aligned}$$

【例 6】 把$5(x-y)^3+10(y-x)^2$分解因式。

分析： 這一個多項式仍可以被看做一個二項式，因為$(y-x)^2=[-(x-y)]^2=(x-y)^2$，所以各項含有公因式$(x-y)^2$，可以用提公因式法分解因式。

解

$$
\begin{aligned}
5(x-y)^3+10(y-x)^2 &= 5(x-y)^3+10(x-y)^2 \\
&= 5(x-y)^2 \bullet (x-y)+5(x-y)^2 \bullet 2 \\
&= 5(x-y)^2[(x-y)+2] \\
&= 5(x-y)^2(x-y+2)
\end{aligned}
$$

【例 7】 把$18b(a-b)^2-12(a-b)^3$分解因式。

解

$$
\begin{aligned}
18b(a-b)^2-12(a-b)^3 &= 6(a-b)^2[3b-2(a-b)] \\
&= 6(a-b)^2(3b-2a+2b) \\
&= 6(a-b)^2(5b-2a)
\end{aligned}
$$

練 習

1. 在下列各式右邊的括號前填入適當的符號(正號或負號)，使左邊與右邊相等：
   (1) $y-x=\quad(x-y)$；　(2) $b-a=\quad(a-b)$；
   (3) $d+c=\quad(c+d)$；　(4) $-z-y=\quad(y+z)$；
   (5) $(b-a)^2=\quad(a-b)^2$；　(6) $-x^2+y^2=\quad(x^2-y^2)$；
   (7) $(x-y)^3=\quad(y-x)^3$；
   (8) $(1-x)(x-2)=\quad(x-1)(x-2)$。
2. 把下列各式分解因式：
   (1) $a(x+y)+b(x+y)$；　(2) $6(p+q)^2-2(p+q)$；
   (3) $2(x-y)^2-x(x-y)$；　(4) $m(a-b)-n(b-a)$；
   (5) $3(y-x)^2+2(x-y)$；　(6) $m(m-n)^2-n(n-m)^2$；
   (7) $mn(m-n)-m(n-m)^2$；　(8) $2x(x+y)^2-(x+y)^3$。

習　題　六

1. 把下列各式分解因式：

(1) $cx-cy+cz$；　(2) $px-qx-rx$；

(3) $15a^3-10a^2$；　(4) $12abc-2bc^2$；

(5) $4x^2y-xy^2$；　(6) $63pq+14pq^2$；

(7) $24a^3m-18a^2m^2$；　(8) x^ny-x^nz。

2. 在下列各式右邊的括號內填入適當的多項式，使左邊與右邊相等：

(1) $14abx-8ab^2x+2ax=2ax(\qquad\qquad\qquad)$；

(2) $-7ab-14abx+49aby=-7ab(\qquad\qquad\qquad)$。

3. 把下列各式分解因式：

(1) $15x^3y^2+5x^2y-20x^2y^3$；

(2) $6m^2n-15mn^2+30m^2n^2$；

(3) $-16x^4-32x^3+56x^2$；

(4) $-4a^3b^2-6a^2b-2ab$。

4. 把下列各式分解因式：

(1) $x(a+b)-y(a+b)$；

(2) $5x(x-y)+2y(x-y)$；

(3) $6q(p+q)-4p(p+q)$；

(4) $(m+n)(p+q)-(m+n)(p-q)$；

(5) $a(a-b)+(a-b)^2$；

(6) $x(x-y)^2-y(x-y)$；

(7) $(2a+b)(2a-3b)-3a(2a+b)$；

(8) $x(x+y)(x-y)-x(x+y)^2$。

5. 把下列各式分解因式：

(1) $p(x-y)-q(y-x)$；

(2) $m(a-m)+2(3-a)$；

(3) $(a+b)(a-b)-(b+a)$；

(4) $a(x-a)+b(a-x)-c(x-a)$；

(5) $10a(x-y)^2-5b(y-x)$；

(6) $x(x-y)^2-y(y-x)$；

(7) $3(x-1)^3y-(1-x)^3z$；

(8) $x(a-x)(a-y)-y(x-a)(y-a)$。

6. 利用因式分解計算：

(1) $21\times 3.14+62\times 3.14+17\times 3.14$；

(2) $2.186\times 1.237-1.237\times 1.186$。

7. 已知公式$V=IR_1+IR_2+IR_3$，當$I=2.5$、$R_1=19.7$、$R_2=32.4$、$R_3=35.9$時，利用因式分解求V的值。

7.3 運用公式法

根據因式分解的意義，可以看出，如果把乘法公式反過來，就可以用來把某些多項式分解因式。這種分解因式的方法叫做**運用公式法**。

1. 平方差公式

我們知道

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

反過來，就得到

$$\boxed{\boldsymbol{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}}$$

這就是說，兩個數的平方差，等於這兩個數的和與這兩個數的差之積。這個公式叫做**平方差公式**。運用這個公式，可以把形式是平方差的多項式分解因式。

例如，把多項式 x^2-16 與 $9m^2-4n^2$ 分解因式。這兩個多項式都不能利用提公因式法來進行分解，但我們可以看到 $16=4^2$ 、 $9m^2=(3m)^2$ 、 $4n^2=(2n)^2$ ，所以知 $x^2-16=x^2-4^2$ 、 $9m^2-4n^2=(3m)^2-(2n)^2$，都是形式為平方差的多項式，可運用公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 來分解因式，即

$$x^2-16=x^2-4^2=(x+4)(x-4)$$

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$$9m^2-4n^2=(3m)^2-(2n)^2=(3m+2n)(3m-2n)$$

