說　明

一、　本書包括：基本概念、相交線、平行線、三角形、四邊形、面積、勾股定理、相似形、圓、視圖等章節，供八年級下、九年級下使用。

二、　本書的習題共分三類：練習、習題、複習參考題。

(1) **練習**　供課內練習使用。

(2) **習題**　供課內課外作業選用。

(3) **複習參考題**　供每章複習選用，其中少量帶有「*」號的題可供學有餘力的學生參考使用。

三、　本套書據大陸地區 1984 發佈之初級中學課本改編。

如何使用本書自學

1. 先逐字逐句閱讀各章節之解說。

2. 遇有例題先讀懂之後，再將書本合上，另自行在筆記本上模擬解法。

3. 在筆記本上寫各章節之練習、習題、複習參考題之詳解，可不抄題目，但要標明題號與頁碼，每一題都必須詳細寫出演算過程與想法。若有幾何圖形必須準確繪製。

4. 每一題做完後必須養成立即驗算的習慣，驗算無誤後在題號上作「∨」之記號。

5. 遇有不會作或不明確題意的問題，請回頭重複閱讀此章節之解說，直到完全明白為止。

6. 可組織 4-6 人之讀書會，編定進度，定期聚會互相討論。

7. 本套書可在三個月內(共約費時 200 小時)完全學好初中全部數學課程，其中代數與幾何可併行研讀。

目　錄

引　　言

在我們周圍有各種各樣的物體。例如，課本、書桌、黑板、人們生活的地球、空中的太陽、月亮…等等。這些物體都有一定的形狀與大小，並且在不同位置上，如黑板是長方形的、地球的半徑約 6370 km、課本在書桌上等。這些物體還有其它的性質，如書桌是木製的、地球上有生命、太陽能發光、月亮不能發光等。

在工程建設與日常生活中，我們常常須要研究物體的形狀、大小與位置關係。例如興建房屋、建築堤壩、製造機器零件時，都要考慮它們的形狀、大小與確定它們施工或安裝的位置。但是在「幾何」*裡，只研究物體的形狀、大小與位置關係，而不考慮物體的其它性質。

對於一個物體，當只研究它的形狀、大小而不考慮其它性質時，我們就說它是**幾何體**，幾何體簡稱為**體**。圖 1 中的木塊、鋼材、籃球，當只考慮它們的形狀、大小時，我們就說它們是長方體、圓柱體與球體。

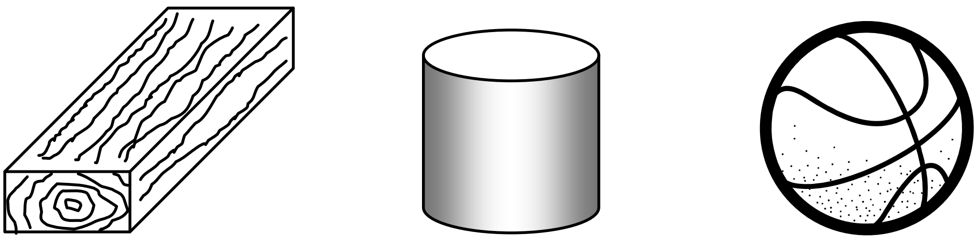


圖 1

體是由**面**圍成的，面有平的、有曲的。例如長方體是由**六個平的面**所圍成的，圓柱體是由兩個平的面與一個曲的面所圍成的(圖 2)。

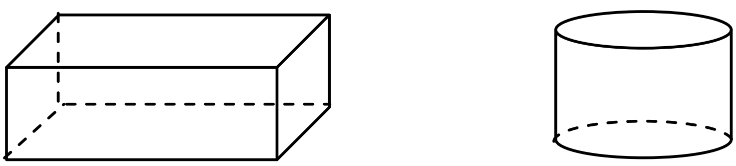


圖 2

---

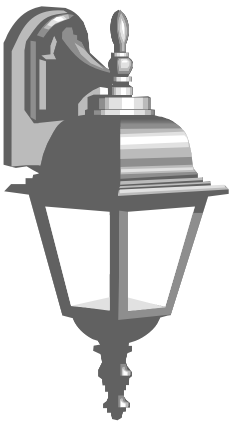
* 「幾何(Geometry)」是一個翻譯名詞，它是由我國明代科學家徐光啓(公元 1562~1633 年)首先使用的。原意是「測量土地的技術」。

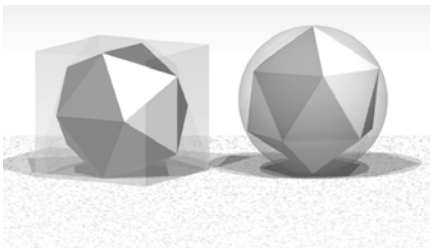
面與面相交於**線**。線有直的、有曲的。例如，長方體相鄰的兩個面相交於一條直的線(長方體的稜)。圓柱體的側面與一個底面相交於一條曲的線(圖 2)。

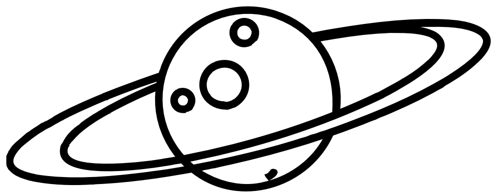
線與線相交於**點**。如長方體相鄰的兩條稜相交於一個點(長方體的頂點)。

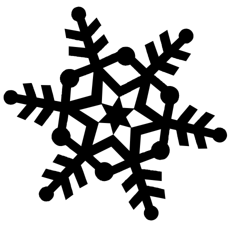
點、線、面或若干個點、線、面組合在一起，就成為**幾何圖形**。

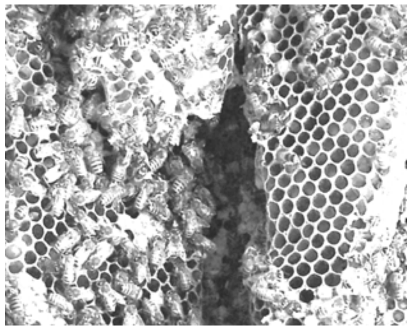
在我們即將要學習的幾何裡，只研究在同一平面內的圖形—**平面圖形**。在小學裡學過的三角形、長方形與圓都是平面圖形，而長方體、圓柱與球都不是平面圖形。接下來，我們將要學習許多常用的平面圖形及其性質。

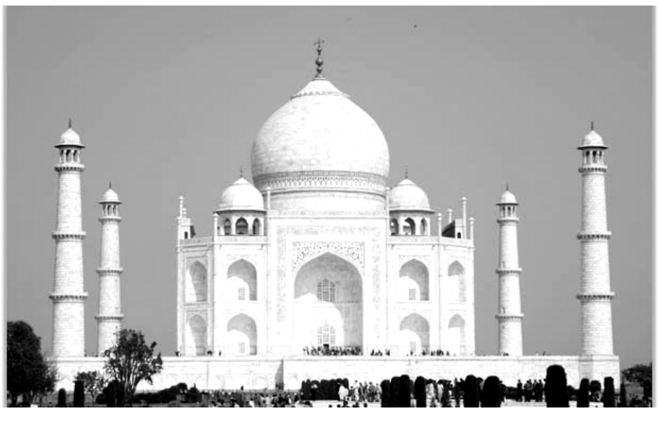












第一章　基本概念

一、直線、射線、線段

1.1　直線

在小學裡我們學過**直線**。一根拉緊的線、一張紙的摺痕都給我們一條直線的形象。直線是向兩方無限延伸著的。

一條直線上有無限多個點。點可以用一個大寫字母來表示。如圖 1-1 中的點，記作點 A、點 B、點 C、⋯。直線可以用表示它上面任意兩個點的大寫字母來表示，也可以用一個小寫字母來表示。例如圖 1-1 中的直線可以記作直線 AB，也可以記作直線 l。

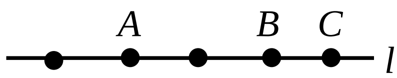


圖 1-1

畫直線可以用直尺，把直尺放在紙上或黑板上，用筆沿著直尺的邊緣就可以畫出一條直線，但畫出的只是直線之一部份。

例如圖 1-2，經過一個點 A 可以畫出任意多條直線 a、b、c、⋯。也就是說，經過一點的直線有無數多條。

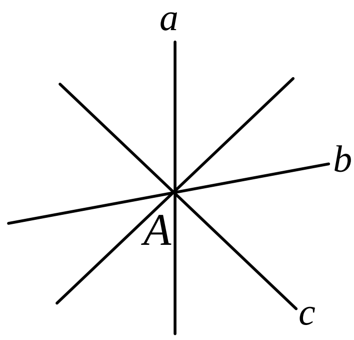


圖 1-2

如我們經過兩點畫直線，例如圖 1-3，經過點 A 與點 B 只能畫出一條直線來。人們總結了這一經驗，得到直線的基本性質：

圖 1-3

經過兩點有一條直線，且恰只有一條直線。

這句話可以簡單說成：**兩點確定一條直線**。

在幾何裡，像這樣，人們從實踐經驗中總結出來的圖形之基本性質，我們把它叫做**公理**。公理可以作為說明其它問題的根據。

在日常生活與生產實踐中，經常用到直線的這種性質。例如，架電線的工人在豎立電線桿時，只要定出兩根桿的位置(即兩個點)，就能定出一排電線桿所在直線的位置，而且只能定出一條

這樣的直線(圖 1-4)；鋸木料時，經過刨平木板上的兩個點，就能彈出一條筆直的墨線，而且只能彈出一條這樣的墨線(圖 1-5)。

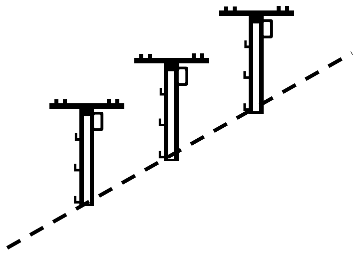


圖 1-4

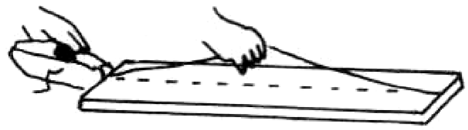


圖 1-5

在圖 1-6 中，兩條相異直線 *AB*、*CD* 都經過同一點 *O*，我們說這兩條直線相交，點 *O* 是這兩條直線的交點，說成「直線 *AB*、*CD* 相交於點 *O*」。

