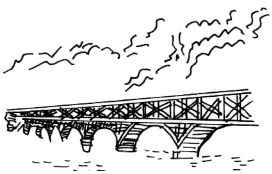
第三章　三角形

一、三角形

3.1　關於三角形的一些概念

三角形是一種很簡單但又是最常見的幾何圖形。例如，大橋的鋼樑，起重機的支架等，都是三角形結構(圖 3-1)。在小學已經學過一些三角形的初步知識，本章裡，我們將比較系統地研究三角形的許多性質以及它們的應用。



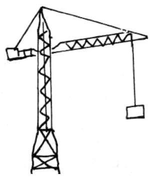


圖 3-1

如圖 3-2，由三條線段首尾順次連結所組成的圖形叫做三角形。組成三角形的三條線段叫做**三角形的邊**，相鄰兩邊的公共端點叫做三角形的**頂點**。例如，線段 AB、BC、CA 是三角形的邊，點 A、B、C 是三角形的頂點。

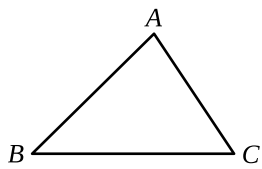


圖 3-2

「三角形」可以用符號「△」表示，頂點是 A、B、C 的三角形，記作「$\triangle ABC$」，讀作「三角形 ABC」。

三角形相鄰兩邊所組成的角叫做**三角形的內角**，簡稱**三角形的角**，三角形的角之一邊與另一邊的反向延長線組成的角叫做**三角形的外角**。例如在圖 3-3 中，$\angle BAC$ 是$\triangle ABC$ 的一個內角，$\angle BAD$ 是一個外角。三角形的外角也就是與它有公共頂點的內角之鄰補角。

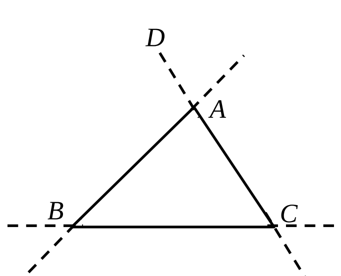


圖 3-3

三角形的一個角之平分線與這個角的對邊相交，這個角的頂點與交點之間的線段叫做**三角形的角平分線**。連結三角形一個頂點與它的對邊中點的線段叫做**三角形的中線**。三角形一個頂點到它的對邊所在直線的垂線段叫做**三角形的高**。在圖 3-4 中，線段 AD 是$\triangle ABC$ 的角平分線，AM 是中線，AH 是高。

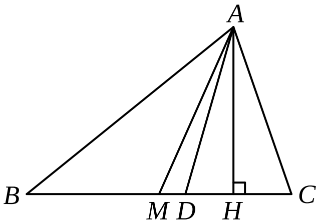
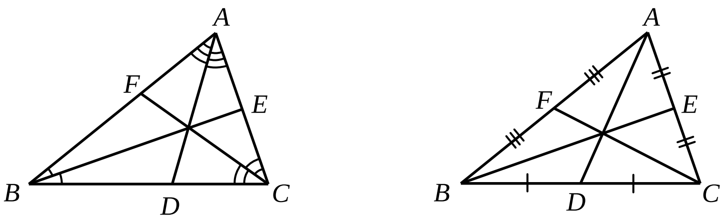


圖 3-4

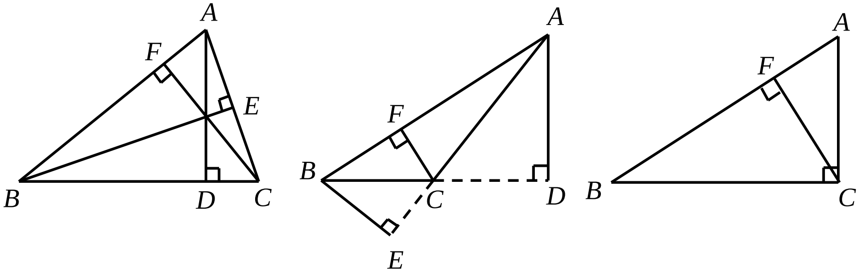
三角形有三條角平分線(圖 3-5(甲))，三條中線(圖 3-5(乙))。它們都在三角形的內部。



(甲) (乙)

圖 3-5

三角形也有三條高。由於三角形的內角可能是銳角也可能是鈍角或直角，三角形的高不一定都在三角形內部。如圖 3-6，圖(甲)中三條高在三角形的內部；圖(乙)中有一條在三角形的內部，另兩條在三角形的外部；圖(丙)中有一條在三角形的內部，另兩條恰好是三角形的兩邊。



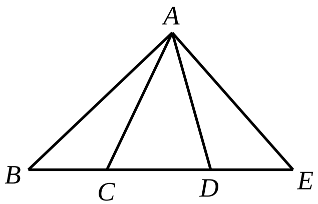
(甲) (乙) (丙)

圖 3-6

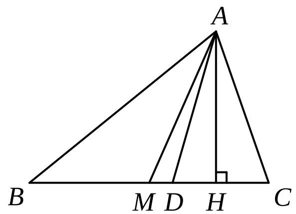
練　習

1. (1) 說出圖中有幾個三角形，把它們讀出來。說明$\angle ACD$是那個三角形的內角，那個三角形的外角；

   (2) 寫出在$\triangle ABD$中，$\angle B$所對的邊、邊BD所對的角。



(第 1 題)



(第 2 題)

2. 如圖，在$\triangle ABC$中，已知AM是中線，AD是角平分線，AH是高。根據已知條件填空：

   (1) $BM = (\qquad) = \frac{1}{2}(\qquad)$；

   (2) $\angle BAD = (\qquad) = \frac{1}{2}(\qquad)$；

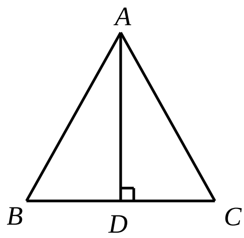
   (3) $\angle AHB = (\qquad) = Rt\angle$。

3. 如圖，AD同時是$\triangle ABC$的高、中線與角平分線。在括號內填寫下列等式的根據：

   (1) $\angle ADB = \angle ADC \quad (\qquad\qquad)$；

   (2) $\angle DAB = \angle DAC \quad (\qquad\qquad)$；

   (3) $BD = DC \quad (\qquad\qquad)$。



(第 3 題)

3.2　三角形三邊的關係

在$\triangle ABC$中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所對的邊BC、CA、AB，通常用a、b、c表示(圖 3-7)。我們知道，兩點間線段最短。根據這個公理，得

$$b+c>a\ ，\ c+a>b\ ，\ a+b>c\ 。$$

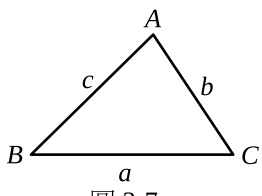


圖 3-7

由此得到：

定理　　三角形任何兩邊的和大於第三邊。

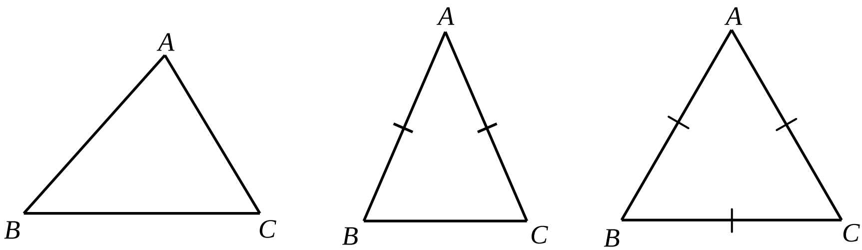
從定理直接推出來的定理叫做**推論**。從上述的定理可以得出如下的推論：

推論　　三角形任何兩邊的差小於第三邊。

例如，如果$a \ge b$，那麼，從$b+c>a$，可以推出$c>a-b$，(為什麼？)即$a-b<c$。

有的三角形，三條邊各不相等，有的兩條邊相等，有的三條邊都相等。因此，三角形可以按照邊來分類。

三邊兩兩不等的三角形叫做**不等邊三角形**(圖 3-8(甲))。三邊中有兩邊相等的三角形叫做**等腰三角形**(圖 3-8(乙))。三邊都相等的三角形叫做**等邊三角形**(圖 3-8(丙))。



(甲)　　(乙)　　(丙)

圖 3-8

在等腰三角形中，相等的兩邊都叫做**腰**，另外一邊叫做**底邊**，兩腰的夾角叫做**頂角**，腰與底邊的夾角叫做**底角**。

等邊三角形是特殊的等腰三角形，即底邊與腰相等的等腰三角形。

三角形集合包含不等邊三角形集合與等腰三角形集合，而等腰三角形集合，又包含底邊與腰不相等的等腰三角形集合與等邊三角形集合。

$$\text{三角形}\begin{cases}\text{不等邊三角形} \\ \text{等腰三角形}\begin{cases}\text{底邊與腰不相等的等腰三角形} \\ \text{等邊三角形}\end{cases}\end{cases}$$

【例】 已知： 在△ABC 中，D 是 AB 邊上任意一點(圖 3-9)。

求證： $AB+AC>DB+DC$ 。

證明： 在△ADC 中，

∵ $AD+AC>DC$

(三角形兩邊和大於第三邊)

∴ $AD+DB+AC>DB+DC$ (不等式的性質)

即 $AB+AC>DB+DC$

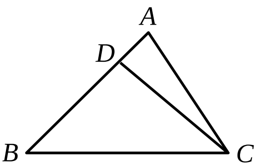
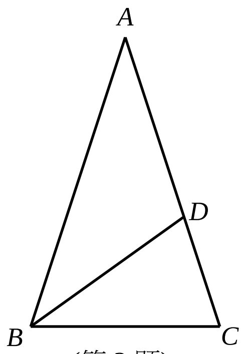