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

【例 1】把下列各式分解因式：(1) $1-25b^2$ ；
(2) $x^2y^2-z^2$ ；
(3) $\dfrac{4}{9}m^2-0.01n^2$ 。

解

(1) $1-25b^2=1-(5b)^2=(1+5b)(1-5b)$ ；

(2) $x^2y^2-z^2=(xy)^2-z^2=(xy+z)(xy-z)$ ；

(3) $$\frac{4}{9}m^2-0.01n^2=\left(\frac{2}{3}m\right)^2-(0.1n)^2$$
$$=\left(\frac{2}{3}m+0.1n\right)\left(\frac{2}{3}m-0.1n\right)$$

【例 2】把下列各式分解因式：(1) $(x+p)^2-(x+q)^2$ ；
(2) $16(a-b)^2-9(a+b)^2$ 。

分析： $(x+p)^2-(x+q)^2$ 是 $x+p$ 與 $x+q$ 的平方差；另一個式子 $16(a-b)^2-9(a+b)^2=[4(a-b)]^2-[3(a+b)]^2$ ，可發現它

是 $4(a-b)$ 與 $3(a+b)$ 的平方差，所以它們都可以運用平分差公式分解因式。

$\boxed{解}$ (1) $(x+p)^2-(x+q)^2=[(x+p)+(x+q)][(x+p)-(x+q)]$

$$=(2x+p+q)(p-q)$$

(2) $16(a-b)^2-9(a+b)^2$

$$=[4(a-b)]^2-[3(a+b)]^2$$
$$=[4(a-b)+3(a+b)][4(a-b)-3(a+b)]$$
$$=(7a-b)(a-7b)$$

【例 3】把下列各式分解因式： (1) x^5-x^3； (2) x^4-y^4。

$\boxed{解}$ (1) $x^5-x^3=x^3(x^2-1)=x^3(x+1)(x-1)$；

(2) $x^4-y^4=(x^2)^2-(y^2)^2$

$$=(x^2+y^2)(x^2-y^2)$$
$$=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$$

注意：(1) 如果多項式的各項含有公因式，就先提出這個公因式，再進一步分解因式；

(2) 分解因式，必須進行到每一個因式都不能再分解為止。

練 習

1. 在下列各式右邊的括號內填入適當的單項式(係數取正數)，使左邊與右邊相等：

(1) $4x^2=(\quad)^2$； (2) $25m^2=(\quad)^2$；

(3) $36a^4=(\quad)^2$； (4) $0.09b^2=(\quad)^2$；

(5) $81n^6=(\quad)^2$； (6) $\dfrac{16}{49}c^2=(\quad)^2$；

(7) $64x^2y^2=(\quad)^2$； (8) $100p^4q^2=(\quad)^2$。

2. (口答) 把下列各式分解因式：

(1) x^2-4； (2) $9-y^2$；

(3) $1-a^2$； (4) $4x^2-y^2$。

練 習

3. 把下列各式分解因式：

(1) $a^2-\frac{1}{9}x^2$；　　(2) $36-m^2$；

(3) $4x^2-9y^2$；　　(4) $0.81a^2-16b^2$；

(5) $36n^2-1$；　　(6) $25p^2-49q^2$。

4. 下列各項式可不可以用平方差公式來分解因式？如果可以，應分解成什麼式子？如果不可以，說明為什麼。

(1) x^2+y^2；　　(2) x^2-y^2；

(3) $-x^2+y^2$；　　(4) $-x^2-y^2$。

5. 把下列各式分解因式：

(1) $4a^2-(b+c)^2$；　　(2) $(3m+2n)^2-(m-n)^2$；

(3) $2ab^3-2ab$；　　(4) x^3-16x；

(5) $1-a^4$；　　(6) $-x^4+16$。

2. 完全平方公式

我們知道

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

反過來，就得到

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{a^2+2ab+b^2}&=\boldsymbol{(a+b)^2}\\ \boldsymbol{a^2-2ab+b^2}&=\boldsymbol{(a-b)^2}\end{aligned}}$$

這就是說，兩個數的平方和，加上(或者減去)這兩個數的積之 2 倍，等於這兩個數的和(或者差)之平方，因此，我們把 $a^2+2ab+b^2$ 及 $a^2-2ab+b^2$ 這樣的式子叫做**完全平方式**，把上面方框中兩個公式叫做**完全平方公式**。運用這兩個公式，可以把形式是完全平方式的多項式分解因式。

例如，把多項式x^2+6x+9及$4x^2-20x+25$分解因式。多項式x^2+6x+9有三項，第一項是x的平方，第三項 9 是 3 的平方，第二項$6x$正好是x與 3 的積之 2 倍，所以x^2+6x+9是一個完全平方式，可以運用完全平方公式$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$把它分解因式，即

$$x^2+6x+9=x^2+2\bullet x\bullet 3+3^2=(x+3)^2$$

$$a^2+2\bullet a\bullet b+b^2=(a+b)^2$$

類似地，多項式$4x^2-20x+25$也共有三項，第一項$4x^2$是$2x$的平方，第三項 25 是 5 的平方，第二項$-20x$正好是$2x$與 5 的積之 2 倍的相反數，所以$4x^2-20x+25$是一個完全平方式，可以運用完全平方公式$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$把它分解因式，即

$$4x^2-20x+25=(2x)^2-2\bullet 2x\bullet 5+5^2=(2x-5)^2$$

$$a^2-2\bullet a\bullet b+b^2=(a-b)^2$$

【例 4】 把$25x^4+10x^2+1$分解因式。

$\boxed{解}$ $25x^4+10x^2+1=(5x^2)^2+2\bullet 5x^2\bullet 1+1^2=(5x^2+1)^2$。

【例 5】 把$-x^2-4y^2+4xy$分解因式。

$\boxed{解}$

$$\begin{aligned}-x^2-4y^2+4xy&=-(x^2+4y^2-4xy)\\&=-(x^2-4xy+4y^2)\\&=-[x^2-2\bullet 2xy+(2y)^2]\\&=-(x-2y)^2\end{aligned}$$