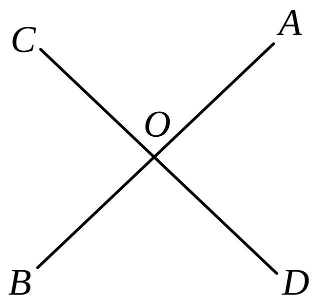


圖 1-6

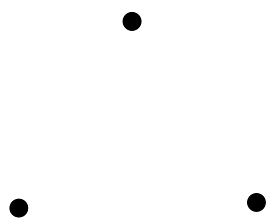
根據直線的公理，可以推出下面的性質：

兩條相異直線相交，恰只有一個交點。

這是因為，假如兩條相異直線有兩個交點，那麼，經過兩個點有兩條相異直線。這與「經過兩點恰只有一條直線」是不符合的，所以兩條相異直線有兩個交點是不可能的。

練　習

1. 已知圖中的三個點，它們不在同一條直線上。
   (1) 經過其中每兩個點都畫一條直線，這樣總共可以畫幾條直線？
   (2) 分別用大寫字母表示圖中的點，並說出每一條直線的名稱。
   (3) 分別用一個小寫字母表示圖中的每一條直線，並說明各條直線是由哪兩個點確定的。

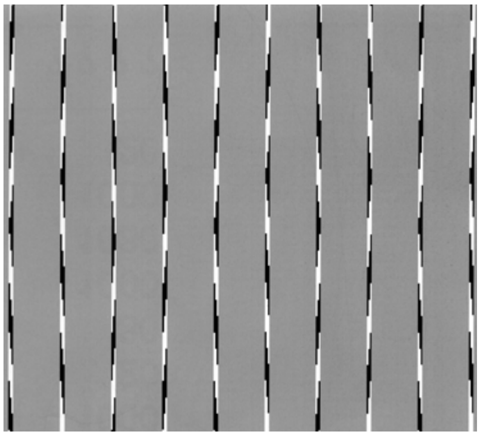


(第 1 題)

練　習

2. 讀下列語句，並畫出它們的圖形：
   (1) 直線 AB 經過點 C；
   (2) 點 D 在直線 EF 上，但在直線 GH 外(即點 D 不在直線 GH 上)；
   (3) 直線 a、b 相交於點 C，直線 b、c 相交於點 A，直線 a、c 相交於點 B。這時我們說「直線 a、b、c 兩兩相交」。

➢ **動動眼：**這些是直線嗎？拿直尺比對看看。



1.2　射線與線段

在圖 1-7 中，點 O 是直線 l 上的一個點，它把直線分成兩部分。這兩部分都是各自向一個方向無限延伸的。在直線上某一個點連同一旁的部分叫做**射線**，這個點叫做**射線的端點**。探照燈、手電筒的光線都是從一個點向著一個方向射出的，這種光線可以看成射線的具體例子。

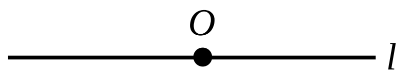


圖 1-7

射線可用它的端點與射線上任意一點的大寫字母來表示，表示端點的字母寫在前面，如射線 OA (圖 1-8)。

圖 1-8

如果點 A、B 是直線 l 上的兩個點，這兩個點將直線分成了三部分(圖 1-9)。直線上兩點間的部分連同這兩點叫做線段，這

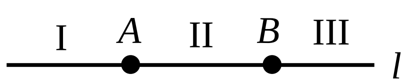


圖 1-9

兩點叫做線段的端點。圖 1-9 中的第 II 部分就是以點 A、B 為端點的線段。書桌的一條稜、直尺的一側邊都是一條線段之形象。

線段用它的兩個端點的兩個大寫字母來表示，也可以用一個小寫字母來表示。如圖 1-10 (甲)中的線段記作線段 AB 或線段 BA，圖 1-10 (乙)中的線段記作線段 a。

圖 1-10

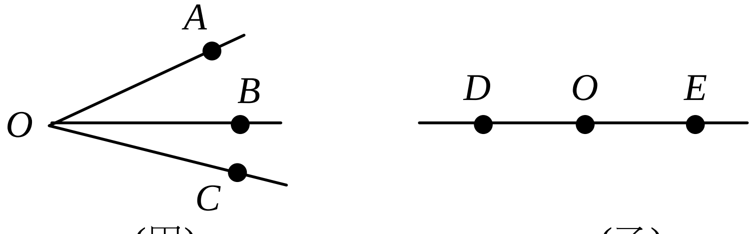
如圖 1-11，線段 AB 可以任意向兩個方向之一延伸。線段向一方延伸的部分叫做線段之延長線。對於圖 1-11 (甲)常說成「延長線段 AB」；對於圖 1-11 (乙)常說成「延長線段 BA」，有時也說成「反向延長線段 AB」。

圖 1-11

在這一節裡，我們介紹了射線、射線的端點、線段、線段的端點、線段的延長線等名詞，對於一個名詞我們須要說明它的含意。例如，用「直線上兩點間的部分連同這兩點」來說明「線段」的含意，這樣的語句叫做名詞的**定義**。

練 習

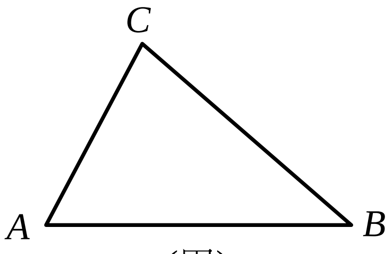
1. (口答)：
   (1) 怎樣表示圖(甲)中以點 O 為端點的各條射線？
   (2) 怎樣表示圖(乙)中以點 O 為端點的各條射線？
   (3) 圖(乙)中射線 DE 與射線 OE 是同一條射線嗎？圖(乙)中射線 DE 與射線 ED 呢？射線 DO 與射線 DE 呢？



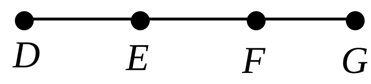
(第 1 題)

練　習

2. 圖(甲)、(乙)各有幾條線段？用字母表示各條線段。



(甲)



(乙)

(第 2 題)

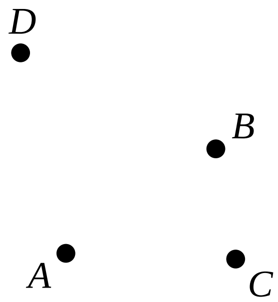
3. 射線、線段各有幾個端點？直線有沒有端點？

4. 如圖，已知四點 A、B、C、D，讀下列語句，並畫出圖形。

   (1) 「連結 AB」(即畫出以點 A 與點 B 為端點的線段)，並延長線段 AB；

   (2) 連結 CD，並延長線段 DC，線段 AB、CD 交於點 O；

   (3) 連結 BC，並反向延長線段 BC。



(第 4 題)

5. 說出線段的延長線之定義。

1.3　線段的比較與度量

在生產實踐與日常生活中，經常須要比較線段的大小與度量線段的長度。例如，比較兩個人的高矮就是比較線段的大小之例子，量一個同學的身高就是度量線段長度之例子。

比較兩人的高矮時，兩人要併立在平地上，才能比較出高矮，比較兩條線段的大小(通常說長短)，也是用類似的方法。

如圖 1-12，把線段 AB 放到線段 $A'B'$ 上，使點 A 與點 A' 重合，AB 沿著 $A'B'$ 的方向落下。那麼有下面三種可能的情形：

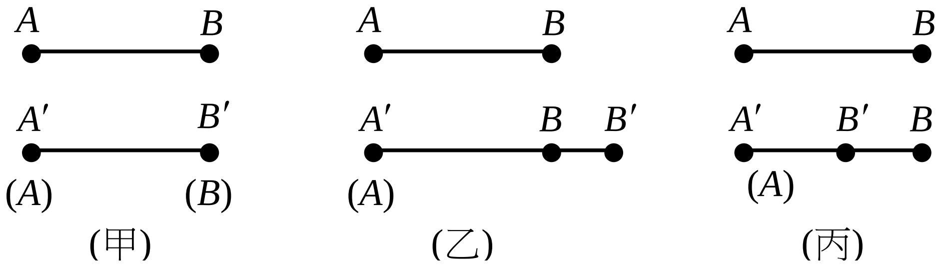


圖 1-12

(1)　如圖 1-12 (甲)，點 B 與 B' 重合，這時兩條線段相等，記作 $AB = A'B'$ ；

(2)　如圖 1-12 (乙)，點 B 落在線段 $A'B'$ 上(A' 、 B' 之間)，這時線段 AB 小於線段 $A'B'$ (或說線段 $A'B'$ 大於線段 AB)，記作 $AB < A'B'$ (或 $A'B' > AB$)；

(1)　如圖 1-12 (丙)，點 B 落在線段 $A'B'$ 的延長線上，也就是點 B' 落在線段 AB 上，這時 $AB > A'B'$ (或 $A'B' < AB$)。

在小學時，，我們曾使用刻度尺來度量線段的長度。以後，我們還可以像圖 1-13 那樣，利用圓規配合刻度尺來進行度量。例如，在圖 1-13 中，量得線段 AB 的長度是 1.6 cm，記作 AB = 1.6 cm。