圖 3-9

練 習

1. (口答) 有下列長度的三條線段能否組成三角形？為什麼？
   (1) 3 cm，4 cm，8 cm；　(2) 5 cm，6 cm，11 cm；
   (3) 5 cm，6 cm，10 cm。
2. (口答) 如圖，已知點 D 在 AC 上，$AB=AC$ ，$AD=BD=BC$ 。圖中有幾個等腰三角形？是哪幾個？說出它們的腰、底邊、頂角與底角。
3. 以 4 cm 長的線段為底，1 cm 長的線段為腰，能否組成一個等腰三角形？如果以 4 cm 長的線段為底組成一個等腰三角形，腰長應在什麼範圍？



(第 2 題)

3.3 三角形的內角和

在小學，我們曾經把一個三角形紙板的三個角拼在一起，發現它們組成一個平角(圖 3-10)，這表明，三角形三個內角的和等於$180°$ 。就是：

三角形內角和定理　　三角形三個內角的和等於 180°。

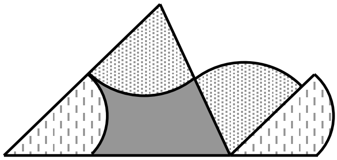


圖 3-10

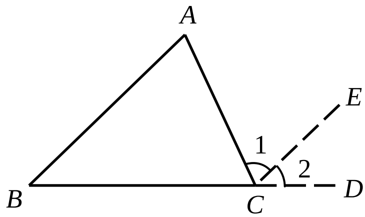


圖 3-11

下面我們來證明這個定理。

已知：　$\triangle ABC$ (圖 3-11)。

求證：　$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$。

分析：　實驗是把三個內角拼在一起組成一個平角，這啟發我們，要證明這個命題，可先把 CA 為一邊，在$\triangle ABC$ 的外部作 $\angle ACE=\angle A$，再延長 BC，然後能證明 $\angle ECD=\angle B$ 就可以了。

證明：　作 BC 的延長線 CD，在$\triangle ABC$ 的外部，以 CA 為一邊，CE 為另一邊作 $\angle 1=\angle A$ (圖 3-11)。於是

$\because$　$CE // BA$　(內錯角相等，兩直線平行)

$\therefore$　$\angle B=\angle 2$　(兩直線平行，同位角相等)

又 $\because$　$\angle 1+\angle 2+\angle ACB=180^\circ$　(平角的定義)

$\therefore$　$\angle A+\angle B+\angle ACB=180^\circ$　(等量代換)

為了證明的需要，在原來圖形上添畫的線叫做**輔助線**。在平面幾何裡，輔助線通常畫成虛線。

從上面的證明過程可以知道，$\angle ACD=\angle A+\angle B$，由此得到：

推論 1　三角形的一個外角等於與它不相鄰的兩個內角之和。

推論 2　三角形的一個外角大於任何一個與它不相鄰的內角。

【例】　已知：　$\angle BAF$、$\angle CBD$、$\angle ACE$ 是$\triangle ABC$ 的三個外角 (圖 3-12)。

求證：　$\angle BAF+\angle CBD+\angle ACE=360^\circ$

證明：　如圖，

$\because$　$\angle BAF=\angle 2+\angle 3$

$\angle CBD = \angle 1 + \angle 3$

$\angle ACE = \angle 1 + \angle 2$ (三角形的一個外角等於與它不相鄰的兩個內角之和)

$\therefore$ $\angle BAF + \angle CBD + \angle ACE$

$= 2(\angle 1 + \angle 2 + \angle 3)$

(等式性質)

$\because$ $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ (三角形內角和定理)

$\therefore$ $\angle BAF + \angle CBD + \angle ACE = 2 \times 180° = 360°$ (等量代換)

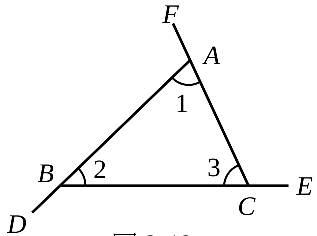


圖 3-12

由內角和定理我們知道，三角形的每一個內角都不大於 180°，所以一個三角形的三個內角可能都是銳角，也可能有一個是直角或鈍角，因此三角形可以按角進行分類。

三個角都是銳角的三角形叫做**銳角三角形**(圖 3-13(甲))。有一個角是直角的三角形叫做**直角三角形**(圖 3-13(乙))。有一個角是鈍角的三角形叫做**鈍角三角形**(圖 3-13(丙))。銳角三角形與鈍角三角形合稱**斜三角形**。

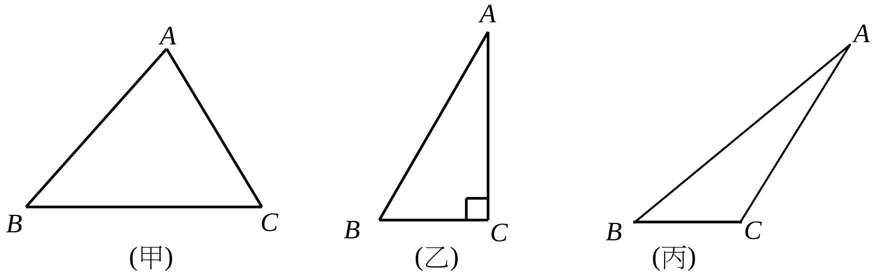


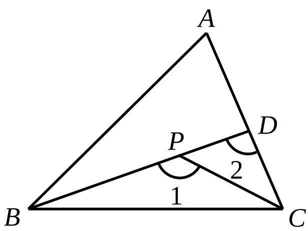
圖 3-13

$$\text{三角形}\begin{cases}\text{直角三角形}\\ \text{斜三角形}\begin{cases}\text{銳角三角形}\\ \text{鈍角三角形}\end{cases}\end{cases}$$

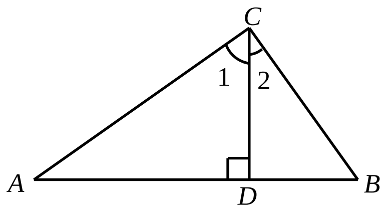
在直角三角形中，夾直角的兩邊叫做**直角邊**，直角的對邊叫做**斜邊**。兩條直角邊相等的直角三角形叫做**等腰直角三角形**。

練　習

1. (口答) 一個三角形中，能否有兩個內角是鈍角或直角？為什麼？
2. 畫一個$\triangle ABC$，再畫出它的所有外角。如果$\angle BAC = 50°$，$\angle ABC = 60°$，那麼$\angle ACB$等於多少度？與$\angle ACB$相鄰的一個外角等於多少度？為什麼？
3. 已知：　如圖，P是$\triangle ABC$內一點，延長BP交AC於D。
   求證：　(1)　$\angle 1 > \angle 2$；　(2)　$\angle 2 > \angle A$；
   (3)　$\angle 1 > \angle A$。



(第 3 題)

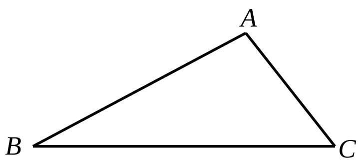


(第 4 題)

4. (口答) 如圖，已知$\angle ACB = 90°$，$CD \perp AB$，垂足是D。
   (1) 圖中有幾個直角三角形？是哪幾個？說出它們的直角邊與斜邊。
   (2) $\angle 1 + \angle 2$等於多少度？$\angle B + \angle 2$等於多少度？為什麼？$\angle 1$與$\angle B$是不是相等？為什麼？

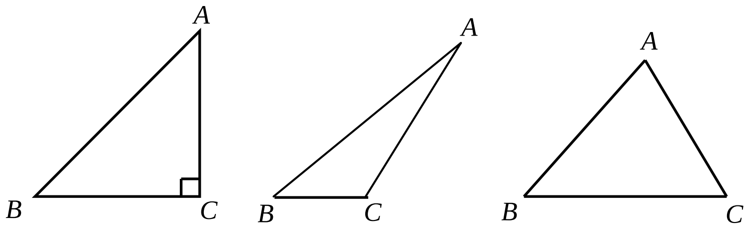
習　題　六

1. 已知$\triangle ABC$。畫出它所有的外角。如果$\angle ABC = 28°$，$\angle BCA = 52°$，$\angle CAB = 100°$，求$\triangle ABC$各外角的度數。



(第 1 題)

2. 在下面的每個三角形中，過頂點 A 畫出中線、角平分線與高。



(第 2 題)

3. 已知△ABC 的周長是 12 cm，$c+a=2b$，$c-a=2$ cm，a、b、c 各等於多少？

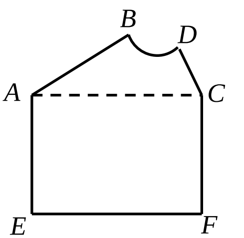
4. 兩根木棒的長分別是 7 cm 與 10 cm，要選擇第三根木棒，將它們釘成一個三角架，第三根木棒的長有什麼限制？

5. (1) 已知等腰三角形的一邊為 5，一邊為 6，求它的周長；
(2) 已知等腰三角形的一邊為 4，一邊為 9，求它的周長。

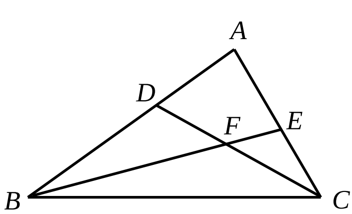
6. 已知等腰三角形的周長是 10 cm，腰比底邊長 2 cm，求這個等腰三角形各邊的長。

7. 根據下列條件，求△ABC 中 $\angle C$ 的大小。
(1) $\angle A=65°40'$，$\angle B=36°25'$；
(2) $\angle A=35°$，$\angle B=\angle C$；
(3) $\angle B=\angle C=2\angle A$；
(4) $\angle A=105°$，$\angle B-\angle C=15°$。

8. 一塊模板如圖，按規定 AB、CD 的延長線應相交成 $85°$ 角，因交點不在板上，不便測量，工人師傅連結 AC，測得 $\angle BAC=32°$，$\angle DCA=65°$，這時就可以知道，AB、CD 的延長線相交所成的角是不是符合規定。為什麼？