【例 6】 把$3ax^2+6axy+3ay^2$分解因式。

$\boxed{解}$ $3ax^2+6axy+3ay^2=3a(x^2+2xy+y^2)=3a(x+y)^2$。

練　習

1. 把下列各式分解因式：

(1) x^2+2x+1；　(2) $4a^2+4a+1$；

(3) $1-6y+9y^2$；　(4) $1+m+\dfrac{m^2}{4}$。

2. 下列多項式是不是完全平方式？如果是，可以分解成什麼式子？如果不是，說明為什麼。

(1) x^2-4x+4；　(2) $1+16a^2$；

(3) $4x^2+4x-1$；　(4) x^2+xy+y^2。

3. 把下列各式分解因式：

(1) $x^2-12xy+36y^2$；　(2) $25p^2+10pq+q^2$；

(3) $\dfrac{m^2}{9}+\dfrac{2mn}{3}+n^2$；　(4) $a^2-14ab+49b^2$；

(5) $16a^4+24a^2b^2+9b^4$；　(6) $(x+y)^2-10(x+y)+25$；

(7) $-2xy-x^2-y^2$；　(8) $ax^2+2a^2x+a^3$。

3. 立方和與立方差公式

我們知道

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

反過來，就得到

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{a^3+b^3} &= \boldsymbol{(a+b)(a^2-ab+b^2)} \\ \boldsymbol{a^3-b^3} &= \boldsymbol{(a-b)(a^2+ab+b^2)} \end{aligned}}$$

這就是說，兩個數的立方和(或者差)，等於這兩個數的和(或者差)乘以它們的平方和與它們的積之差(或者和)。這兩個公式分別叫做**立方和公式與立方差公式**。運用這兩個公式，可以把形式是立方和或立方差的多項式分解因式。

注意：公式中的因式 a^2-ab+b^2 與 a^2+ab+b^2 都是非完全平方式。

例如，把多項式 x^3+8 及 $27-8a^3$ 分解因式。因為 $8=2^3$，所以 x^3+8 是形式為立方和的一個多項式，因此可以運用立方和公式 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 來分解因式，即

$$x^3+8=x^3+2^3 \;=\; (x+2)(x^2-x\bullet 2+2^2)$$

$$\updownarrow \quad \updownarrow \qquad\qquad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \qquad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$$

$$\boxed{a^3+b^3} = \boxed{(a+b)(a^2-a\bullet b+b^2)}$$

類似地，因為 $27=3^3$、$8a^3=(2a)^3$，所以 $27-8a^3$ 是形式為立方差的多項式，因此可以運用立方差公式 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ 來分解因式，即

$$27-8a^3=3^3-(2a)^3 = (3-2a)[3^2+3\bullet 2a+(2a)^2]$$

$$\updownarrow \quad \updownarrow \qquad\qquad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \qquad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$$

$$\boxed{a^3-\ b^3} = \boxed{(a-\ b)\,(a^2+a\bullet\ b+\ b^2)}$$

【例 7】把下列各式分解因式：

(1) $27-x^6$； (2) $1+\dfrac{a^3b^3}{8}$。

$\boxed{\text{解}}$ (1)
$$\begin{aligned}27-x^6&=3^3-(x^2)^3\\&=(3-x^2)[3^2+3\bullet x^2+(x^2)^2]\\&=(3-x^2)(9+3x^2+x^4)\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}1+\frac{a^3b^3}{8}&=1^3+\left(\frac{ab}{2}\right)^3\\&=\left(1+\frac{ab}{2}\right)\left[1^2-1\bullet\frac{ab}{2}+\left(\frac{ab}{2}\right)^2\right]\\&=\left(1+\frac{ab}{2}\right)\left(1-\frac{ab}{2}+\frac{a^2b^2}{4}\right)\end{aligned}$$