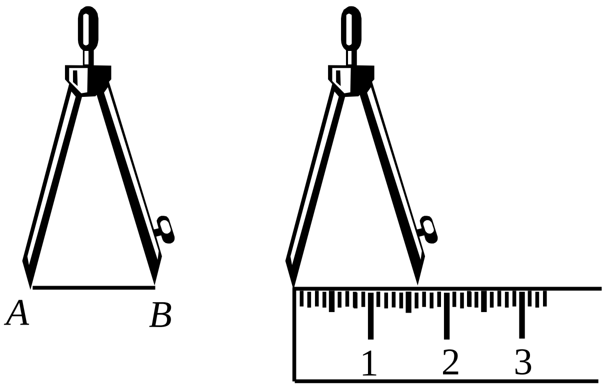


圖 1-13

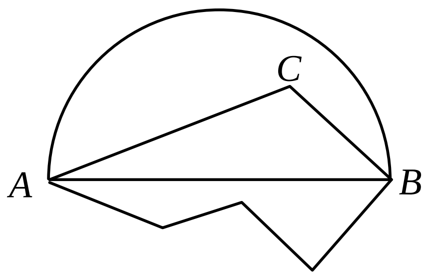


圖 1-14

把兩點 A、B 用線段與其它不同形狀的線連結起來(圖 1-14)。然後把這些線拉直，進行比較，可以發現線段有下面的性質，我們把它作為公理：

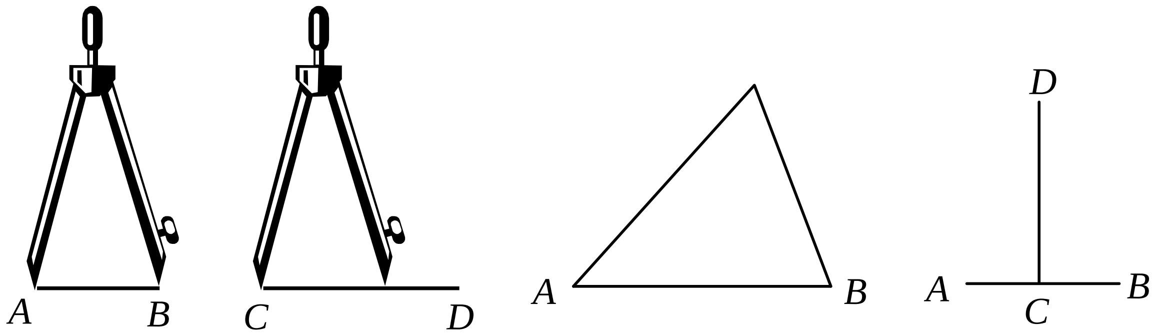
公理　　在所有連結兩點的線中，線段最短。

這句話可以簡單說成：**兩點之間線段最短**。

連結兩點的線段長度，叫做**兩點的距離**。

練　習

1. 用圓規配合刻度尺量出圖 1-14 中線段 *AB*、*AC*、*CB* 的長度(精確到 1 mm)，並根據量出的結果比較線段 *AB* 的長度與線段 *AC*、*BC* 長度的和之大小。
2. 可以利用圓規來比較兩條線段。如圖(甲)那樣，先將圓規的兩個角之針尖分別對準線段 *AB* 的兩個端點，然後把圓規的針尖所代表之線段 *AB* 放到線段 *CD* 上，使一個針尖落在線段 *CD* 的一個端點上，根據另一個針尖所落的位置就可以判斷兩線段之間的大小。利用這個辦法比較圖乙中三條線段的大小，再比較圖丙中兩條線段 *AB*、*CD* 的大小。

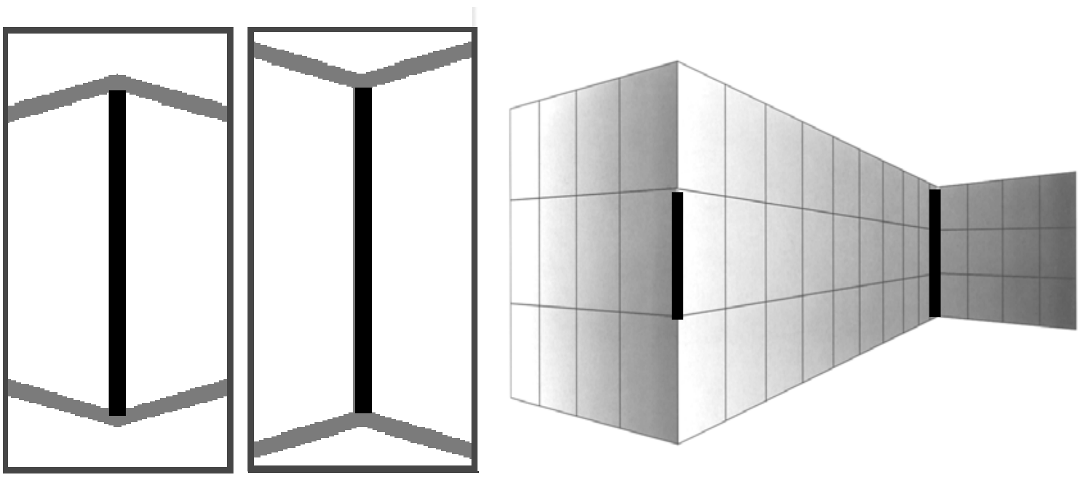


(甲)　　(乙)　　(丙)

(第 2 題)

3. 用刻度尺量出上題圖乙上各線段的長度；圖丙上點 *A*、*D*，

➢ **動動眼：**在甲、乙兩圖中，能否分別指出哪一條鉛垂的粗線段較短？拿尺量一量。



(甲)　　(乙)

1.4　線段的和、差與算法

我們學過數的加減運算，與數的加、減一樣，兩條線段也可以進行加、減，得出新的線段。一條線段的長度是另外兩條線段長度的和(或差)，這條線段就是另兩條線段的和(或差)。

如何畫出兩條線段的和或差呢？我們先學習下面的畫法。

【例 1】 已知線段 a，畫一條線段等於線段 a。

畫一條線段等於已知線段有兩種方法，一種是利用刻度尺來畫；另一種是利用圓規與直尺來畫。

畫法一：1.　用刻度尺量出線段 a 的長度 20 mm (圖 1-15 (甲))。

2.　畫射線 AC。

3.　用刻度尺在射線 AC 上取一點 B，使 AB = 20 mm。

線段 AB 就是所求的線段。

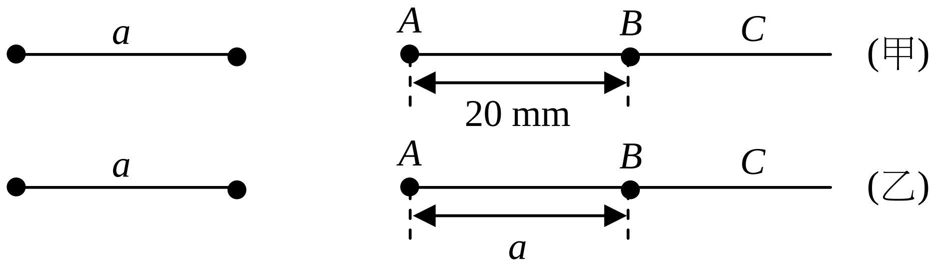


圖 1-15

畫法二：1.　畫射線 AC (圖 1-15 (乙))。

2.　用圓規在射線 AC 上截取 $AB = a$。

線段 AB 就是所求的線段。

【例 2】 已知線段 AB 與 CD，且 $AB > CD$。讀下面的語句，並用圓規畫圖：

(1)　在線段 AB 上取一點 E，使 $AE = CD$；

(2)　延長線段 AB 至點 F，使 $BF = CD$。

畫法：　(1)　用圓規在線段 AB 上截取 $AE = CD$。點 E 就是所求的點(圖 1-16)。

(2)　1.　延長線段 AB。

2.　用圓規在 AB 的延長線上截取 $BF = CD$。點 F 就是所求的點。

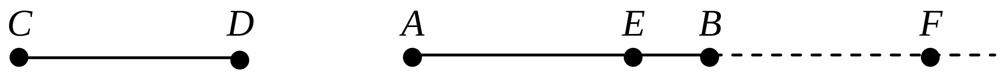


圖 1-16

從以上的畫圖過程可知，$AE = CD$、$BF = CD$。所以線段 AF 的長度就是線段 AB 的長度加線段 CD 的長度；線段 BE 的長度就是線段 AB 的長度減去線段 CD 的長度。也就是說。線段 AF 是線段 AB 與 CD 的和，記作 $AF = AB + CD$；線段 BE 是線段 AB 與 CD 的差，記作 $BE = AB - CD$。

例 2 實際上就是線段的和與差之畫法。

如果一條線段 b 是 n 條線段 a 的和，那麼我們說線段 b 是線段 a 的 n 倍，或線段 a 是線段 b 的 n 分之一。記作 $b = na$ 或 $a = \dfrac{b}{n}$。

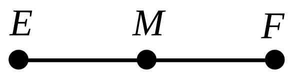


圖 1-17

將一條線段分成兩條相等線段的點，叫做**線段的中點**。如圖 1-17，點 M 是線段 EM 的中點。記作 $EM = MF$ 或 $EM = \dfrac{1}{2}EF$。

【例 3】 已知線段 a，用直尺與圓規畫一條線段，使它等於 $3a$。

畫法： 1. 畫射線 AE (圖 1-18)。
2. 在射線 AE 上從點 A 起順次截取 $AB = BC = CD = a$。
線段 AD 就是所求的線段。

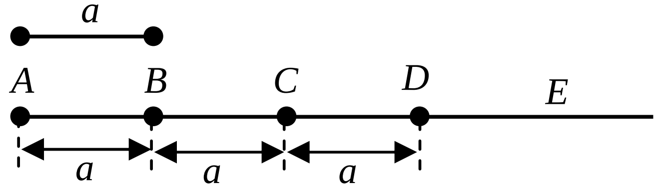


圖 1-18

【例 4】 已知線段 a、b ($a > b$)，畫一條線段等於 $2a - b$。

畫法： 1. 畫線段 $AB = 2a$ (圖 1-19)。
2. 在線段 AB 上截取 $BC = b$。
線段 AC 就是所求的線段。

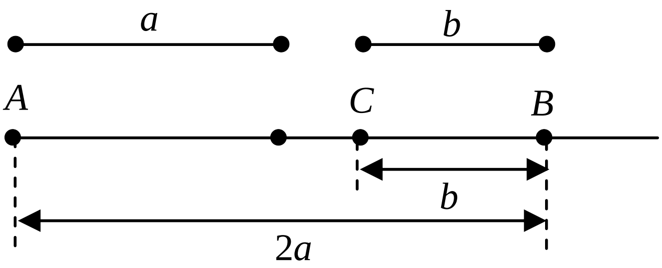


圖 1-19

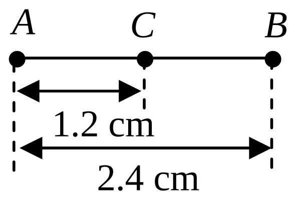


圖 1-20

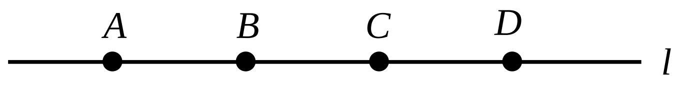
【例 5】 已知線段 AB。畫它的中點 M。

畫法： 1. 用刻度尺量得 $AB=2.4\text{ cm}$，計算得 $\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 2.4\text{ cm}$ $=1.2\text{ cm}$ (圖 1-20)。