(第 8 題)



(第 9 題)

9. 已知：　如圖，D 是 AB 上一點，E 是 AC 上一點，BE 與 CD 相交於點 F。

求證：　(1)　$\angle BDC = \angle A + \angle ACD$；

(2)　$\angle BFC = \angle ABE + \angle A + \angle ACD$。

10. 在括號內填寫理由：

已知：　P 是$\triangle ABC$ 內一點。

求證：　$\angle BPC > \angle BAC$。

證明：　連結 AP，並延長到點 D。

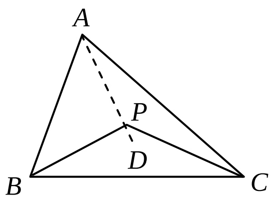
$\because$　$\angle BPD > \angle BAD$　(　　　　　)

$\angle DPC > \angle DAC$　(　　　　　)

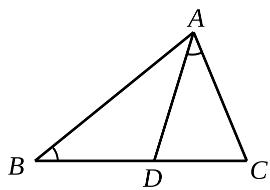
$\therefore$　$\angle BPD + \angle DPC > \angle BAD + \angle DAC$

(　　　　　)

即　$\angle BPC > \angle BAC$。



(第 10 題)



(第 11 題)

11. 完成下列的證明：

已知：　如圖，$\angle DAC = \angle B$。

求證：　$\angle ADC = \angle BAC$。

證明：　$\because$　$\angle ADC = \angle B + \angle BAD$　(　　　　　)

$\angle B = \angle DAC$　(　　　　　)

$\therefore$　$\angle ADC = (\qquad) + \angle BAD$　(　　　　　)

即　$\angle ADC = (\qquad)$。

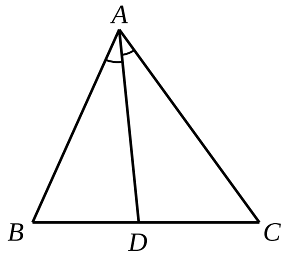
12. 適合下列條件的$\triangle ABC$ 是銳角三角形、直角三角形、還是鈍角三角形？

(1)　$\angle A = \angle B = \angle C$；　(2)　$\angle A + \angle B = \angle C$；

(3)　$\angle A = \angle B = 30^\circ$；　(4)　$\angle A = \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{3}\angle C$。

13. 在$\triangle ABC$中，已知AD是角平分線、$\angle B = 66°$、$\angle C = 54°$。求$\angle ADB$與$\angle ADC$的度數。

14. 在$\triangle ABC$中，已知$\angle ABC = 66°$、$\angle ACB = 54°$、BE是AC上的高、CF是AB上的高、H是BE與CF的交點。求$\angle ABE$、$\angle ACF$與$\angle BHC$的度數。



(第 13 題)

二、全等三角形

3.4 全等三角形

把一塊模板按在紙板上，畫下圖形，照圖形裁下來的紙板就與模板完全一樣，把模板與裁得的紙板放在一起能夠完全重合。從同一張底片沖洗出來的兩張照片上之圖形，放在一起也能夠完全重合。

能夠完全重合的兩個圖形叫做**全等形**，兩個全等三角形重合時，互相重合的頂點叫做**對應頂點**，互相重合的邊叫做**對應邊**，互相重合的角叫做**對應角**。

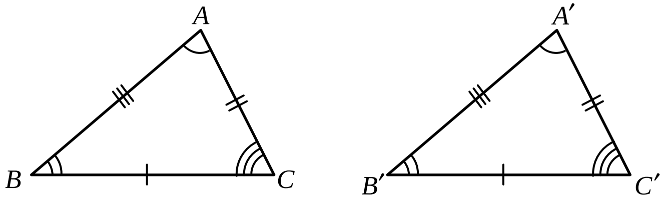


圖 3-14

例如，圖 3-14 中的兩個三角形能夠完全重合，就是全等三角形，「全等」用符號「≅」來表示，讀作「全等於」。圖 3-14 中的$\triangle ABC$與$\triangle A'B'C'$全等，記作「$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$」。其中$A$與$A'$、

B 與 B'、C 與 C' 是對應頂點，BC 與 $B'C'$、CA 與 $C'A'$、AB 與 $A'B'$ 是對應邊，$\angle A$ 與 $\angle A'$、$\angle B$ 與 $\angle B'$、$\angle C$ 與 $\angle C'$ 是對應角。

我們知道，能夠重合的兩條線段是相等的線段，能夠重合的兩個角是相等的角，所以**全等三角形的對應邊相等，對應角相等**。例如，圖 3-14 中，$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，那麼 $BC = B'C'$、$CA = C'A'$、$AB = A'B'$、$\angle A = \angle A'$、$\angle B = \angle B'$、$\angle C = \angle C'$。

記兩個全等三角形時，我們通常把表示對應頂點的字母寫在對應之位置上。例如，圖 3-15 中的兩個三角形全等，點 A 與 A'、B 與 B'、C 與 C' 是對應點，記作「$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$」，而不記作「$\triangle ABC \cong \triangle A'C'B'$」或「$\triangle ABC \cong \triangle B'A'C'$」等。

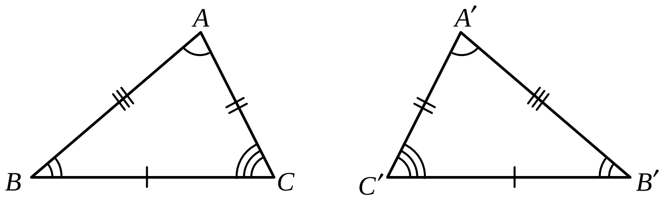
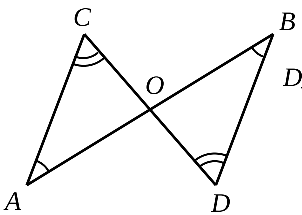


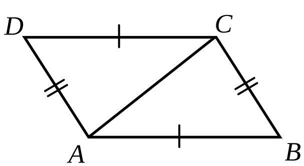
圖 3-15

練 習

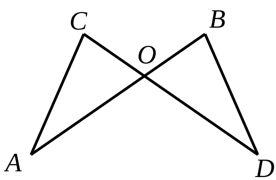
1. (口答) 如圖，$\triangle AOC \cong \triangle BOD$，$\angle A$ 與 $\angle B$、$\angle C$ 與 $\angle D$ 是對應角，說出對應邊與另外一組對應角。
2. (口答) 如圖，$\triangle ABC \cong \triangle CDA$，$AB$ 與 CD、BC 與 DA 是對應邊，說出對應角與另外一組對應邊。由對應邊找對應角，由對應角找對應邊有什麼規律？



(第 1 題)



(第 2 題)



(第 3 題)

3. (口答) 如圖，$\triangle OCA \cong \triangle OBD$，$C$ 與 B、A 與 D 是對應頂點，說出這兩個三角形中相等的邊與角。

3.5　三角形全等的判定 I

根據定義來判定兩個三角形全等，須要知道三條邊對應相等與三個角對應相等。現在我們來研究是否可以減少一些條件，找到比較簡單的判定方法。為此，我們先舉例說明如何畫出滿足一定條件的三角形。

用刻度尺與量角器，畫一個三角形，使它的兩條邊長分別是 2.8 cm 與 3.1 cm，這兩條邊的夾角等於 45°。

畫法：
1. 畫 $\angle DAE = 45°$ (圖 3-16)。
2. 在 AD、AE 上分別截取 $AB = 3.1$ cm、$AC = 2.8$ cm。
3. 連結 BC。

$\triangle ABC$ 就是所求的三角形。

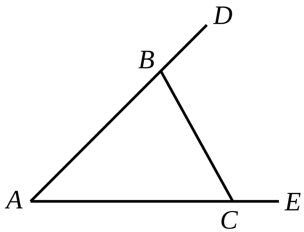


圖 3-16

如果按照上面的條件，用同樣的方法另畫一個 $\triangle A'B'C'$，再把 $\triangle A'B'C'$ 剪下來放到$\triangle ABC$ 上，我們可以看到，$\triangle A'B'C'$ 與$\triangle ABC$ 能夠完全重合。這個事實說明，只要是按上述條件畫出的三角形，它們總是全等的。我們把這個事實作為公理：

邊角邊公理　**有兩邊與它們的夾角對應相等的兩個三角形全等**(可以簡寫成「**邊角邊**」或「***SAS***」)。

例如，在圖 3-17 的$\triangle ABC$ 與$\triangle A'B'C'$ 中，如果 $AB = A'B'$、$\angle A = \angle A'$、 $AC = A'C'$，那麼

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' 。$$

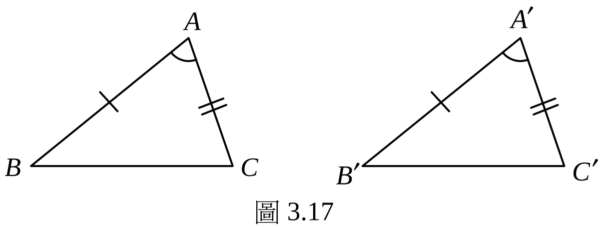


圖 3.17

根據邊角邊公理可以判定兩個三角形全等。

【例 1】 已知： $AD // BC$ 、 $AD = CB$ (圖 3-18)。

求證： $\triangle ADC \cong \triangle CBA$

證明： $\because$ $AD // BC$ (已知)

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$ (兩直線平行，內錯角相等)

在$\triangle ADC$ 與$\triangle CBA$ 中

$$\begin{cases} AD = CB & \text{(已知)} \\ \angle 1 = \angle 2 & \text{(已證)} \\ AC = CA & \text{(公共邊)} \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ADC \cong \triangle CBA$ (SAS)