【例 8】 把 $x-xy^3$ 分解因式。

解 $x-xy^3=x(1-y^3)=x(1-y)(1+y+y^2)$ 。

練 習

1. 在下列各式右邊的括號內填入適當的單項式，使左邊與右邊相等：

   (1) $64a^3=(\quad)^3$ ； (2) $125n^6=(\quad)^3$ ；

   (3) $0.001x^3=(\quad)^3$ ； (4) $-27a^3b^3=(\quad)^3$ 。

2. 把下列各式分解因式：

   (1) a^3+1 ； (2) $1-m^3$ ；

   (3) $8p^3-q^3$ ； (4) $27+x^3$ ；

   (5) $1-27y^6$ ； (6) $125m^3+8n^3$ ；

   (7) p^6-64q^3 ； (8) $m^3n^3-\dfrac{1}{125}$ 。

3. 把下列各式分解因式：

   (1) $81+3x^3$ ； (2) y^4-8y ；

   (3) $-27-a^3$ ； (4) $4m^4-\dfrac{m}{2}$ 。

習 題 七

把下列各式分解因式 (第 1～3 題)：

1. (1) a^2-49 ； (2) $64-x^2$ ；

   (3) $1-36b^2$ ； (4) m^2-81n^2 ；

   (5) $0.49p^2-144q^2$ ； (6) $121x^2-4y^2$ ；

   (7) $a^2p^2-b^2q^2$ ； (8) $\dfrac{25}{4}a^2-x^2y^2$ 。

2. (1) $(m+n)^2-n^2$ ； (2) $169(a-b)^2-196(a+b)^2$ ；

   (3) $(2x+y)^2-(x+2y)^2$ ； (4) $(a+b+c)^2-(a+b-c)^2$ ；

   (5) $4(2p+3q)^2-(3p-q)^2$ ； (6) $(x^2+y^2)^2-x^2y^2$ 。

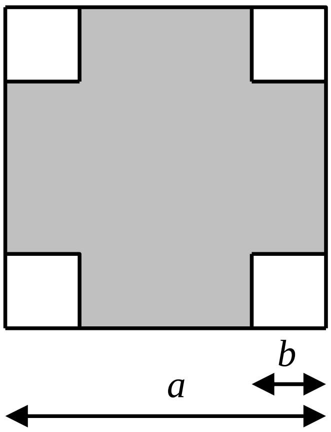
3. (1) $81a^4-b^4$； (2) $8y^4-2y^2$；

(3) $3ax^2-3ay^4$； (4) m^4-1。

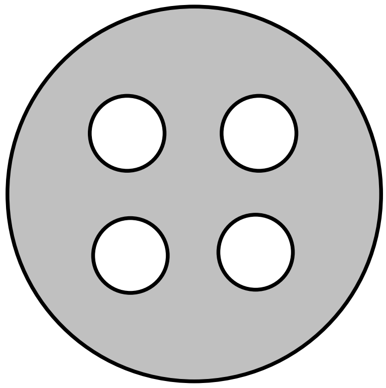
4. 利用因式分解計算：

(1) 758^2-258^2； (4) 429^2-171^2；

5. 如圖所示，在一塊邊長為 a cm 的正方形紙板之四角，各剪去一個邊長為 b $\left(b<\dfrac{a}{2}\right)$ cm 的正方形，利用因式分解來計算當 $a=13.2$、$b=3.4$ 時剩餘部分的面積。



(第 5 題)



(第 6 題)

6. 如圖，在半徑為 R 的圓形紙板上，剪去半徑為 r 的四個小圓，利用因式分解計算當 $R=7.8$ cm、$r=1.1$ cm 時剩餘部分的面積(π 取 3.14，結果保留兩個有效數字)。

把下列各式分解因式 (第 7～11 題)：

7. (1) x^2-2x+1； (2) $a^2+8a+16$；

(3) $1-4t+4t^2$； (4) $m^2-14m+49$；

(5) $b^2-22h+121$； (6) $y^2+y+\dfrac{1}{4}$。

8. (1) $25m^2-80m+64$； (2) $4a^2+36a+81$；

(3) $4p^2-20pq+25q^2$； (4) $\dfrac{x^2}{4}+xy+y^2$。

9. (1) $25a^4-40a^2b^2+16b^4$；(2) $36x^4-12x^2y+y^2$；
(3) $a^2b^2-4ab+4$；(4) $16-8xy+x^2y^2$。

10. (1) $(x+y)^2+6(x+y)+9$；(2) $a^2-2a(b+c)+(b+c)^2$；
(3) $4-12(x-y)+9(x-y)^2$；(4) $(m+n)^2+4m(m+n)+4m^2$。

11. (1) $2xy-x^2-y^2$；(2) $4xy^2-4x^2y-y^3$；
(3) $3-6x+3x^2$；(4) $-a+2a^2-a^3$。

把下列各式分解因式 (第 12～15 題)：

12. (1) x^3-y^3；(2) x^3+125；
(3) a^3+8b^3；(4) $27m^3-n^3$。

13. (1) $1-\frac{1}{8}a^3$；(2) $0.064p^3+1$；
(3) x^3y^3-27；(4) p^3-q^6。

14. (1) $(a+b)^3+c^3$；(2) $(2x+1)^3-x^3$；
(3) $-a-a^4$；(4) $3x^3+24$。

15. (1) $x^5-x^3y^2$；(2) $16x^5+8x^3y^2+xy^4$；
(3) x^4+xy^3；(4) $16x^4-y^4$。

16. 先把下列各式分解因式，然後指出每道題中幾個式子的公因式：
(1) x^2-4y^2 與 $x^2+4xy+4y^2$；
(2) $9x^2-24x+16$ 、 $27x^3-64$ 與 $9x^2-16$ 。

7.4 可化為 $x^2+(a+b)x+ab$ 型的二次三項式之因式分解

我們知道

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

反過來，就得到

$$\boxed{\boldsymbol{x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)}}$$

這就是說，對於二次三項式 x^2+px+q ，如果能夠把常數項 q 分解成兩個因數 a、b 的積，並使 $a+b=p$ ，那麼它就可以分解因式，即

$$x^2+px+q=x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b) \text{ 。}$$

運用這個公式，可以把某些二次項係數為 1 的二次三項式分解因式。

例如，把二次三項式 x^2+5x+6 分解因式。我們設法把常數項 6 分解成兩個因數的積，使這兩個因數的和等於一次項的係數 5。因為 $6=2\times3$ ，並且 $2+3=5$ ，所以