2. 在線段 AB 上截取 $AM=1.2\ \ \text{cm}$。點 M 就是所求的中點。

練 習

1. 已知線段 AB、CD。在線段 AB 的延長線上取點 G，使得 $BG=CD$；在線段 AB 的反向延長線上取點 K，使得 $AK=BG$。[†]
2. 已知線段 a、b $(a>b)$，用圓規與直尺畫一條線段，使它等於
   (1) $a+2b$； (2) $3a-b$。
3. 用刻度尺畫一條線段 $AB=5.4\ \ \text{cm}$，並且把它三等分。
4. 如圖，已知直線 l 上四點 A、B、C、D，根據圖形填空：
   (1) $AD=(\quad)+(\quad)+(\quad)=AB+(\quad)=AC+(\quad)$；
   (2) $BC=AC-(\quad)=(\quad)-CD=AD-(\quad)-(\quad)$。

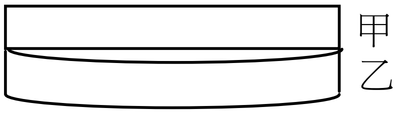


(第 4 題)

[†] 本書第一、二章的畫圖題，作題時可不寫畫法，但要保留畫圖痕跡，並說明結果。

習　題　一

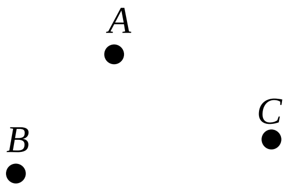
1. (1)　在牆上要釘穩一根橫木條，至少要釘幾根釘？為什麼？
   (2)　在教室裡要將一行桌子排齊可以用什麼方法？您能說出這種方法的道理嗎？
   (3)　將甲、乙兩把尺如圖那樣拼在一起，如果甲尺經校正確定為直的，那麼乙尺可能是直的嗎？為什麼？



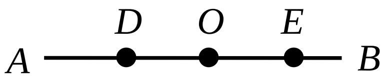
(第 1 題)

2. 當點 A 在直線 BC 上時，過三點 A、B、C 的直線有幾條？當點 A 不在直線 BC 上時，過這三點可以畫一條直線嗎？

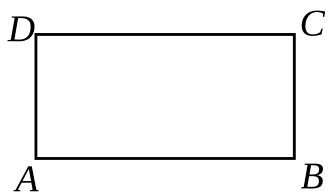
3. 已知點 A、B、C 不在同一條直線上，它們的位置如圖。
   (1)　畫線段 AB；　(2)　畫射線 AC；　(3)　畫直線 BC。



(第 3 題)



(第 4 題)

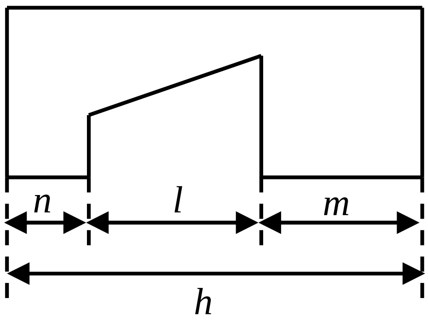


(第 5 題)

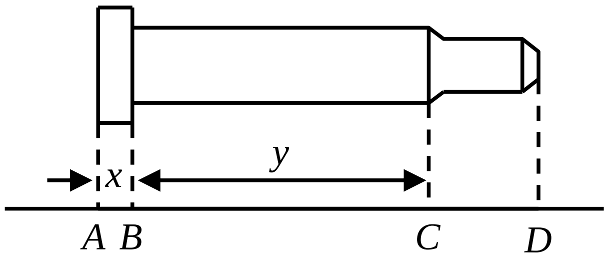
4. 在直線 AB 上分別以 O、D、E 為端點的射線共有幾條？怎樣表示它們？

5. 用圓規與刻度尺量出圖中線段 AB、BC、CD、DA 的長度(精確到 1 mm)，並計算：
   (1)　$AB+BC+CD+DA$；
   (2)　$2(AB+BC)$。

6. 如圖，在直接測量 l 的長度不方便時，可以先量得 h、m、n 的長，再計算 l 的長。
   (1)　用 h、m、n 的代數式表示 l；
   (2)　已知 $h=31\,\text{mm}$、$n=5\,\text{mm}$、$m=8\,\text{mm}$，計算 l 的長度。



(第 6 題)



(第 7 題)

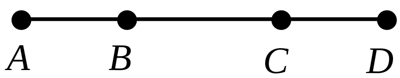
7. 如圖，已知 $AD = 76\,\text{mm}$、 $BD = 70\,\text{mm}$、 $CD = 19\,\text{mm}$，求 AB 的長 x 與 BC 的長 y。

8. 已知線段 AB，在 AB 的延長線上取一點 C，使 $BC = AB$ ，再在 BA 的延長線上取一點 D，使 $DA = 2AB$ 。
   (1) 線段 AC 等於線段 AB 的幾倍？
   (2) 線段 AB 等於線段 DB 的幾分之幾？
   (3) 線段 DB 等於線段 DC 的幾分之幾？

9. 已知線段 a、b、c $(a > b)$，用直尺與圓規畫一條線段，使它等於 $a - b + c$ 。

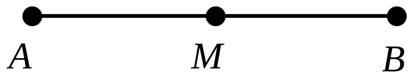
10. 已知線段 a、b $(a > b)$，用直尺與圓規畫一條線段，使它等於
    (1) $a + 3b$ ； (2) $2a - b$ ； (3) $2(a - b)$ 。

11. 根據圖形填空：
    (1) $AC = (\quad) + BC$ ；
    (2) $CD = AD - (\quad)$ ；
    (3) $AB + BC = (\quad) - CD$ ；
    (4) 如果 $AB = CD$ ，AC 與 BD 相等嗎？如果 $AC = BD$ ，則 AB 與 CD 相等嗎？



(第 11 題)

12. 點 M 是線段 AB 的中點，根據圖形填空：
    (1) $AM = (\quad)$ ； (2) $BM = \frac{1}{2}(\quad)$ ；
    (3) $AB = 2(\quad) = 2(\quad)$ 。



(第 12 題)

(第 13 題)

13. 已知線段 AB 與它上面的一點 C，畫線段 AC 的中點 D、線段 BC 的中點 E。那麼 $DE=\dfrac{1}{2}AB$ 嗎？

二、角

1.5　角

鐘錶上的時針與分針、圓規張開的兩角，它們都給我們角的形象(圖 1-21)。

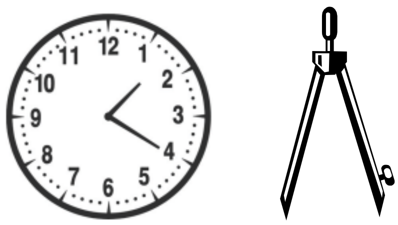


圖 1-21

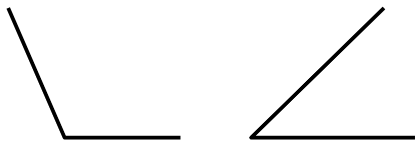
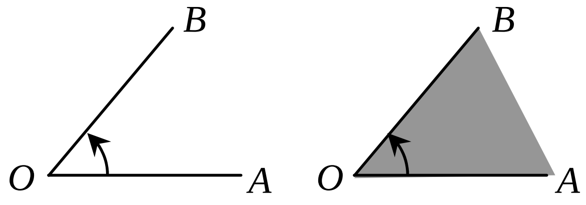


圖 1-22

在小學裡我們已經學過角，現在我們來看圖 1-22 中的兩個圖形。它們都是由兩條射線組成的，而且兩條射線有公共端點。這種有公共端點的兩條射線所組成的圖形叫做**角**，這個公共端點叫做**角的頂點**，這兩條射線叫做**角的邊**。

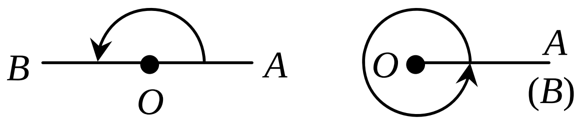
我們再來看圖 1-23 (甲)，一條射線 OA 由原來的位置，繞著它的端點 O 旋轉到另一個位置。這時，在開始位置的射線 OA 與終止位置的射線 OB 就形成了一個角。因此，我們也可以把角看成是由一條射線繞著它的端點旋轉而成的。開始位置的射線 OA 叫做**角的始邊**，終止位置的射線 OB 叫做**角的終邊**。角的始邊旋轉到角的終邊所經過之平面部分(圖 1-23(乙)中的陰影部分，往右

側無限延伸)是角的內部，平面的其餘部分是角的外部(圖 1-23(乙)中的無陰影部分)，射線 OA、OB 上的點是角上之點。



(甲) (乙)

圖 1-23



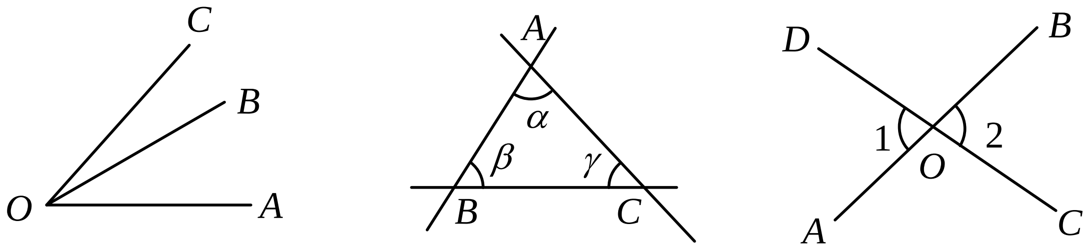
(甲) (乙)