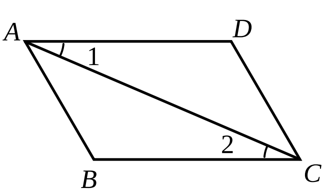


圖 3-18

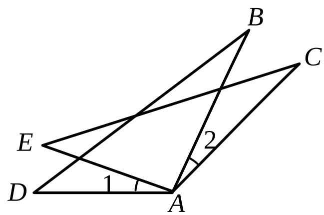


圖 3-19

【例 2】 已知： 如圖 3-19， $AB = AC$ 、 $AD = AE$ 、 $\angle 1 = \angle 2$ 。

求證： $\triangle ABD \cong \triangle ACE$

證明： $\because$ $\angle 1 = \angle 2$ (已知)

$\therefore$ $\angle 1 + \angle EAB = \angle 2 + \angle EAB$ (等式的性質)

即$\angle DAB = \angle EAC$ 。

在$\triangle ABD$ 與$\triangle ACE$ 中

$$\begin{cases} AB = AC & \text{(已知)} \\ \angle DAB = \angle EAC & \text{(已證)} \\ AD = AE & \text{(已知)} \end{cases}$$

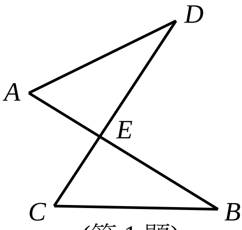
$\therefore$ $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS)

練　習

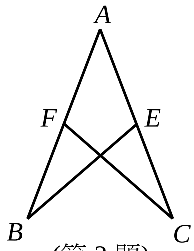
1. 已知：如圖，AB 與 CD 相交於點 E， $EA = EC$ 、 $ED = EB$ 。
   求證：$\triangle AED \cong \triangle CEB$ 。

練　習

2. 已知：如圖，$AB = AC$，F、E 分別是 AB、AC 的中點。
   求證：$\triangle ABE \cong \triangle ACF$。



(第 1 題)



(第 2 題)

【例 3】如圖 3-20，有一池塘。要測池塘兩端 A、B 的距離，可先在平地上取一個可以直接到達 A 與 B 的點 C，連結 AC 並延長到 D，使 $CD = CA$。連結 BC 並延長到 E，使 $CE = CB$。連結 DE，那麼量出 DE 的長，就是 A、B 的距離。為什麼？按圖寫出「已知」、「求證」，並證明。

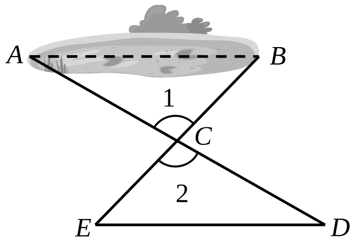


圖 3-20

已知：　AD 與 BC 交於點 C，$CA = CD$、$CB = CE$。

求證：　$AB = DE$

證明：　在$\triangle ACB$ 與$\triangle DCE$ 中

$$\begin{cases} CA = CD & \text{(已知)} \\ \angle 1 = \angle 2 & \text{(對頂角相等)} \\ CB = CE & \text{(已知)} \end{cases}$$

$\therefore\quad \triangle ACB \cong \triangle DCE \quad (SAS)$

$\therefore\quad AB = DE$　(全等三角形的對應邊相等)

因為全等三角形的對應邊、對應角相等，所以，證明分別屬於兩個三角形的線段相等或者角相等的問題，可以通過證明這兩個三角形全等來解決。

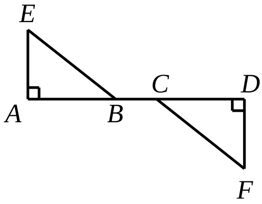
練　習

1. 已知：如圖，點 A、B、C、D 在同一條直線上，$AC = DB$、$AE = DF$、$EA \perp AD$、$FD \perp AD$，垂足分別是 A、D。

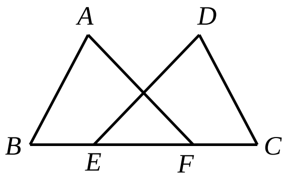
   求證：$\triangle EAB \cong \triangle FDC$。

2. 已知：如圖，點 E、F 在 BC 上，$BE = CF$、$AB = DC$、$\angle B = \angle C$。

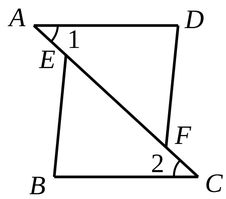
   求證：$AF = DE$。



(第 1 題)



(第 2 題)



(第 3 題)

3. 已知：如圖，點 A、E、F、C 在同一條直線上，$AD = CB$、$\angle 1 = \angle 2$、$AE = CF$。

   求證：$EB \,//\, DF$。

3.6　三角形全等的判定 II

現在研究三角形全等的另一個判定方法。

畫一個三角形，使它兩個角分別等於 $30°$ 與 $45°$，它們所夾的邊長等於 2.5 cm。

畫法：
1. 畫線段 $BC = 2.5$ cm(圖 3-21)
2. 在 BC 的同旁，分別以 B、C 為頂點，畫 $\angle CBD = 30°$、$\angle BCE = 45°$，BD 與 CE 相交於 A。

$\triangle ABC$ 就是所求的三角形。

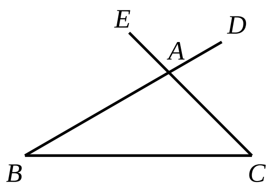


圖 3-21

如果按照上面的條件，用同樣的方法另畫一個$\triangle A'B'C'$，再把$\triangle A'B'C'$剪下來放到$\triangle ABC$上，則$\triangle A'B'C'$與$\triangle ABC$能夠完全重合。所以，只要是按上面條件畫出的三角形，總是全等的。我們也把這個事實作為公理：

角邊角公理　**有兩角與它們的夾邊對應相等的兩個三角形全等(**可以簡寫成「**角邊角**」或「***ASA***」**)。**

例如，在圖 3-22 的$\triangle ABC$與$\triangle A'B'C'$中，如果$\angle B=\angle B'$、$BC=B'C'$、$\angle C=\angle C'$，那麼

$$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'\text{。}$$

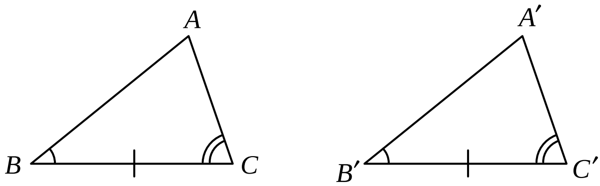


圖 3.22

在$\triangle ABC$與$\triangle A'B'C'$中，如果已知$AB=A'B'$、$\angle B=\angle B'$、$\angle C=\angle C'$(圖 3-22)，那麼，由三角形內角和定理可得$\angle A=\angle A'$。根據角邊角公理，$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$。因此，有下面推論：

推論　**有兩角與其中一角的對邊對應相等的兩個三角形全等(**可以簡寫成「**角角邊**」或「***AAS***」**)。**

【例 1】已知：　點D在AB上，點E在AC上，BE與CD相交於點O，$AB=AC$、$\angle B=\angle C$。(圖 3-23)。

求證：　$BD=CE$

分析：　BD與CE分別在$\triangle BOD$與$\triangle COE$中，由已知條件不能直接證明$\triangle BOD\cong\triangle COE$。但已知$AB=AC$，$AB$、$BD$及$AC$、$CE$分別在一條直線上，如果能證明$AD=AE$，就可以得到$BD=CE$。而$AD$與$AE$分別在$\triangle ADC$與$\triangle AEB$中，可由已知條件證得$\triangle ADC\cong\triangle AEB$。

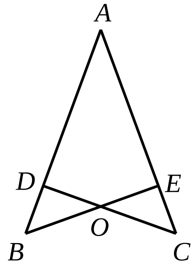


圖 3-23

證明：　在△ADC與△AEB中

$$\begin{cases} \angle A = \angle A & (\text{公共角}) \\ AC = AB & (\text{已知}) \\ \angle C = \angle B & (\text{已知}) \end{cases}$$

$\therefore$　$\triangle ADC \cong \triangle AEB$　(ASA)

$\therefore$　$AD = AE$　(全等三角形對應邊相等)

又　$\because$　$AB = AC$　(已知)

$\therefore$　$BD = CE$　(等式性質)

【例 2】 求證：全等三角形對應角的平分線相等。

已知：　$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，$AD$、$A'D'$分別是△$ABC$與△$A'B'C'$的角平分線(圖 3-24)。

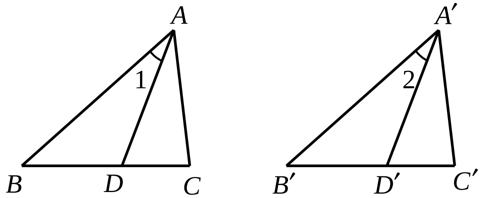


圖 3-24

求證：　$AD = A'D'$

證明：　$\because$　$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$　(已知)

$\therefore$　$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ \angle B = \angle B' \\ \angle BAC = \angle B'A'C' \end{array}\right\}$ (全等三角形對應邊、對應角相等)

$\because$　$\angle 1 = \dfrac{1}{2}\angle BAC$　(已知)

$\angle 2 = \dfrac{1}{2}\angle B'A'C'$　(已知)

$\therefore$　$\angle 1 = \angle 2$

在△ABD與△$A'B'D'$中，

$$\begin{cases} \angle B = \angle B' & (\text{已證}) \\ AB = A'B' & (\text{已證}) \\ \angle 1 = \angle 2 & (\text{已證}) \end{cases}$$

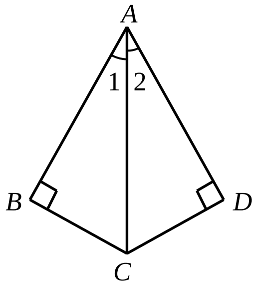
$\therefore \quad \triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$ (ASA)

$\therefore \quad AD = A'D'$ (全等三角形對應邊相等)