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3) \text{ 。}$$

【例 1】 把 x^2+3x+2 分解因式。

分析： 常數項 2 可以分解成 1 與 2 或 -1 與 -2 的積，其中只有 1 + 2 等於一次項的係數 3。

$\boxed{\text{解}}$ 因為 $2=1\times2$ ，並且 $1+2=3$ ，所以

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2) \text{ 。}$$

【例 2】 把 x^2-7x+6 分解因式。

分析： 常數項 6 可以分解成 1 與 6、-1 與 -6、2 與 3 或 -2 與 -3 的積，其中只有 $(-1)+(-6)=-7$ 等於一次項的係數 -7 。

$\boxed{\text{解}}$ 因為 $6=(-1)\times(-6)$ ，並且 $(-1)+(-6)=-7$ ，所以

$$x^2-7x+6=[x+(-1)][x+(-6)]=(x-1)(x-6) \text{ 。}$$

【例 3】把 $x^2-4x-21$ 分解因式。

分析：常數項 -21 可以分解成 1、-21，或 -1、21，或 3、-7，或 -3、7 的積，其中只有 $3+(-7)=-4$ 等於一次項的係數 -4。

$\boxed{解}$ 因為 $-21=3\times(-7)$，並且 $3+(-7)=-4$，所以

$$x^2-4x-21=(x+3)[x+(-7)]=(x+3)(x-7)$$ 。

【例 4】把 $x^2+2x-15$ 分解因式。

$\boxed{解}$ 因為 $-15=(-3)\times 5$，並且 $(-3)+5=2$，所以

$$x^2+2x-15=[x+(-3)](x+5)=(x-3)(x+5)$$ 。

通過例 1～4 可以看出：常數項是正數時，應分解成兩個同號因數，它們的符號與一次項係數的符號相同；常數項是負數時，應分解成兩個異號因數，其中絕對值較大的因數與一次項係數的符號相同。

【例 5】把下列各式分解因式：

(1) x^4+6x^2+8；(2) $(a+b)^2-4(a+b)+3$。

$\boxed{解}$ (1)
$$\begin{aligned} x^4+6x^2+8&=(x^2)^2+6(x^2)+8\\ &=[(x^2)+2][(x^2)+4]\\ &=(x^2+2)(x^2+4)\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}(a+b)^2-4(a+b)+3&=[(a+b)-1][(a+b)-3]\\ &=(a+b-1)(a+b-3)\end{aligned}$$

【例 6】把 $x^2-3xy+2y^2$ 分解因式。

分析：把 $x^2-3xy+2y^2$ 看成 x 的二次三項式，則這時常數項是 $2y^2$，一次項係數是 $-3y$。把 $2y^2$ 分解成 $-y$ 與 $-2y$ 的積，$(-y)+(-2y)=-3y$ 恰好等於一次項的係數。

$\boxed{解}$ $x^2-3xy+2y^2=(x-y)(x-2y)$ 。

【例 7】把 $x^4-3x^3-28x^2$ 分解因式。

$\boxed{解}$ $x^4-3x^3-28x^2=x^2(x^2-3x-28)=x^2(x+4)(x-7)$ 。

練 習

1. (口答) 把下列各數分解成兩個因數的積 (要把所有可能的情況都列舉出來)：

   (1) 3； (2) –5； (3) 12； (4) –8。

把下列各式分解因式(第 2～5 題)：

2. (1) x^2+4x+3； (2) $a^2+7a+10$；
   (3) $y^2-7y+12$； (4) q^2-6q+8；
   (5) x^2+x-20； (6) $m^2+7m-18$；
   (7) $p^2-5p-36$； (8) t^2-2t-8。
3. (1) x^4-x^2-20； (2) $ax^2+7ax-8$。
4. (1) $a^2-9ab+14b^2$； (2) $x^2+11xy+18y^2$。
5. (1) $x^2y^2-5x^2y-6x^2$； (2) $-a^3-4a^2+12a$。

7.5 分组分解法

1. 分組後能提公因式

現在我們來看怎樣把多項式

$$ax+ay+bx+by$$

分解因式。

這個多項式的各項沒有公因式，也不能直接運用公式來分解。但是它的前兩項有公因式 a，後兩項有公因式 b，如果試著把它們按前兩項與後兩項分成兩組，即試著把這個多項式寫成

$$(ax+ay)+(bx+by)$$

從兩組分別提出公因式 a 與 b 後，得

$$a(x+y)+b(x+y)$$

這時，分成的兩組又有公因式 $x+y$，於是可以提出 $x+y$ 作為全

式的一個因式，從而可以把原多項式分解成$(x+y)(a+b)$。即

$$\begin{aligned}ax+ay+bx+by&=(ax+ay)+(bx+by)\\&=a(x+y)+b(x+y)\\&=(x+y)(a+b)\end{aligned}$$

這種利用分組來分解因式的方法叫做**分組分解法**。從上面的例子可以看出，如果把一個多項式的項分組並提出公因式之後，各組之間又有公因式，那麼這個多項式就可以用分組分解法來分解因式。

【例 1】 把$a^2-ab+ac-bc$分解因式。

分析： 把這個多項式的四項按前兩項與後兩項分成兩組，分別提出公因式a與c之後，另一個因式正好都是$a-b$，這樣全式就可以提出公因式$a-b$。

$\boxed{解}$

$$\begin{aligned}a^2-ab+ac-bc&=(a^2-ab)+(ac-bc)\\&=a(a-b)+c(a-b)\\&=(a-b)(a+c)\end{aligned}$$

【例 2】 把$2ax-10ay+5by-bx$分解因式。

分析： 把這個多項式的四項按前兩項與後兩項分成兩組，並使兩組的項都按x之降冪排列，然後從兩組分別提出公因式 $2a$ 與$-b$，這時，另一個因式正好都是$x-5y$，這樣全式就可以提出公因式$x-5y$。