圖 1-24

一條射線由原來的位置 OA，繞著它的端點 O 旋轉至位置 OB，當 OB 與 OA 成一直線時，所成的角叫做**平角**(圖 1-24(甲))；再旋轉下去，當終邊 OB 與始邊 OA 重合時，所成的角叫做**周角**(圖 1-24(乙))。

本書今後所說的角，除非特別註明，都是指小於平角的角。

我們用符號「∠」來表示角。一個角可以用三個大寫字母來表示，就是角的兩條邊上各取一個點，把表示頂點的字母寫在這兩個點的字母之中間。例如圖 1-23 中的角可以記作 $\angle AOB$ (讀作「角 AOB」)或 $\angle BOA$；又如，圖 1-25(甲)中的三個角可以分別記作 $\angle AOB$、$\angle BOC$、$\angle AOC$ 或 $\angle BOA$、$\angle COB$、$\angle COA$。



(甲) (乙) (丙)

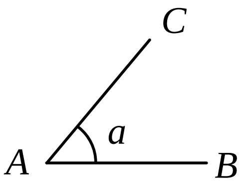
圖 1-25

以某一點為頂點的角只有一個時，這個角也可以用表示這個點的字母來代替。如圖 1-23 中的 $\angle AOB$ 也可以記作 $\angle O$，但圖 1-25(甲)中的三個角不能記作 $\angle O$。

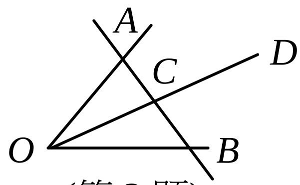
角還可以用一個小寫的希臘字母或一個數碼寫在角的內部靠近頂點處，並加上弧線來表示。如圖 1-25(乙)中的三個角可以分別記作 $\angle\alpha$、$\angle\beta$、$\angle\gamma$，圖 1-25(丙)中的 $\angle DOA$、$\angle COB$ 可以分別記作 $\angle 1$、$\angle 2$。

練　習

1. (口答) 指出圖中的角之頂點與邊；並用幾種不同的記法來表示圖中之角。

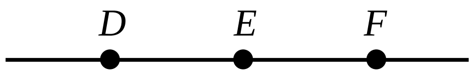


(第 1 題)



(第 3 題)

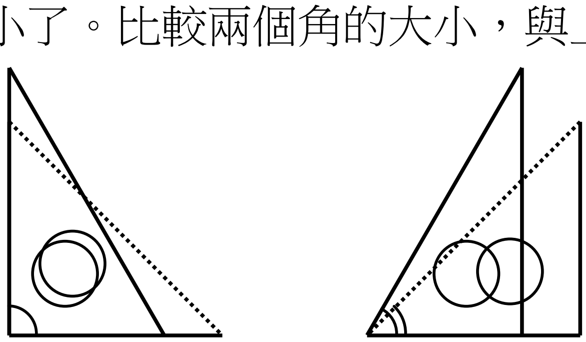
2. (口答) 用三個大寫字母分別表示圖 1-25(乙)中的三個角。
3. (口答)圖中以 O 為頂點的角有幾個？怎樣表示這些角？以 C 為頂點的角呢？
4. (1) 指出圖中以 E 為頂點的平角之兩條邊，並用三個大寫字母表示這個平角；
   (2) 一條直線可以看成一個平角嗎？為什麼？



(第 4 題)

1.6　角的比較與度量

在小學我們學過，角是有大小的。怎樣比較兩個角的大小呢？我們先作一個實驗。如圖 1-26 那樣，將兩塊三角板疊放在一起，使要比較的兩個角之頂點與其中一邊分別對齊，這時，我們可以看到，在圖 1-26(甲)中，兩角的另一邊也疊合在一起；而在圖 1-26(乙)中，兩角的另一邊是不疊合在一起的。這樣就可以比較出兩個角的大小了。比較兩個角的大小，與上面的方法相同。


(甲)　　(乙)
圖 1-26

如圖 1-27，把$\angle AOB$放到$\angle A'O'B'$上面，使頂點 O 與O'重合，邊 OA 與$O'A'$重合，另一邊 OB 與$O'B'$在$O'A'$的同側。這時，有下面三種可能情形：

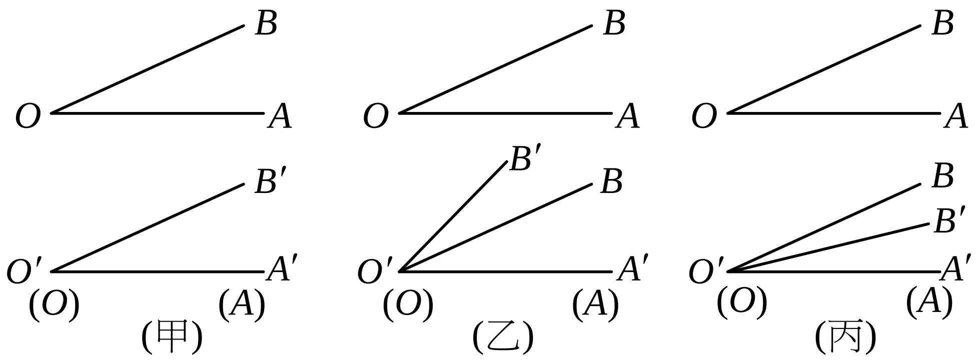


圖 1-27

(1)　邊 OB 與$O'B'$重合(圖 1-27(甲))。這時，兩個角相等，記作$\angle AOB = \angle A'O'B'$ 。

(2)　點 B 落在$\angle A'O'B'$的內部(圖 1-27(乙))。這時，$\angle AOB$小於$\angle A'O'B'$(或說$\angle A'O'B'$大於$\angle AOB$)，記作$\angle AOB < \angle A'O'B'$　(或$\angle A'O'B' > \angle AOB$)。

(3)　點 B 落在$\angle A'O'B'$的外部(圖 1-27(丙))，也就是說點B'落在$\angle AOB$的內部。這時$\angle AOB > \angle A'O'B'$(或$\angle A'O'B' < \angle AOB$)。

在小學，我們曾用量角器來度量角，它的度量單位是度、分、秒。把周角分成 360 等份，每一份是一度，記作$1°$；每一度分成 60 等份，每一份是一分，記作$1'$；每一分再分成 60 等份，每一份是一秒，記作$1''$。

一個角的度數是$48°56'27''$，讀作 48 度 56 分 27 秒。

$$\mathbf{1\text{周角} = 2\text{平角} = 360°}$$

$$\mathbf{1\text{平角} = 180°}$$

$$\mathbf{1° = 60'}$$

$$\mathbf{1' = 60''}$$

【例 1】 用度、分、秒表示$57.32°$。

解　　先把$0.32°$化為分：$60' \times 0.32 = 19.2'$；

再把$0.2'$化為秒；$60'' \times 0.2 = 12''$。

$\therefore\quad 57.32° = 57°19'12''$

【例 2】 用度表示$10°23'45''$。

解　先把$45''$化為分：$45''=\dfrac{1'}{60}\times 45=0.75'$；

再把$23.75'$化為度；$23.75'=\dfrac{1°}{60}\times 23.75\approx 0.396°$。

$\therefore\quad 10°23'45''\approx 10.396°$

【例 3】 計算：　(1)　$180°-(35°18'+62°56')$；

(2)　$32°16'\times 5$；

(3)　$15°20'\div 6$。

解　(1)　$180°-(35°18'+62°56')=180°-98°14'=81°46'$；

(2)　$32°16'\times 5=160°+80'=161°20'$；

(3)　$15°20'\div 6=2°+200'\div 6=2°33'+120''\div 6=2°33'20''$

【例 4】 由 2 點 30 分到 2 點 55 分，時鐘的分針轉了多少角度？

解　時鐘表面共分成了 12 大格，每格佔周角的$\dfrac{1}{12}$，由 2 點 30 分到 2 點 55 分，分針共走了 5 格。

$\angle AOB=\dfrac{5}{12}\times 360°=150°$。

答：分針轉了$150°$角。

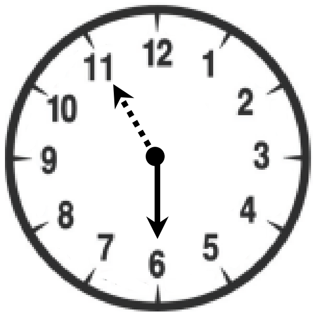
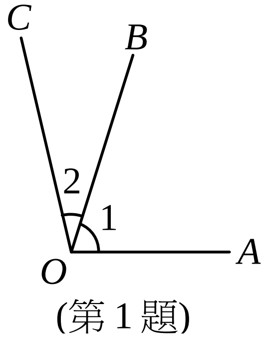


圖 1-28

練　習

1. 用量角器量圖中$\angle 1$ 與$\angle 2$ 的度數(精確到$1°$)，並且計算出$\angle AOC$的度數。



(第 1 題)

練　習

2. 畫直線 AB，在 AB 上任取一點 O，並任意畫射線 OC。用量角器量 $\angle AOC$ 的度數(精確到1°)，並且計算出 $\angle COB$ 的度數。
3. 用度、分、秒表示： (1) 33.33°； (2) 156.27°。
4. 用度表示： (1) $50^\circ 41' 30''$； (2) $118^\circ 20' 42''$。
5. 計算： (1) $37^\circ 28' + 44^\circ 49'$； (2) $108^\circ 18' - 52^\circ 00' 30''$；
   (3) $25^\circ 36' \times 4$； (4) $40^\circ 40' \div 3$。
6. 由 3 點到 5 點 30 分，時鐘的時針轉了多少角度？