練 習

1. 已知：如圖，$AB \perp BC$，$AD \perp DC$，
   垂足分別為 B、D，$\angle 1 = \angle 2$。
   求證：$AB = AD$。

2. 求證：全等三角形對應邊上的高相等。



(第 1 題)

3.7 三角形全等的判定 III

到現在為止，我們學過三種判定三角形全等的方法，即邊角邊(SAS)公理、角邊角(ASA)公理及推論角角邊(AAS)。那麼，是不是在兩個三角形中，有任意三組對應的邊或角相等時，兩個三角形就全等呢？看下面幾種情況。

例如，在$\triangle ABC$ 與$\triangle ABD$ 中，已知 $AB = AB$、$AC = AD$、$\angle B = \angle B$，顯然它們並不全等(圖 3-25)。這說明，兩邊與其中一邊的對角對應相等的兩個三角形不一定全等。

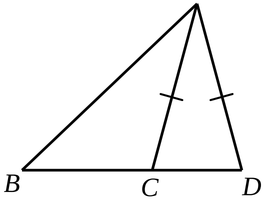


圖 3-25

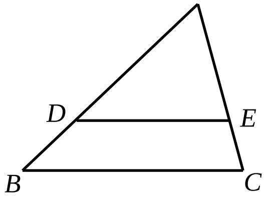


圖 3-26

又如，在$\triangle ABC$ 與$\triangle ADE$ 中，如果 $DE//BC$，則$\angle ADE = \angle B$、$\angle AED = \angle C$，又$\angle A = \angle A$，但$\triangle ABC$ 與$\triangle ADE$ 並不全等(圖

3-26)。這說明，三個角對應相等的兩個三角形也不一定全等。

但是，如果兩個三角形的三條邊對應相等，這兩個三角形一定全等。這個事實以後可以證明，所以有下面的定理：

邊邊邊定理　有三邊對應相等的兩個三角形全等(可以簡寫成「**邊邊邊**」或「***SSS***」**)**。

例如，在圖 3-27 的$\triangle ABC$與$\triangle A'B'C'$中，如果$BC = B'C'$、$CA = C'A'$、$AB = A'B'$，那麼

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

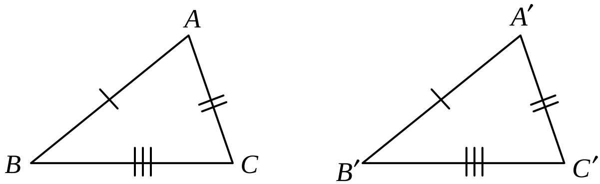


圖 3.27

【例】　已知：　如圖 3-28，$AB = CD$、$BC = DA$，E、F 是 AC 上兩點，且 $AE = CF$。

求證：　$BF = DE$

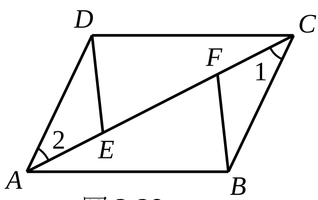


圖 3-28

證明：　在$\triangle ABC$與$\triangle CDA$中

$$\begin{cases} AB = CD & (\text{已知}) \\ BC = DA & (\text{已知}) \\ CA = AC & (\text{已知}) \end{cases}$$

$\therefore\quad \triangle ABC \cong \triangle CDA \quad (SSS)$

$\therefore\quad \angle 1 = \angle 2$ (全等三角形的對應角相等)

在$\triangle BCF$與$\triangle DAE$中

$$\begin{cases} BC = DA & (\text{已知}) \\ \angle 1 = \angle 2 & (\text{已知}) \\ CF = AE & (\text{已知}) \end{cases}$$

$\therefore\quad \triangle BCF \cong \triangle DAE \quad (SAS)$

$\therefore\quad BF = DE$ (全等三角形的對應邊相等)

由邊邊邊定理可以看出，只要三角形三邊的長度固定，這個三角形的形狀大小就完全確定。例如，取三根長度適當的木條，用釘子把它們釘成一個三角框架，所得到的框架形狀與大小就固定了(圖 3-29)。三角形這個性質叫做**三角形的穩定性**。這是三角形特有的性質。用四根木條釘成的框架就沒有這個性質，它的形狀是可以改變的(圖 3-30)。

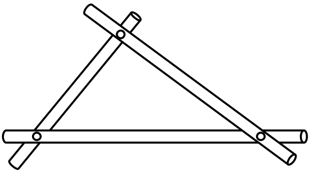


圖 3-29

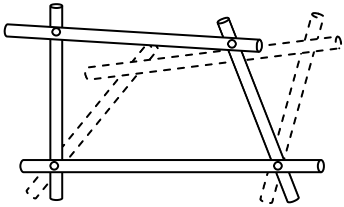
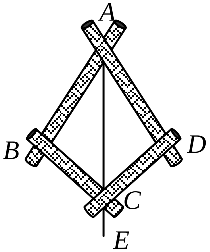


圖 3-30

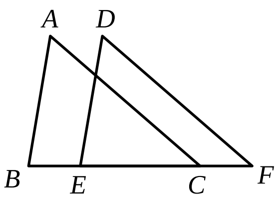
三角形的穩定性在生產與生活中是很有用的。例如，屋子的人字樑具有三角形的結構，它就堅固與穩定；在柵欄門上斜著釘一條(或兩條)木板，構成一些三角形，就可以使柵欄門不變形。前面提到的大橋鋼樑、起重機的支架都採用三角形結構，也是這個道理。

練 習

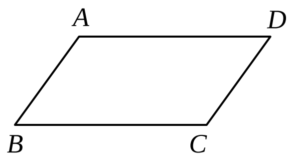
1. 如圖是一個平分角的儀器，其中 $AB = AD$ 、 $BC = DC$ 。為了平分一個角，只要將點 A 放在角的頂點，AB 與 AD 沿著角的兩邊放下，沿 AC 畫一條射線 AE，AE 就是角平分線。說明它的道理。



(第 1 題)



(第 2 題)



(第 3 題)

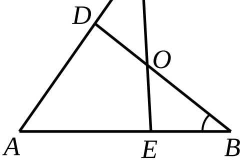
練 習

2. 已知：如圖，點 B、E、C、F 在同一直線上，$AB=DE$、$AC=DF$、$BE=CF$。
   求證：$\angle A=\angle D$。
3. 已知：如圖，$AB=DC$、$AD=BC$。
   求證：$\angle A=\angle C$。
4. 舉出一些利用三角形穩定性的實例。

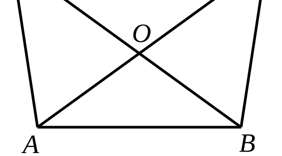
➢ 三角形穩定性的實例：

習 題 七

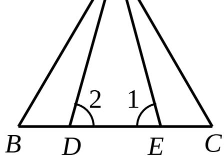
1. 已知$\triangle ABD\cong\triangle ACE$、$\angle B=\angle C$，指出其它的對應角與對應邊；又知$\triangle OBE\cong\triangle OCD$，指出所有的對應角與對應邊。
2. 已知$\triangle ABC\cong\triangle BAD$、$BC=AD$，指出其它的對應邊與對應角；又知$\triangle OAC\cong\triangle OBD$，指出所有的對應邊與對應角。



(第 1 題)



(第 2 題)



(第 3 題)

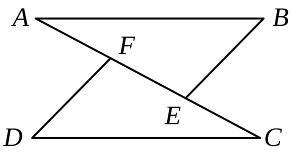
3. 已知 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ 、 $\angle 1 = \angle 2$ 、 $\angle B = \angle C$ 。指出其它的對應邊與對應角。

4. 畫下列三角形：
(1) 腰長等於 l，頂角等於 $\angle\alpha$ 的等腰三角形；
(2) 兩條直角邊分別等於 a 與 b 的直角三角形。

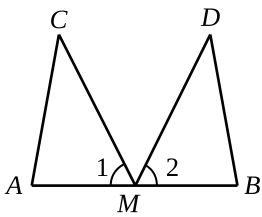
5. 在第 1 題的圖中，已知： $AB = AC$ 、 $AD = AE$ 。
求證： $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ 。

6. 在第 2 題的圖中，已知： $\angle CAB = \angle DBA$ 、 $AC = BD$ 。
求證： $\triangle CAB \cong \triangle DBA$ 。

7. 已知：點 A、F、E、C 在同一直線上， $AF = CE$ 、 $BE \mathbin{/\!/} DF$ 、 $BE = DF$ 。
求證： $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ 。



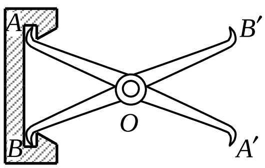
(第 7 題)



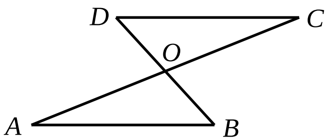
(第 8 題)

8. 已知：M 是 AB 的中點， $MC = MD$ 、 $\angle 1 = \angle 2$ 。
求證： $AC = BD$ 。

9. 如圖，可以用兩根鋼條 AA' 與 BB' ，在中點 O 處連在一起做成的工具(卡鉗)測量工件內槽的寬。按照圖寫出「已知」、「求證」，並證明 $AB = A'B'$ 。



(第 9 題)



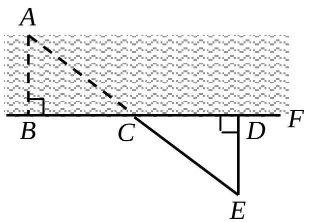
(第 10 題)

10. 已知：AC 與 BD 相交於點 O，$OA=OC$ 、$OB=OD$ 。
求證：$DC // AB$ 。

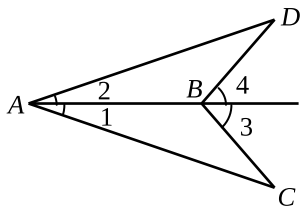
11. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=Rt\angle$，延長 BC 至 B'，使 $CB'=BC$ ，連結 AB'，那麼$\triangle ABB'$是等腰三角形。畫出圖形，寫出已知與求證，並且進行證明。