$\boxed{解}$

$$\begin{aligned}2ax-10ay+5by-bx&=(2ax-10ay)+(5by-bx)\\&=(2ax-10ay)+(-bx+5by)\\&=2a(x-5y)-b(x-5y)\\&=(x-5y)(2a-b)\end{aligned}$$

想一想：例 1、例 2 中還有沒有其它分組的辦法？因式分解的結果是不是一樣？

【例 3】 把 $3ax+4by+4ay+3bx$ 分解因式。

分析： 這個多項式如果按前兩項與後兩項分成兩組，無法分解因式。但如果把第一、三項作為一組，第二、四項作為另一組，分別提出公因式 a 與 b 後，另一個因式正好都是 $3x+4y$ ，這樣全式就可以提出公因式 $3x+4y$ 。

$\boxed{解}$

$$\begin{aligned}3ax+4by+4ay+3bx &= (3ax+4ay)+(4by+3bx)\\ &= (3ax+4ay)+(3bx+4by)\\ &= a(3x+4y)+b(3x+4y)\\ &= (3x+4y)(a+b)\end{aligned}$$

【例 4】 把 $m^2+5n-mn-5m$ 分解因式。

$\boxed{解}$

$$\begin{aligned}m^2+5n-mn-5m &= (m^2-mn)+(5n-5m)\\ &= (m^2-mn)+(-5m+5n)\\ &= m(m-n)-5(m-n)\\ &= (m-n)(m-5)\end{aligned}$$

想一想：例 3、例 4 中還有沒有其它分組的辦法？因式分解的結果是不是一樣？

練　習

把下列各式分解因式：

1. (1) $20(x+y)+x+y$ ；　(2) $p-q+k(p-q)$ ；
   (3) $5m(a+b)-a-b$ ；　(4) $2m-2n-4x(m-n)$ 。
2. (1) $ac+bc+2a+2b$ ；　(2) $a^2+ab-ac-bc$ ；
   (3) $3a-ax-3b+bx$ ；　(4) $xy-y^2-yz+xz$ 。
3. (1) $5ax+6by+5ay+6bx$ ；　(2) $4x^2+3z-3xz-4x$ 。

2. 分組後能運用公式

【例 5】 把 $x^2-y^2+ax+ay$ 分解因式。

分析： 把第一、二項作為一組，這兩項雖然沒有公因式，但可以運用平方差公式分解因式，其中一個因式是$x+y$；把第三、四項作為另一組，在提出公因式後，另一個因式也是$x+y$，這樣全式就可以提出公因式$x+y$。

解

$$\begin{aligned} x^2-y^2+ax+ay &= (x^2-y^2)+(ax+ay) \\ &= (x+y)(x-y)+a(x+y) \\ &= (x+y)[(x-y)+a] \\ &= (x+y)(x-y+a) \end{aligned}$$

【例 6】 把$a^2-2ab+b^2-c^2$分解因式。

分析： 把前三項作為一組，它是一個完全平方式，可以分解成$(a-b)^2$，這時全式可以再運用平分差公式來分解因式。

解

$$\begin{aligned} a^2-2ab+b^2-c^2 &= (a^2-2ab+b^2)-c^2 \\ &= (a-b)^2-c^2 \\ &= [(a-b)+c][(a-b)-c] \\ &= (a-b+c)(a-b-c) \end{aligned}$$

從例 5、例 6 可以看出：如果能把一個多項式的項適當分組，使分組後能運用公式進行分解，那麼這個多項式也可以用分組分解法來分解因式。

【例 7】 把$x^3+x^2y-xy^2-y^3$分解因式。

解

$$\begin{aligned} x^3+x^2y-xy^2-y^3 &= (x^3+x^2y)-(xy^2+y^3) \\ &= x^2(x+y)-y^2(x+y) \\ &= (x+y)(x^2-y^2) \\ &= (x+y)[(x+y)(x-y)] \\ &= (x+y)^2(x-y) \end{aligned}$$

注意： x^2-y^2還能分解因式，因此要繼續分解。

現在，我們可以作一個歸納，把一個多項式分解因式，一般可按下列步驟進行：

1. 多項式的各項有公因式時，先提公因式；
2. 各項沒有公因式時，看看能不能運用公式來分解因式；
3. 如果用上述方法不能分解，再看它能不能運用分組分解法或其它方法(例如化為 $x^2+(a+b)x+ab$ 的形式)來分解因式；
4. 分解因式，必須進行到每一個因式都不能再分解為止。

練　習

把下列各式分解因式：

1. $4a^2-b^2+6a-3b$ 。
2. $9m^2-6m+2n-n^2$ 。
3. $x^2-y^2-z^2+2yz$ 。
4. $x^3-x^2y-xy^2+y^3$ 。

7.6 交叉相乘法

我們知道

$$(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)=a_1a_2x^2+a_1c_2x+a_2c_1x+c_1c_2$$
$$=a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2$$

反過來，就得到

$$a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2) \text{ 。}$$

利用這個等式，我們可以用下面的寫法，嘗試把某些二次三項式，如 ax^2+bx+c 分解因式。先把 a 分解成 $a=a_1a_2$ ，把 c 分解成 $c=c_1c_2$ ，並把 a_1 、 a_2 、 c_1 、 c_2 排列如下：

$$\begin{array}{ccc} a_1 & & c_1 \\ & \times & \\ a_2 & & c_2 \end{array}$$

這裡按斜線交叉相乘的積之和就是 $a_1c_2+a_2c_1$，如果它正好等於二次三項式 ax^2+bx+c 中一次項的係數 b，那麼 ax^2+bx+c 就可分解成 $(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$ ，其中 a_1 、 c_1 就是上圖中上面一列的兩個