1.7　角的和、差與畫法

與線段一樣，對於任意兩個角也可以進行加、減，得出新的角。一個角的度數是另兩個角度數的和(或差)，這個角就是另兩個角的和(或差)。

下面我們來學習利用量角器畫一個角及畫兩個角的和、差之方法。

【例 1】 已知 $\angle AOB$，用量角器畫一個角等於 $\angle AOB$。

畫法： 1. 用量角器量得 $\angle AOB = 41^\circ$ (圖 1-29)。

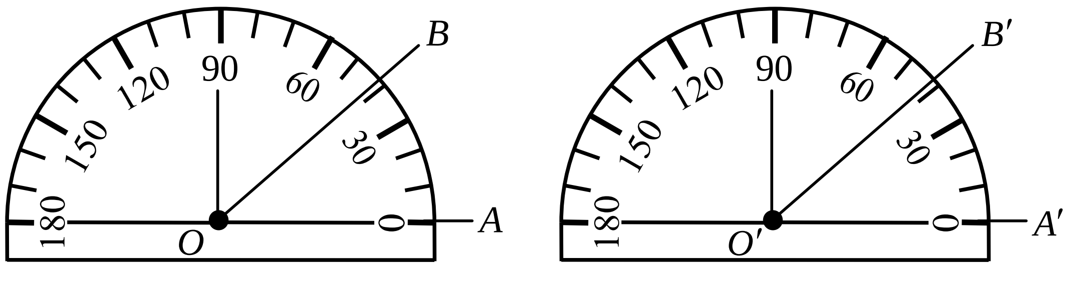


圖 1-29

2. 畫射線 $O'A'$。
3. 用量角器畫 $\angle A'O'B' = 41^\circ$。

$\angle A'O'B'$ 就是所求的角。

用量角器畫$\angle A'O'B' = 41^\circ$是這樣畫的：先將量角器的中心對準點O'，將標有 0 的線對準$O'A'$，然後在量角器上找出41°線，靠它的外端畫一個點B'，畫射線$O'B'$，$\angle A'O'B'$就等於41°。

【例 2】 已知$\angle 1$、$\angle 2$，用量角器畫一個角，使它等於$\angle 1 + \angle 2$。

畫法： 1. 用量角器畫$\angle ABC = \angle 1$(圖 1-30)。

2. 以點 B 為頂點，射線 BC 為一邊，在$\angle ABC$的外部畫$\angle CBD = \angle 2$。

$\angle ABD$就是所求的角。

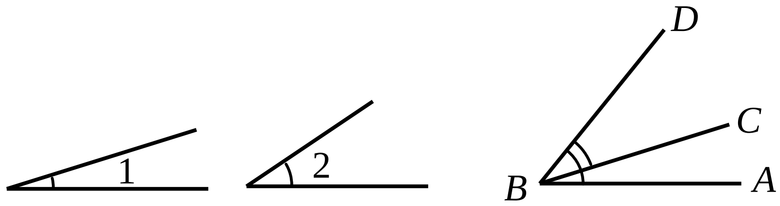


圖 1-30

【例 3】 已知$\angle 1$、$\angle 2$，且$\angle 1 > \angle 2$。用量角器畫一個角，使它等於$\angle 1 - \angle 2$。

畫法： 1. 用量角器畫$\angle ABC = \angle 1$(圖 1-31)。

2. 以點 B 為頂點，射線 BA 為一邊畫$\angle ABD = \angle 2$，並且使射線 BD 在$\angle ABC$的內部。

$\angle CBD$就是所求的角。

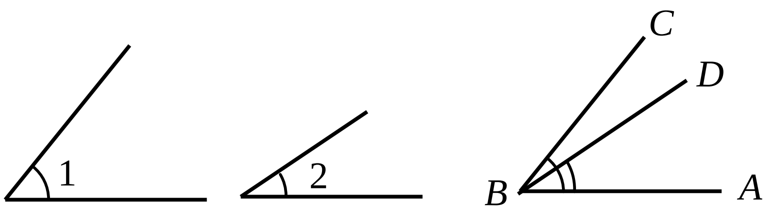


圖 1-31

畫兩角的和或差，也可以先計算出兩角的度數之和或差後，再利用量角器畫這個角。

如果$\angle \alpha$是 n 個$\angle \beta$的和，那麼我們就說$\angle \alpha$是$\angle \beta$的 n 倍或$\angle \beta$是$\angle \alpha$的 n 分之一。記作$\angle \alpha = n\angle \beta$或$\angle \beta = \frac{1}{n}\angle \alpha$。

從一個角的頂點引出之一條射線，把這個角分成兩個相等的角，這條射線叫做**角的平分線**。如圖 1-32，射線 OK 把$\angle GOH$分

成兩個相等的角，它是$\angle GOH$的平分線。記作$\angle GOK=\angle KOH$或$\angle GOK=\frac{1}{2}\angle GOH$或$\angle GOH=2\angle GOK(=2\angle KOH)$。

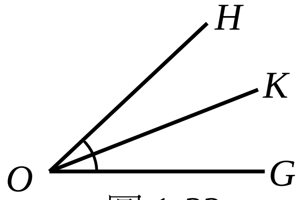


圖 1-32

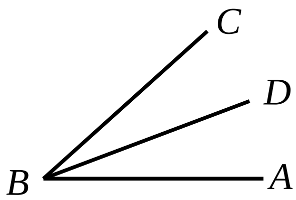


圖 1-33

【例 4】 已知$\angle ABC$，畫它的角平分線。

畫法： 1. 量得$\angle ABC=42°$(圖 1-33)，求得$\frac{1}{2}\angle ABC=21°$。

2. 以點 B 為頂點，BA 為一邊，在$\angle ABC$的內部畫$\angle ABD=21°$。

射線 BD 就是所求的角平分線。

練　習

1. 已知$\angle\alpha<90°$，畫一個角，使它等於$2\angle\alpha$。
2. 用一塊三角板畫一個$90°$的角，再畫它的角平分線。
3. 用量角器與直尺畫一個角等於$84°$，再把這個角三等分。
4. 一副三角板中，一塊三角板的三個角是$30°$、$60°$、$90°$，另一塊三角板的三個角是$45°$、$45°$、$90°$。利用三角板畫等於下列度數的角：$30°$、$75°$、$105°$、$15°$。

1.8　角的分類

根據角的大小，我們可以將角分成不同的類型。

如圖 1-34，射線 OB 是平角$\angle AOC$的平分線。即$\angle AOB=\angle BOC=\frac{1}{2}\angle AOC=90°$。

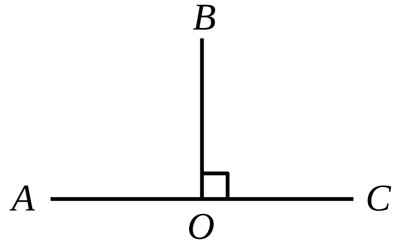


圖 1-34

當一個角等於平角的一半時，這個角叫做**直角**。圖 1-34 中的 $\angle AOB$ 、 $\angle BOC$ 都是直角。直角可以用 $Rt\angle$ 表示。記作 $\angle AOB = Rt\angle$ 或 $Rt\angle AOB$ 。圖中角頂處的符號「ㄱ」表示這個角是直角。

因為直角是平角的一半，所以

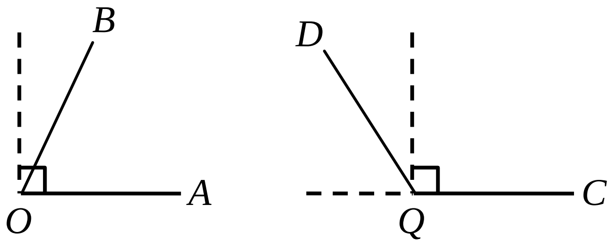
$$\mathbf{1周角 = 4直角}$$

$$\mathbf{1平角 = 2直角}$$

$$\mathbf{1直角 = 90^\circ}$$

因為每個直角都是90°，所以所有的直角都相等。

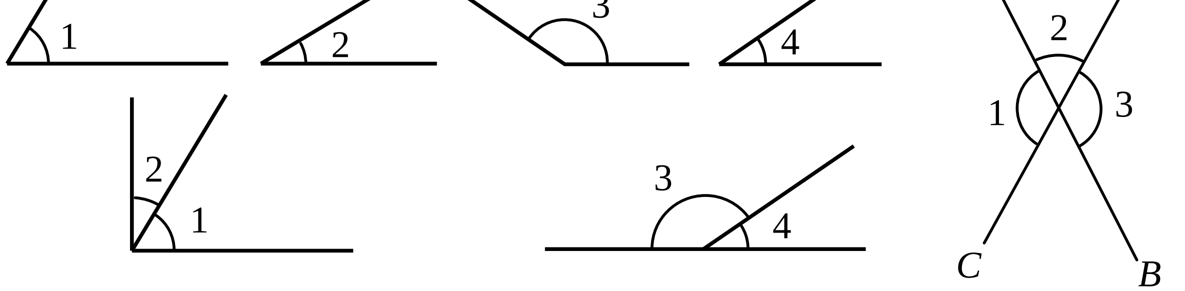
小於直角的角叫做**銳角**，大於直角而小於平角的角叫做**鈍角**。如圖 1-35 (甲)中，$\angle AOB < Rt\angle$，所以 $\angle AOB$ 是銳角，圖 1-35 (乙)中，$180^\circ > \angle CQD > Rt\angle$ ，所以 $\angle CQD$ 是鈍角。



(甲)　(乙)

圖 1-35

兩個角的和等於直角時，說這兩個角**互為餘角**，簡稱**互餘**。也可以說其中一個角是另一個角的**餘角**。而兩個角的和等於平角時，說這兩個角**互為補角**，簡稱**互補**。也可以說其中一個角是另一個角的**補角**。將一個角的一邊反向延長，這條反向延長線與這個角的另一邊構成一個角，這時說，它與原來的角**互為鄰補角**。



(甲)　(乙)　(丙)