12. 用刻度尺與量角器畫$\triangle ABC$，使$\angle A=78°$、$\angle B=33°$、$BC=4.5$ cm。

13. 要測量河兩岸相對的兩點 A、B 的距離，可以在 AB 的垂線 BF 上取兩點 C、D，使 $CD=BC$ ，再定出 BF 的垂線 DE，使 A、C、E 在同一條直線上，這時測得的 DE 的長就是 AB 的長。寫出已知與求證，並且進行證明。



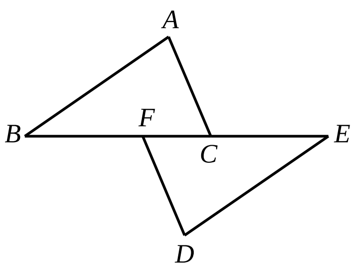
(第 13 題)



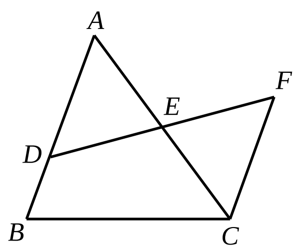
(第 14 題)

14. 已知：如圖，$\angle 1=\angle 2$ 、$\angle 3=\angle 4$ 。
求證：$AC=AD$ 。

15. 已知：如圖，點 B、F、C、E 在同一直線上，$FB=CE$ 、
$AB // DE$ 、$AC // DF$ 。
求證：$AB=DE$ 、$AC=DF$ 。



(第 15 題)

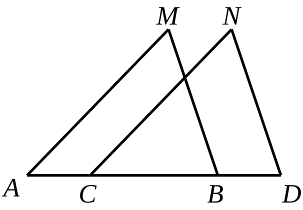


(第 16 題)

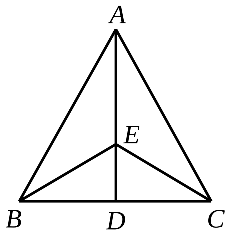
16. 已知：如圖，D 是$\triangle ABC$ 的邊 AB 上一點，DF 交 AC 於點 E，
$DE = FE$ 、 $FC \parallel AB$ 。
求證： $AE = CE$ 。

17. 求證：等腰三角形兩腰上的高相等。

18. 已知：如圖，點 A、C、B、D 在同一直線上， $AC = BD$ 、
$AM = CN$ 、 $BM = DN$ 。
求證： $AM \parallel CN$ 、 $BM \parallel DN$ 。



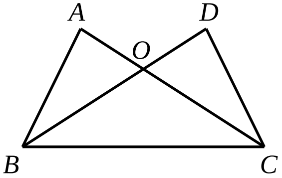
(第 18 題)



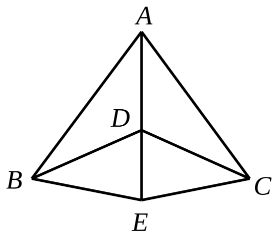
(第 19 題)

19. 已知：如圖， $AB = AC$ 、 $EB = EC$ 、AE 的延長線交 BC 於 D。
求證： $BD = CD$ 。

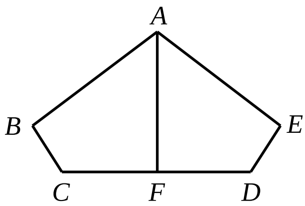
20. 已知：$\triangle ABC$ 與$\triangle DCB$ 的頂點 A 與 D 在 BC 的同旁，
$AB = DC$ 、 $AC = DB$ 、AC 與 DB 相交於點 O。
求證： $OA = OD$ 。



(第 20 題)



(第 21 題)



(第 22 題)

21. 已知：如圖， $AB = AC$ 、 $DB = DC$ 、E 在 AD 的延長線上。
求證： $BE = CE$ 。

22. 已知：如圖， $AB = AE$ 、 $\angle B = \angle E$ 、 $BC = ED$ 、F 是 CD 的
中點。
求證： $AF \perp CD$ 。

23. 求證：如果兩個三角形有兩條邊與其中一邊上的中線對應相等，那麼這兩個三角形全等。

三、等腰三角形

3.8 等腰三角形的性質

等腰三角形是一種特殊的三角形，它有許多重要性質。我們先做個實驗。取一張等腰三角形的紙片(圖 3-31)，把兩腰 AB、AC 疊在一起，我們發現，兩個底角互相重合。這說明等腰三角形的兩個底角相等。下面我們來證明這個性質。

等腰三角形的性質定理：

等腰三角形的兩個底角相等(簡寫成「**等邊對等角**」**)。**

已知： $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$ (圖 3-31)。

求證： $\angle B = \angle C$ 。

證明： 作頂角的平分線 AD。

在$\triangle BAD$ 與$\triangle CAD$ 中

$$\begin{cases} AC = AB & (\text{已知}) \\ \angle 1 = \angle 2 & (\text{角的平分線定義}) \\ AD = AD & (\text{公共邊}) \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle BAD \cong \triangle CAD$ (SAS)

$\therefore$ $\angle B = \angle C$ (全等三角形的對應角相等)

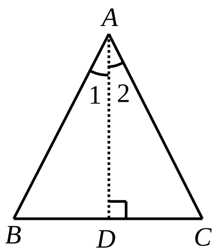


圖 3-31

從上面的證明過程中，可以知道

$$BD = CD \text{、} \angle ADB = \angle ADC = Rt\angle \text{，}$$

所以 AD 平分 BC，並且 $AD \perp BC$ 。得

推論 1　等腰三角形頂角的平分線平分底邊且垂直於底邊。

從推論 1 可以知道，**等腰三角形的頂角平分線、底邊上的中線、底邊上的高互相重合**。

推論 2　等邊三角形的各角都相等，且每一個角都等於 60°。

【例 1】 求證：等腰三角形兩個底角的平分線相等。

已知：　在△ABC 中，$AB=AC$、BD 與 CE 分別是∠B 與∠C 的平分線(圖 3-32)。

求證：　$BD=CE$

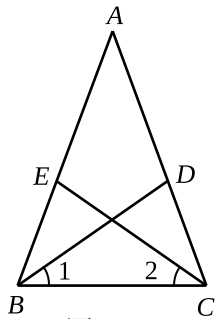


圖 3-32

證明：　∵　$AB=AC$　(已知)

∴　$\angle ABC=\angle ACB$

(等邊對等角)

又　∵　$\angle 1=\dfrac{1}{2}\angle ABC$

$\angle 2=\dfrac{1}{2}\angle ACB$　(已知)

∴　$\angle 1=\angle 2$　(等式性質)

在△BDC 與△CEB 中

$$\begin{cases}\angle ACB=\angle ABC & \text{(已證)}\\ BC=CB & \text{(公共邊)}\\ \angle 1=\angle 2 & \text{(已證)}\end{cases}$$

∴　$\triangle BDC\cong\triangle CEB$　(ASA)

∴　$BD=CE$　(全等三角形對應邊相等)

【例 2】 已知：　點 D、E 在 BC 上，$AB=AC$、$AD=AE$　(圖 3-33)。

求證：　$BD=CE$

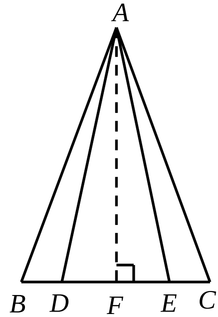


圖 3-33

證明：　作 $AF\perp BC$，垂足是 F。

∵　$AB=AC$

$AD=AE$　(已知)

$AF\perp BC$　(輔助線作法)

∴　$BF=CF$、$DF=EF$

(等腰三角形底邊上的高與底邊上的中線互相重合)

∴　$BD=CE$　(等式性質)

【例 3】 在一個三角形中，如果兩條邊不等，那麼它們所對的角也不等，大邊所對的角較大。(簡寫成「**大邊對大角**」**)**

已知： $\triangle ABC$ 中， $AB > AC$ (圖 3-34)。

求證： $\angle ACB > \angle B$

證明： 在較大的邊 AB 上截取 AD，使 $AD = AC$ 。

連結 CD。

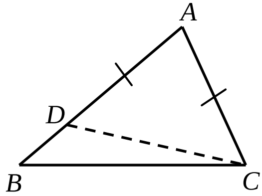


圖 3-34

$\because$ $AD = AC$ (輔助線作法)

$\therefore$ $\angle ADC = \angle ACD$

(等腰三角形底角相等)

$\because$ $\angle ACB > \angle ACD$ (角的大小定義)

$\therefore$ $\angle ACB > \angle ADC$ (等量代換)

$\because$ $\angle ADC > \angle B$ (三角形的外角大於不相鄰的內角)

$\therefore$ $\angle ACB > \angle B$ (不等式性質)

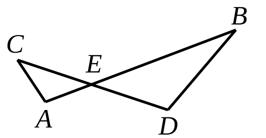
注意：證明三角形的邊或角不等之問題，常通過添加輔助線的辦法，把它化成相等的情況進行研究。輔助線的一般作法是，在大邊上(或大角內)做出一部份等於小邊(或小角)，得到等腰三角形。

練 習

1. (口答) (1) 怎樣從等腰三角形的性質定理得出推論：等腰直角三角形的每一個銳角都等於 45° ？
   (2) 如果等腰三角形的一個底角等於 75° ，那麼它的頂角等於多少度？
   (3) 等腰直角三角形斜邊上的高把直角分成兩個角，求這兩個角的度數。
2. (口答) (1) $\triangle ABC$ 中，已知 $BC > AB > AC$ ，比較三個角的大小；
   (2) 如果一個三角形最大的邊所對之角是銳角，那麼這個三角形一定是銳角三角形，為什麼？

練 習

3. 已知：AB 與 CD 相交於點 E，
$CE > AC$ 、 $BD > ED$ 。
求證：$\angle A > \angle B$ 。



(第 3 題)