數，a_2、c_2上圖中下面一列的兩個數。

例如，把二次三項式$3x^2+11x+10$分解因式。我們可以知道，$3=1\times3$、$10=2\times5$，寫成

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ & \times & \\ 3 & & 5 \end{array}$$

後，發現$1\times5+2\times3$正好等於 11，所以

$$3x^2+11x+10=(x+2)(3x+5)\text{ 。}$$

這種經過畫十字交叉線的幫助把二次三項式分解因式的方法，叫做**交叉相乘法**。

注意： 因分解因式及交叉相乘都有多種可能情況，所以往往要經過多次嘗試，才能確定一個二次三項式能否分解與怎樣分解。比方在上面的二次三項式$3x^2+11x+10$中，二次項係數 3 可以分解成 1 與 3 或-1與-3的積，常數項 10 可以分解成 1 與 10、-1與-10、2 與 5 或-2與-5的積，其中交叉相乘

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ & \times & \\ 3 & & 5 \end{array}$$

獲得成功，而交叉相乘如

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 5 \\ & \times & \\ 3 & & 2 \end{array}$$

等不能成功。所以用交叉相乘法分解因式，往往要經過多次嘗試。

【**例**】　把下列各式分解因式：(1)　$2x^2-7x+3$；

(2)　$6x^2-7x-5$；

(3)　$5x^2+6xy-8y^2$。

解 (1) $2x^2-7x+3=(x-3)(2x-1)$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \qquad & -3 \\ 2 & \qquad & -1 \end{array}$$

(2) $6x^2-7x-5=(2x+1)(3x-5)$

$$\begin{array}{ccc} 2 & \qquad & 1 \\ 3 & \qquad & -5 \end{array}$$

(3) $5x^2+6xy-8y^2=(x+2y)(5x-4y)$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \qquad & 2y \\ 5 & \qquad & -4y \end{array}$$

練 習

把下列各式分解因式：

1. (1) $2x^2+15x+7$ ； (2) $3a^2-8a+4$ ；
   (3) $8m^2+3m-5$ ； (4) $2x^2-7x-15$ ；
   (5) $5x^2+7x-6$ ； (4) $6y^2-11y-10$ 。
2. (1) $6a^2+17ab+12b^2$ ； (2) $15x^2-xy-6y^2$ ；
   (3) $5a^2b^2+23ab-10$ ； (4) $10x^2y^2-17abxy+3a^2b^2$ 。

習 題 八

把下列各式分解因式 (第 1～4 題)：

1. (1) x^2+9x+8 ； (2) $x^2-10x+24$ ；
   (3) $x^2+3x-10$ ； (4) $x^2-3x-28$ ；
   (5) $a^2+4a-21$ ； (6) $m^2+4m-12$ ；
   (7) p^2-8p+7 ； (8) $b^2+11b+28$ 。

2. (1) x^4+7x^2-18；　(2) x^6+8x^3+15；
(3) $m^2x^2-8mx+12$；　(4) $x^2y^2-7xy+10$。

3. (1) $x^2-7xy+12y^2$；　(2) $a^2+2ab-15b^2$；
(3) $m^2+4mn-12n^2$；　(4) $p^2+9pq+18q^2$。

4. (1) $-x^2y+6xy-8y$；　(2) $(m+n)^2-(m+n)-30$；
(3) $ab^2+4abc+3ac^2$；　(4) $(x-y)^2-3(x-y)-40$。

5. 先把下列各式分解因式，然後指出每道題中三個式子的公因式：
(1) $x^2+9x+14$、x^3-49x與$x^2+2x-35$；
(2) $x^2+2x-63$、$x^2+18x+81$與$x^2+12x+27$

把下列各式分解因式 (第 6～14 題)：

6. (1) $am+an+bm+bn$；　(2) $xy-xz+y-z$；
(3) $a^2+ab+ac+bc$；　(4) $ax-2bx+ay-2by$；
(5) $4xy-3xz+8y-6z$；　(6) x^3+3x^2+3x+9。

7. (1) $3xy-2x-12y+8$；　(2) $ab-5bc-2a^2+10ac$；
(3) $5ax+7xy-5bx-7by$；　(4) $x^3y+3x-2x^2y^2-6y$。

8. (1) $6ax+15b^2y^2-6b^2x-15ay^2$；　(2) $7x^2-3y+xy-21x$；
(3) $3a^2+bc-3ac-ab$；　(4) $a^2m+bn-an-abm$。

9. (1) $x^2-a^2-2x-2a$；　(2) a^3-b^3-a+b；
(3) $4x^2-4xy+y^2-a^2$；　(4) $1-m^2-n^2+2mn$。

10. (1) $a-a^3$；　(2) x^3-15x^2-16x；
(3) x^3y-xy^3；　(4) $5x^5-15x^3y-20xy^2$；
(5) $x+x^4$；　(6) a^4b-ab^4。

11. (1) $(x^2+3x)^2-(2x+6)^2$；　(2) $1-26a^2+25a^4$；
(3) $(x^2+2x)^2-7(x^2+2x)-8$；　(4) a^6+7a^3-8。

12. (1) $4x^2-y^2+2x-y$；　(2) $(x+y)^4+(x+y)^2-20$；
(3) a^4+a^3+a+1；　(4) $x^4y+2x^3y^2-x^2y-2xy^2$

13. (1) $2x^2+3x+1$；　(2) $2y^2+y-6$；　(3) $6x^2-13x+6$；
(4) $3a^2-7a-6$；　(5) $4n^2+4n-15$；　(6) $6l^2+l-35$。