圖 1-36

如圖 1-36 (甲)中，$\angle 1$與$\angle 2$互餘，我們可以記作$\angle 1+\angle 2=90^\circ$，或$\angle 1=90^\circ-\angle 2$；如圖 1-36 (乙)中，$\angle 3$與$\angle 4$互補，我們可以記作$\angle 3+\angle 4=180^\circ$或$\angle 3=180^\circ-\angle 4$；如圖 1-36 (丙)中，$AB$、$CD$是兩條直線，$\angle 1$與$\angle 2$、$\angle 2$與$\angle 3$都互為鄰補角。

【例 1】 已知$\angle\alpha=32^\circ 18' 30''$，求$\angle\alpha$的餘角與補角之大小。

$\boxed{解}$ $\angle\alpha$的餘角$=90^\circ-32^\circ 18' 30''=57^\circ 41' 30''$；

$\angle\alpha$的補角$=180^\circ-32^\circ 18' 30''=147^\circ 41' 30''$。

【例 2】 已知$\angle\alpha=\angle\beta$，$\angle\alpha$的補角是$\angle\beta$的餘角的 3 倍，求$\angle\alpha$的大小。

$\boxed{解}$ $\angle\alpha$的補角為$180^\circ-\angle\alpha$，$\angle\beta$的餘角為$90^\circ-\angle\beta$，根據題意，得；

$$180^\circ-\angle\alpha=3(90^\circ-\angle\beta) \qquad (1)$$

已知

$$\angle\beta=\angle\alpha \qquad (2)$$

將(2)式代入(1)式，得

$$180^\circ-\angle\alpha=3(90^\circ-\angle\alpha) \qquad (3)$$

解方程，得

$$\angle\alpha=45^\circ$$

上面的推理過程中，由(1)式變到(3)式是將(1)式中的$\angle\beta$用與它相等的量$\angle\alpha$來代替，這種等式變形叫做**等量代換**。

圖 1-37 中，$\angle 2$、$\angle 3$都是$\angle 1$的餘角，下面我們來比較這兩個角的大小。

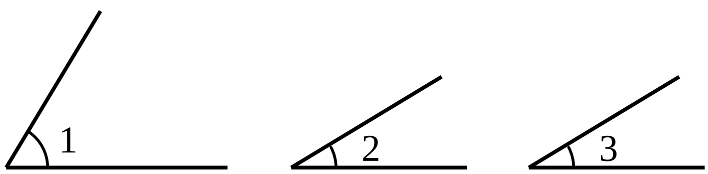


圖 1-37

根據兩角互餘的定義，有

$$\angle 1+\angle 2=90^\circ$$

$$\angle 1+\angle 3=90^\circ$$

利用等量代換，得

$$\angle 1+\angle 2=\angle 1+\angle 3$$

根據等式的性質，上式中兩邊同減去$\angle 1$，得

$$\angle 2=\angle 3$$

這樣，我們得到了餘角的一個性質：

同角(或等角)的餘角相等。

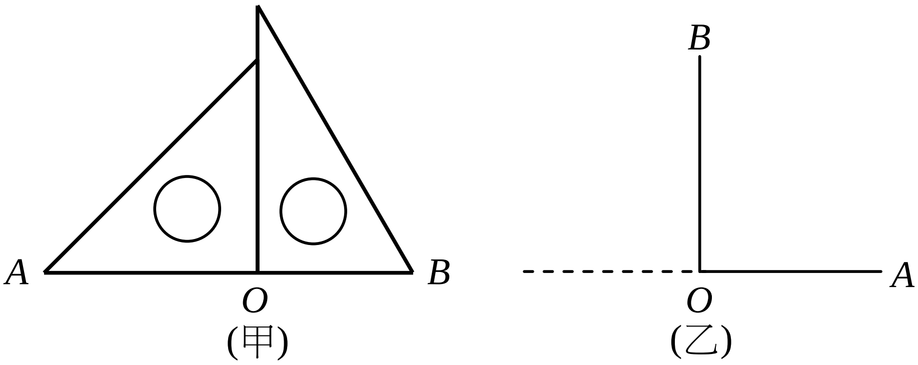
同樣可以得到：

同角(或等角)的補角相等。

練　習

1. (1) 把兩塊三角板像圖(甲)那樣拼在一起，那麼三點 A、O、B 在一條直線上。為什麼？

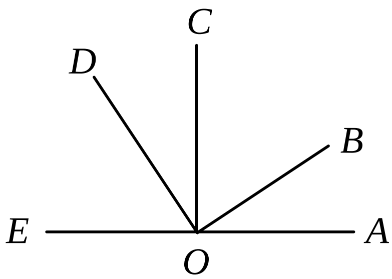
   (2) 將 $Rt\angle AOB$ 的一邊 OA 反向延長圖(乙)，這時$\angle BOC$是什麼角？為什麼？



(第 1 題)

2. 已知$\angle\alpha=62°17'15''$，求$\angle\alpha$的餘角與補角之度數，並指出它們是銳角還是鈍角。

3. 如圖，$\angle EOC=\angle AOC=\angle BOD=Rt\angle$。在圖中分別找出與$\angle AOB$、$\angle BOC$互餘的角。圖中有與$\angle BOC$互補的角嗎？圖中有鄰補角嗎？

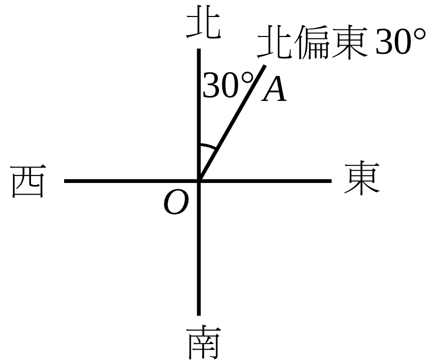


(第 3 題)

練　習

4. 互補的兩個角能不能都是銳角、鈍角、直角？互餘的兩個角呢？

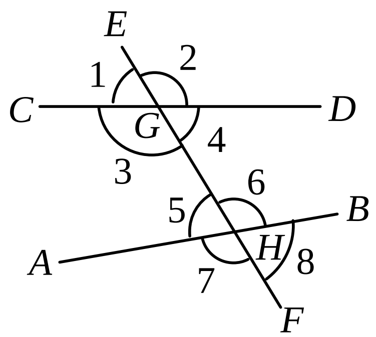
5. 如圖，OA 是表示北偏東$30°$方向的一條射線。仿照這條射線畫出表示下列方向的射線：
   (1) 北偏東$50°$； (2) 北偏西$60°$；
   (3) 南偏西$10°$； (4) 南偏東$25°$
   (5) 東北方向(即北偏東$45°$)；
   (6) 西南方向(即南偏西$45°$)。



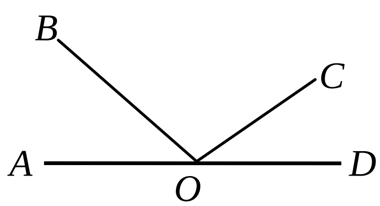
(第 5 題)

習　題　二

1. 分別用三個大寫字母表示圖中的$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$、$\angle 5$、$\angle 6$、$\angle 7$、$\angle 8$。



(第 1 題)



(第 2 題)

2. 如圖，AOD 是直線，圖中小於$180°$的角有幾個？是哪幾個？

3. $\dfrac{1}{4}$平角等於多少度？$\dfrac{1}{6}$周角呢？

4. 在括號內填入適當的分數：
   (1) $15° = (\quad)$平角； (2) $60° = (\quad)$平角；
   (3) $45° = (\quad)$周角； (4) $135° = (\quad)$平角。

5. 用度、分、秒表示：

(1) $4.56°$；　　(2) $64.23°$。

6. 用度表示：

(1) $30°45'$；　　(2) $25°12'18''$。

7. 計算：

(1) $23°35'36''+66°24'24''$；

(2) $180°-132°46'50''$；

(3) $15°27'38''\times 3$；

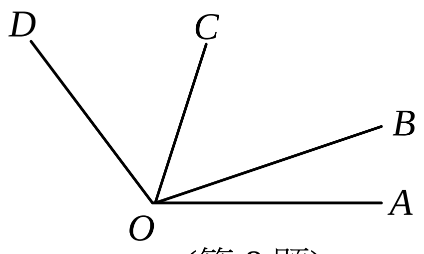
(4) $49°28'52''\div 4$。

8. 根據圖形，在括號內填上適當的角：

(1) $\angle AOC=(\quad\quad)+(\quad\quad)$；

(2) $\angle AOD-\angle BOD=(\quad\quad)$；

(3) $\angle BOC=(\quad\quad)-\angle COD$。

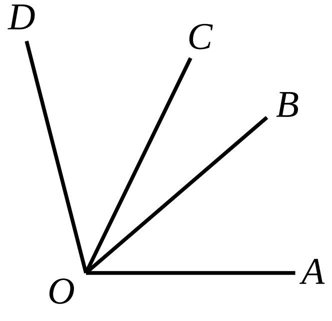


(第 8 題)

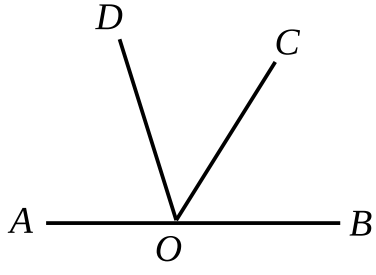
9. 根據圖形填空：

(1) 因為 $\angle AOB=\angle COD$，
所以 $\angle AOB+\angle BOC=\angle COD+(\quad\quad)$，
即 $\angle AOC=(\quad\quad)$。

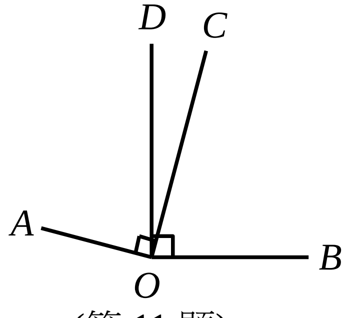
(2) 因為 $\angle AOC=\angle BOD$，
所以 $\angle AOC-\angle BOC=\angle BOD-(\quad\quad)$，
即 $\angle AOB=(\quad\quad)$。



(第 9 題)



(第 10 題)



(第 11 題)