3.9 等腰三角形的判定

我們已經知道，等腰三角形有兩個角(底角)相等，現在來證明有兩個角相等的三角形一定是等腰三角形。

等腰三角形的判定定理：

如果一個三角形有兩個角相等，那麼這個兩個角所對的邊也相等。(簡寫成「**等角對等邊**」**)**

已知：　$\triangle ABC$ 中，$\angle B = \angle C$　(圖 3-35)。

求證：　$AB = AC$ 。

證明：　作 $\angle BAC$ 的平分線 AD。

在$\triangle BAD$ 與$\triangle CAD$ 中

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 2 & \text{(角平分線的定義)} \\ \angle B = \angle C & \text{(已知)} \\ AD = AD & \text{(公共邊)} \end{cases}$$

$\therefore\quad \triangle BAD \cong \triangle CAD \quad (AAS)$

$\therefore\quad AB = AC$　(全等三角形的對應邊相等)

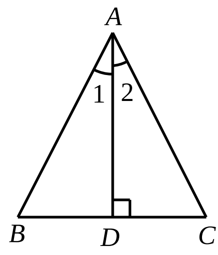


圖 3-35

推論 1　三個角都相等的三角形是等邊三角形。

推論 2　有一個角等於 60°的等腰三角形是等邊三角形。

【例 1】 求證：如果三角形一個外角的平分線平行於三角形的一邊，那麼這個三角形是等腰三角形。

已知：　$\angle 1 = \angle 2$ 、 $AD // BC$ (圖 3-36)。

求證：　$AB = AC$

分析：　要證明 $AB = AC$ ，可先證明 $\angle B = \angle C$ 。因為已知 $\angle 1 = \angle 2$ ，所以可以設法找出 $\angle B$ 、 $\angle C$ 與 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 的關係。

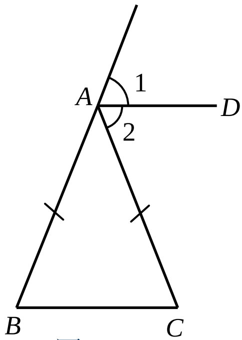


圖 3-36

證明：　$\because$　$AD // BC$　(已知)

$\therefore$　$\angle 1 = \angle B$

(兩直線平行，同位角相等)

$\angle 2 = \angle C$　(兩直線平行，內錯角相等)

$\because$　$\angle 1 = \angle 2$　(已知)

$\therefore$　$\angle B = \angle C$　(等量代換)

$\therefore$　$AB = AC$　(等角對等邊)

【例 2】 上午 8 時，一條船從 A 處出發以每小時 15 海浬的速度向正北航行，上午 10 時到達 B 處。從 A、B 處望燈塔 C，測得 $\angle NAC = 42°$ 、 $\angle NBC = 84°$ 。求從 B 處到燈塔 C 的距離 (圖 3-37)。

解

$\because$　$\angle NBC = \angle A + \angle C$

(三角形的一個外角等於不相鄰的兩個內角之和)

$\therefore$　$\angle C = 84° - 42° = 42°$

$\therefore$　$BA = BC$　(等角對等邊)

$\because$　$AB = 15 \times (10 - 8) = 30$

$\therefore$　$BC = 30$ (海浬)

答：B 處到燈塔 C 的距離是 30 海浬。

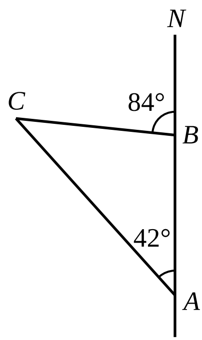


圖 3-37

【例 3】 **在一個三角形中，如果兩個角不等，那麼它們所對的邊也不等，大角所對的邊較大。(簡寫成「大角對大邊」)**

已知：　$\triangle ABC$ 中， $\angle ACB > \angle B$ (圖 3-38)。

求證：　$AB > AC$

證明：　在較大的 $\angle ACB$ 作 $\angle BCD = \angle B$，CD 交 AB 於 D。
連結 CD。

$\therefore$　$BD = DC$
(等角對等邊)

在△ADC 中，

$\because$　$AD + DC > AC$　(三角形的兩邊和大於第三邊)

$\therefore$　$AD + BD > AC$　(等量代換)

即　$AB > AC$

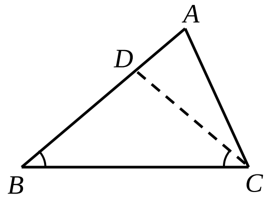
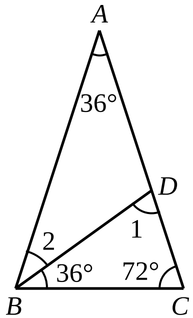


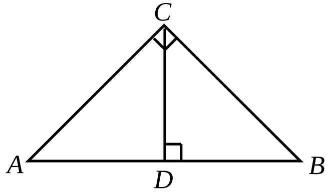
圖 3-38

練　習

1. (1) 如圖(甲)，已知 $\angle A = 36°$、$\angle DBC = 36°$、$\angle C = 72°$。計算 $\angle 1$ 與 $\angle 2$ 的度數，並說明圖中有哪些等腰三角形。
   (2) 如圖(乙)，CD 是等腰直角三角形斜邊上的高。找出圖中的等腰直角三角形。



(甲)



(乙)

(第 1 題)

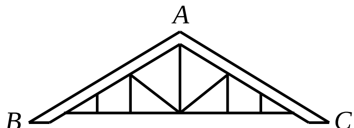
2. (口答)在△ABC 中，$\angle A = 70°$、$\angle B = 50°$，比較三邊的大小。

3. (口答)直角三角形的斜邊大於直角邊，即斜線段大於垂線段，為什麼？

4. (口答)在△ABC 中，如果 AB 最大，那麼 $\angle A$、$\angle B$ 一定是銳角。為什麼？

習　題　八

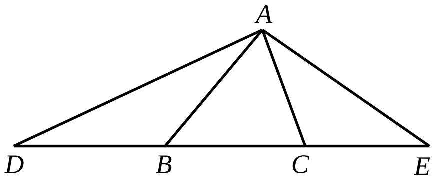
1. 已知屋椽 AB 與 AC 的長相等，它們的夾角是118°，計算屋椽與水平線 BC 所成的角之度數。



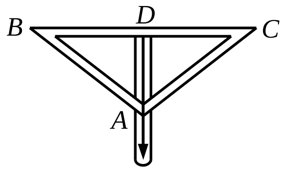
(第 1 題)

2. 已知等腰三角形的一個底角等於頂角之 4 倍，求這個等腰三角形各角的度數。

3. 已知$\triangle ABC$ 的 $\angle ABC = 50°$、$\angle ACB = 70°$。延長 CB 至點 D，使 $BD = BA$。延長 BC 至點 E，使 $CE = CA$，連結 AD、AE。求$\triangle ADE$ 的各角之度數。



(第 3 題)



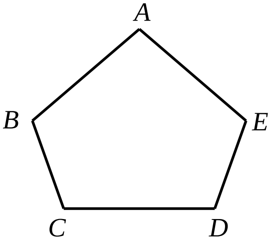
(第 4 題)

4. 如圖的三角測平架中，$AB = AC$，在 BC 的中點 D 掛一個重錘，自然下垂。調整架身，使點 A 恰好在重錘線上。
   (1) 求證：$AD \perp BC$；
   (2) 這時 BC 處於水平位置，為什麼？

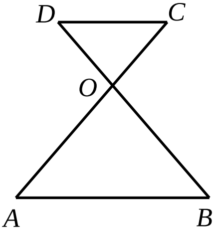
5. **已知**：　如圖，$AB = AE$、$BC = ED$、$\angle B = \angle E$。
   求證：　$\angle C = \angle D$

6. 求證：等腰三角形底邊中點到兩腰的距離相等。

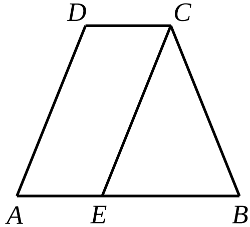
7. **已知**：　AC 與 BD 相交於點 O，$AB // DC$，$OA = OB$。
   求證：　$OC = OD$



(第 5 題)



(第 7 題)

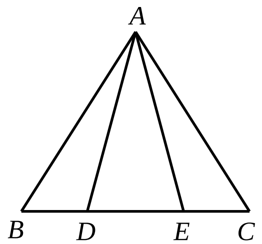


(第 8 題)

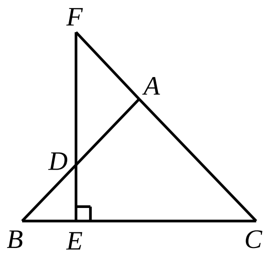
8. 已知：　如圖，$\angle A=\angle B$ 、 $CE \parallel DA$ 、CE 交 AB 於 E。
求證：　$CE=CB$

9. 求證：等腰三角形兩個底角的平分線之交點到底邊的兩端距離相等。

10. 已知：　如圖，點 D、E 在 BC 上，$\angle BAD=\angle CAE$、$\angle B=\angle C$
求證：　$AD=AE$



(第 10 題)

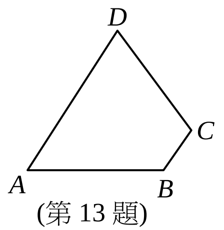


(第 11 題)

11. 已知：　$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$、D 是 AB 上一點、$DE\perp BC$ 、E 是垂足、ED 的延長線交 CA 的延長線於點 F。
求證：　$AD=AF$

12. (1)　在$\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ 、D 為 AC 上一點。
求證：　$\angle ADB>\angle ABD$ 。
(2)　在$\triangle ABC$ 中， $AB>AC$ 、AD 是高。
求證：　$\angle BAD>\angle CAD$ 。

13. 已知：　如圖，AD 邊最大、BC 邊最小。
求證：　$\angle B>\angle D$



(第 13 題)