14. (1) $6x^2-11xy+3y^2$；　(2) $4m^2+8mn+3n^2$；
(3) $16x^2-31xy-2y^2$；　(4) $8m^2-22mn+15n^2$。

小　结

一、本章主要內容是因式分解的概念與多項式因式分解的幾種常用方法。

二、學習多項式的因式分解，要注意因式分解與整式乘法的關係。整式乘法是把幾個整式相乘，化為一個多項式；而因式分解釋把一個多項式化為幾個整式相乘。例如，把 $(a+b)(a-b)$ 化為 a^2-b^2，是整式乘法；把 a^2-b^2 化為 $(a+b)(a-b)$，是因式分解。這就是說，

$$(a+b)(a-b)\ \underset{\text{因式分解}}{\overset{\text{整式乘法}}{\rightleftarrows}}\ a^2-b^2$$

什麼時候用整式乘法，什麼時候因式分解，是根據需要而定的。

三、提公因式法是因式分解中最基本的方法。只要多項式的各項有公因式，首先把它提出來。

運用公式法關鍵在於熟悉公式，掌握它們的不同形式與特點。本章學習了五個公式：

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$$

可以化為 $x^2+(a+b)x+ab$ 型的這一類二次三項式能夠分解為 $(x+a)(x+b)$。這裡關鍵在於掌握 a、b 與常數項、一次項係數

的關係，要通過觀察與試驗把常數項分解成兩個因數 a、b 的積，而 a、b 的和必須等於一次項的係數。

分組分解法必須遇見到下一步分解的可能性。我們已學習了分組後能提公因式及分組後能運用公式這兩種情況。

因為需要分解因式的多項式是多種多樣的，所以必須對具體情況作具體分析，靈活運用各種方法來分解因式。

複習參考題七

把下列各式分解因式 (第 1～4 題)：

1. (1) x^2-64； (2) x^3-64；
   (3) x^4+64x； (4) x^4-64x^2；
   (5) $a^{m+1}+a^m$； (6) $y^{n+2}-y^n$；
   (7) $(a-b)(x-y)-(b-a)(x+y)$；
   (8) $x(p-q)-y(p-q)+z(q-p)$；
   (9) $25(x+y)^2-16(x-y)^2$；
   (10) $p^2(p+q)^2-q^2(p-q)^2$；
   (11) $(a+b+c)^2-(a-b-c)^2$；
   (12) $(a+b)^2+2(a+b)-15$；

2. (1) m^3n^3+27； (2) $1-\dfrac{1}{64}a^3$；
   (3) $4-(3a+2b)^2$； (4) $(x^2+4)^2-16x^2$；
   (5) $x^2-xy-30y^2$； (6) $a^2x^2+16ax+64$；
   (7) $a^4-5a^2b^2+4b^4$； (8) $x^5-x^3y^2-12xy^4$；
   (9) $(a-b)^{n+2}-(a-b)^n$； (10) $x^{n+1}-3x^n+2x^{n-1}$；
   (11) $(x+y)^2-14y(x+y)+49y^2$；
   (12) $(3a-4b)(7a-8b)+(11a-12b)(7a-8b)$。

3. (1) $x^3z-4x^2yz+4xy^2z$； (2) $(x+2)(x+3)+x^2-4$；
   (3) x^2-4y^2+x+2y； (4) $x^2-6x+9-y^2$；

(5) $a^3x^2-c^3x^2-a^3y^2+c^3y^2$；(6) $(a^2+b^2-1)^2-4a^2b^2$；

(7) $x^5-x^3+x^2-1$；

(8) $10a^2x+21xy^2-14ax^2-15ay^2$；

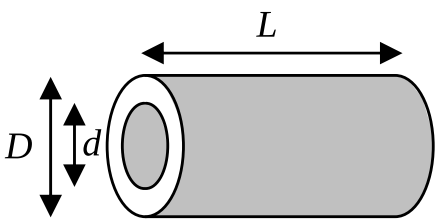
(9) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y-\frac{3}{4}z\right)^2-\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y+\frac{3}{4}z\right)^2$；

(10) $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$。

4. (1) $(ax+by)^2+(bx-ay)^2$； (2) $ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)$。

5. 利用因式分解計算：
   (1) 1297 的 5%，減去 897 的 5%，差是多少；
   (2) 869 的 36%，加上 869 的 54%，和是多少。

6. 如圖，某城市修建排水系統，需要一種空心混泥土管道，它的規格是：內徑 d = 45 cm，外徑 D = 75 cm，長 L = 300 cm。利用因式分解計算製造這樣的管道約需多少 m^3 的混泥土(π 取 3.14，結果保留兩個有效數字)。



(第 6 題)

7. $2n-1$與$2n+1$表示兩個連續的奇數(這裡 n 是整數)，說明這兩個連續奇數的平方差(大數的平方減去小數的平方，下題同)是 8 的倍數。

8. (1) 把兩個連續整數的平方差以及這兩數的和分別用代數式表示出來。這兩個代數式是否相等？
   (2) 把兩個連續奇數的平方差以及這兩數的和分別用代數式表示出來。這兩個代數式之間有什麼關係？

9. (1) $3x^2+x-2$； (2) $20y^2+y-1$；
   (3) $14x^2+x-3$； (4) $12t^2-8t-7$。

10. (1) $7p^2-5pq-2q^2$； (2) $6x^2-5xy-6y^2$；
    (3) $30a^2-ab-b^2$； (4) $18x^2-21xy+5y^2$。