10. 如圖，已知 AOB 是直線，$\angle AOD = 73°$，$\angle BOC = 58°$，求 $\angle COD$ 的大小。

11. 如圖，已知 $\angle AOB = 165°$，$\angle AOC = \angle BOD = 90°$，求 $\angle COD$ 的大小。

12. 用三角板畫一個 $90°$ 的角，再把它三等分。

13. 用直尺與量角器畫 $\angle AOB = 100°$，再把 $\angle AOB$ 分成 5 等分。

14. 用直尺與量角器把一個周角分成 9 等分。

15. 已知三個銳角 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$ ($\angle 2 > \angle 3$)。用直尺與量角器畫一個角，使它等於：
    (1) $\angle 1 + \angle 2$；　(2) $\angle 2 - \angle 3$；
    (3) $\angle 1 + \angle 2 - \angle 3$；　(3) $2\angle 2 - \angle 3$。

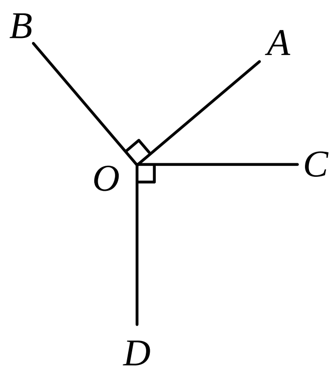
16. 用直尺與量角器畫 $\angle AOB = 70°$，再畫它的角平分線。

17. 求下列各角的餘角與補角之大小：
    (1) $76°45'$ 的角；　(2) $14°20'30''$ 的角；
    (3) $n°$ 的角($0 < n < 90$)。

18. 一個角等於它的餘角之 3 倍，求這個角。

19. 已知一個銳角，畫它的餘角與補角。

20. 如圖，已知 $\angle AOB = \angle COD = Rt\angle$，$\angle AOD$ 與 $\angle BOC$ 是否相等，為什麼？



(第 20 題)

小　结

一、本章主要內容是點、直線、射線、線段及角的概念、性質與畫法；線段、角的比較、度量和與差。

二、幾何圖形的概念，是從實際物體中抽象出來的，它們反映了物體在形狀、大小與位置關係方面的一些本質屬性。

三、線段與射線都是直線的一部份，線段有兩個端點，射線有一個端點，直線沒有端點。兩點決定一條直線。兩點之間線段最短。

點、直線、射線、線段是組成各種圖形的基本圖形。這些圖形以及它們的性質，是平面幾何之基礎。

四、角是由具有公共端點的兩條射線組成的。兩條邊成一直線的角是平角，平角的 2 倍是周角，平角的一半是直角。小於直角的角是銳角，大於直角而小於平角的角是鈍角。兩個角的和等於 1 直角時，這兩個角互為餘角；兩個角的和等於 1 平角時，這兩個角互為補角。

同角或等角的餘角相等；同角或等角的補角相等。

五、定義是說明名詞含意的語句，使各名詞互不相混。

圖形的某些性質是人們經過長期實踐證實是正確的，我們把它當作公理，作為推出其它圖形性質的根據。

本章中講了兩條公理：

經過兩點有一條直線，且恰只有一條直線；

在所有經過連結兩點的線中，線段最短。

複習參考題一

1. A、B、C、D 四點在同一條直線上，$AD=50\,\text{mm}$，$AB=14\,\text{mm}$，$CD=18\,\text{mm}$，求 BC 的長。

(第 1 題)

2. 測量員沿著一塊地的周圍測繪這塊地時，先從點 A 向北偏東 $75°$ 走 240 m 到點 B，再從點 B 向北偏西 $20°$ 走 360 m 到點 C，再從 C 向南偏西 $65°$ 走 450 m 到點 D，最後從 D 回到 A。使用 1 cm 表示 100 m 的比例，畫出圖來，並量出點 A 與 D 的距離(精確到 10 m)，以及從 D 到 A 的方向(精確到 $1°$)。

3. 判斷下列說法是否正確？為什麼？
   (1) 延長直線 AB；　(2) 延長射線 OA；　(3) 延長線段 AB。

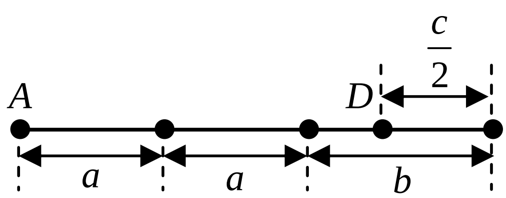
4. 先畫線段 $AB=20\,\text{mm}$，延長 AB 至 C，使 $AC=2AB$，在射線 AB 的反向延長線上取一點 E，使 $AE=\dfrac{1}{3}CE$。再計算：
   (1) 線段 CE 的長；
   (2) 線段 AC 是線段 CE 的幾分之幾？
   (3) 線段 CE 是線段 BC 的幾倍？

5. 下列說法正確嗎？為什麼？
   (1) 畫出兩點 A、B 的距離；
   (2) 已知線段 AC 的長為 10 cm，在線段 AC 上畫一點 B，使 $AB=7\,\text{cm}$，$BC=4\,\text{cm}$。

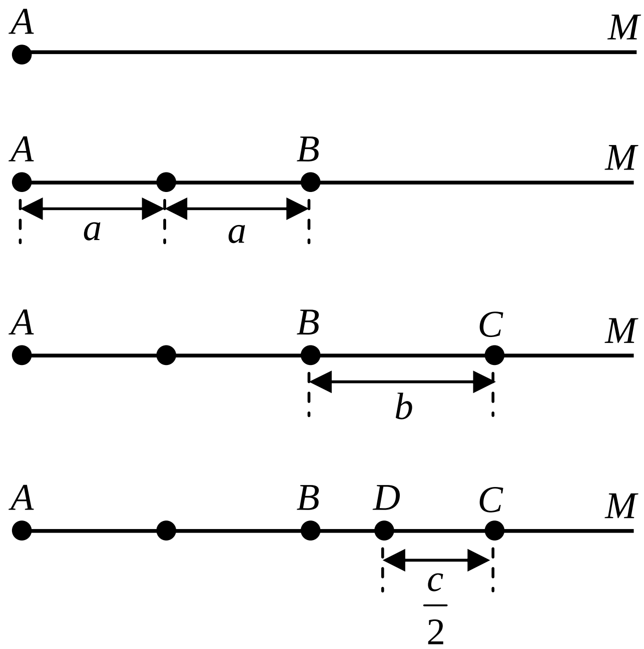
6. 看圖說話：

   已知：$b>\dfrac{c}{2}$。

   畫線段 AD 等於



畫法：(1) (2) (3) (4)

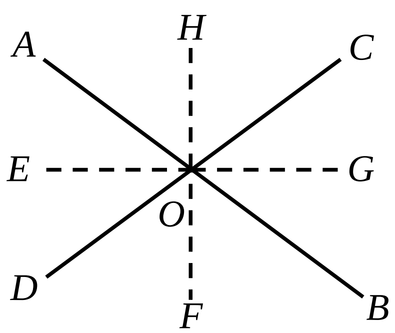


7. 畫 $\angle A = 50°$，在 $\angle A$ 的兩邊分別取 B、C 兩點，使 $AB = 35\,\text{mm}$，$AC = 30\,\text{mm}$，連結 BC。
   (1) 量 BC 的長(精確到 1 mm)；
   (2) 量 $\angle ABC$ 與 $\angle BCA$ 的度數(精確到 $1°$)，計算 $\angle A + \angle ABC + \angle BCA$ 的度數和。

8. 畫 $AB = 60\,\text{mm}$，$\angle DAB = 35°$，$\angle EBA = 44°$，AD 與 BE 相交於 C。畫 $\angle CAB$、$\angle ABC$、$\angle BCA$ 的平分線。

9. 計算：
   (1) $77°42' + 32°30' + 69°48'$；(2) $180° - 46°37'45''$；
   (3) $180°43'26'' \times 5$；(4) $360° \div 7$ (精確到 $1'$)。

10. 已知直線 AB、CD 相交於點 O，用量角器畫各角的平分線 OE、OH、OG、OF，並計算 $\angle EOH$、$\angle HOG$。E、O、G 三點在同一條直線上嗎？



(第 10 題)

11. 判斷正誤，若為錯誤，請改正之：
   (1) 在 $\angle ABC$ 的一邊之延長線上取一點 D；
   (2) 兩條射線組成的圖形叫做角；
   (3) $\angle B = \angle ABC + \angle CBD$。

12. 把一個平角三等分，求兩旁兩個角的平分線所成的角之度數。

13. 一個角的補角等於這個角的餘角之 4 倍，求這個角。

14. 已知$\angle\alpha$與$\angle\beta$互為補角，並且$\angle\alpha$比$\angle\beta$大$30°$，求$\angle\alpha$與$\angle\beta$的大小。

15. 已知：$\angle AOB$與$\angle BOC$是鄰補角，OD是$\angle AOB$的角平分線，OE是$\angle BOC$的角平分線。
    (1) 畫出它們的圖形；
    (2) 求$\angle DOE$的大小；
    (3) 指出$\angle BOE$的餘角；
    (4) 指出$\angle EOC$的餘角、補角、鄰補角。

◆ 公元前 380 年，哲學家柏拉圖(Plato; 427 B.C. – 347 B.C.)在希臘首都雅典，建立了一個名為柏拉圖學園的學術機構，它好像今天的大學學府，用來訓練人才。嚴格地說，柏拉圖不算是一名數學家，不過他認為數學，尤其是幾何學，是訓練思考能力的一個重要工具，故此，他非常重視幾何學的教學。柏拉圖在他的學園門口，掛了一塊門牌，上面寫著：

不懂幾何者勿入！
Let no one ignorant of geometry enter my door.
(Let no one unversed in geometry enter here.)

◆ 公元前二世紀希臘數學家歐幾里得(Euclid)總結了前人的豐富經驗材料，用抽象分析方法，提煉出一系列基本概念與公理，著述了原本(*Elements*) 。在西方論及數學發展時，多奉原本為數學公理化論述的藍本，甚至視為現代數學公理化精神的泉源。