14. 已知：　$\triangle ABC$ 中，$AC>AB$、D 是 BC 上一點。
求證：　$AC>AD$

15. 在$\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ 、D 是 BC 延長線上一點、E 是 AB 上一點、DE 交 AC 於點 F。
求證：　$AE<AF$ 。

四、基本作圖

3.10 尺規作圖與邊邊邊定理

以前，我們使用刻度尺、三角板、量角器與圓規等多種工具來畫圖。現在，我們來學習只用直尺(沒有刻度)與圓規畫圖的方法，這種方法簡稱**尺規作圖**。尺規作圖與邊邊邊定理有密切關係。下面我們來證明邊邊邊定理：有三個邊對應相等的兩個三角形全等。

已知： 在$\triangle ABC$與$\triangle A'B'C'$中，$AB = A'B'$、$BC = B'C'$、$CA = C'A'$ (圖 3-39)。

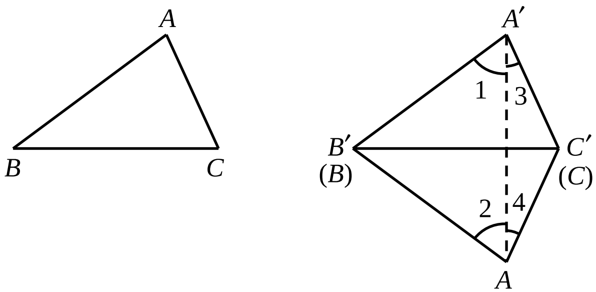


圖 3-39

求證： $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$。

證明： 如圖，把$\triangle ABC$拼在$\triangle A'B'C'$上，使最長的邊 BC 與$B'C'$重合，並且使點 A 與點 A' 在 $B'C'$ 邊的兩旁，連結 $A'A$。

$\because$ $AB = A'B'$、$AC = A'C'$ (已知)

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$、$\angle 3 = \angle 4$ (等邊對等角)

$\therefore$ $\angle B'A'C' = \angle BAC$ (等式性質)

在$\triangle ABC$與$\triangle A'B'C'$中

$$\begin{cases} AB = A'B' & \text{(已知)} \\ \angle BAC = \angle B'A'C' & \text{(已知)} \\ AC = A'C' & \text{(已知)} \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (SAS)

【例】 根據邊邊邊定理，用直尺與圓規作一個三角形與已知三角形全等。

已知： $\triangle ABC$ (圖 3-40)。

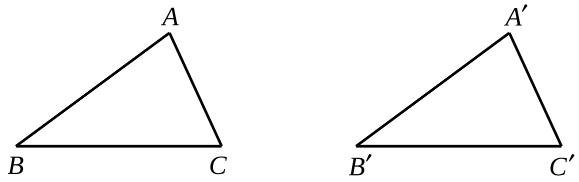


圖 3-40

求作： $\triangle A'B'C'$，使 $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$

作法：
1. 作 $B'C' = BC$。
2. 以點 B' 為圓心，AB 為半徑作弧。
3. 以點 C' 為圓心，AC 為半徑作弧，與前弧交於點 A'。
4. 連結 $A'B'$、$A'C'$。

$\triangle A'B'C'$ 就是所求的三角形。

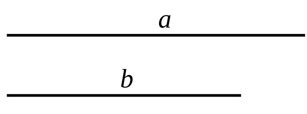
證明： 在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 中

$\because$ $A'B' = AB$、$B'C' = BC$、$C'A' = CA$ (作圖)

$\therefore$ $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$ (SSS)

練 習

用直尺與圓規作一個等腰三角形，使它的底邊與腰分別等於已知線段 a、b。



3.11 基本作圖

先介紹幾種最簡單最常用的尺規作圖，通常稱為**基本作圖**。其它較複雜的作圖，都是由基本作圖組成的。

1. 作一個角等於已知角

已知： $\angle AOB$ (圖 3-41)。

求作： $\angle A'O'B'$，使 $\angle A'O'B' = \angle AOB$。

作法： 1. 作射線 $O'A'$。

2. 以點 O 為圓心，以任意長為半徑作弧，交 OA 於 C、交 OB 於 D。

3. 以點 O' 為圓心，以 OC 長為半徑作弧，交 $O'A'$ 於 C'。

4. 以點 C' 為圓心，以 CD 長為半徑作弧，交前弧於 D'。

5. 經過點 D' 作射線 $O'B'$。

$\angle A'O'B'$ 就是所求的角。

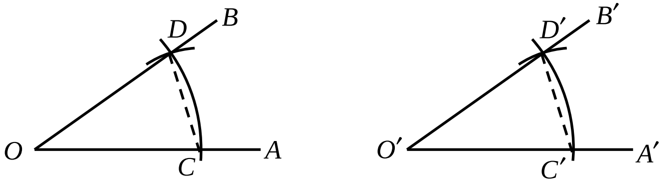


圖 3-41

證明： 連結 CD、$C'D'$。由作法可知

$\triangle C'O'D' \cong \triangle COD\,(SSS)$

$\therefore \quad \angle C'O'D' = \angle COD$ (全等三角形的對應角相等)

即 $\quad \angle A'O'B' \cong \angle AOB$

2. 平分已知角

已知： $\angle AOB$ (圖 3-42)。

求作： 作射線 OC，使 $\angle AOC = \angle BOC$。

作法： 1. 在 OA 與 OB 上分別截取 OD、OE，使 $OD = OE$

2. 分別以 D、E 為圓心，DE 的長為半徑作弧，在 $\angle AOB$ 內，兩弧交於點 C。

3. 作射線 OC。

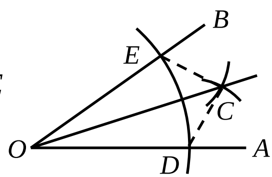


圖 3-42

OC 就是所求的角。

證明： 連結 CD、CE。由作法可知

$$\triangle ODC \cong \triangle OEC \quad (SSS)$$

$\therefore$ $\angle COD = \angle COE$

(全等三角形的對應角相等)

即 $\angle AOC = \angle BOC$

3. 經過一點作已知直線的垂線

(1) 經過已知直線上的一點作這條直線的垂線。

已知： 直線 AB 與 AB 上一點 C (圖 3-43)。

求作： AB 的垂線，使它經過點 C。

作法： 作平角 ACB 的平分線 CF。

直線 CF 就是所求的垂線。

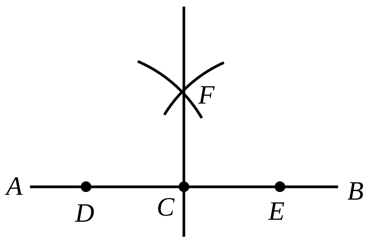


圖 3-43

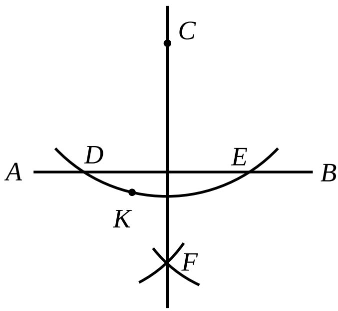


圖 3-44

證明： 由作法可知

$$\angle ACF = \angle BCF = \frac{1}{2}\angle ACB$$

$\because$ $\angle ACB = 180°$ (平角的定義)

$\therefore$ $\angle ACF = 90°$ (等量代換)

即 CF 是 AB 的垂線。

(2) 經過已知直線外的一點作這條直線的垂線。

已知： 直線 AB 與 AB 外一點 C (圖 3-44)。

求作： AB 的垂線，使它經過點 C。

作法： 1. 任意取一點 K，使 K 與 C 在 AB 的兩旁。

2. 以 C 為圓心，CK 長為半徑作弧，交 AB 於點 D 與 E。
3. 分別以 D 與 E 為圓心， DE 的長為半徑作弧，兩弧交於點 F。
4. 作直線 CF。

直線 CF 就是所求的垂線。

證明： 略。

4. 作線段的垂直平分線

已知： 線段 AB (圖 3-45)。

求作： 線段 AB 的垂直平分線。

作法：
1. 分別以 A、B 為圓心， AB 的長為半徑作弧，兩弧相交於點 C 與 D。
2. 作直線 CD。

直線 CD 就是線段 AB 的垂直平分線。

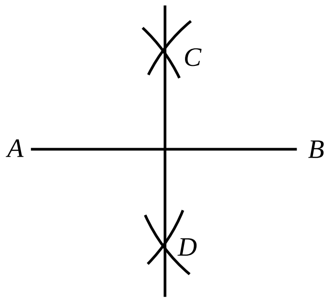


圖 3-45

證明： 略。

因為直線 CD 與線段 AB 的交點，就是 AB 的中點，所以我們也用這種方法平分已知線段或作線段的中點。

5. 經過已知直線外的一點作這條直線的平行線

已知： 直線 AB 與 AB 外一點 M (圖 3-46)。

求作： 直線 $CD \mathbin{/\mkern-6mu/} AB$ ，且 CD 經過點 M。

作法：
1. 過點 M 作直線 PN，交直線 AB 於 N。
2. 過點 M 作直線 CD，使同位角 $\angle PMD = \angle PNB$。

   直線 CD 就是所求的平行線。

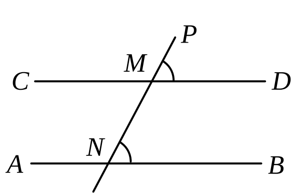


圖 3-46

證明： 由作法可知 $\angle PMD = \angle PNB$

$\therefore \quad CD // AB$ (同位角相等，兩直線平行)

練　習

用直尺與圓規作圖，並口述作法：

1. 作一個角等於 $45°$。
2. 把已知線段 4 等分。

利用基本作圖，可以進行其它作圖。

【例】　已知底邊 a、底邊上的高 h，求作等腰三角形。

已知：　線段 a、h (圖 3-47)。

求作：　$\triangle ABC$，使 $AB = AC$，且 $BC = a$、高 $AD = h$。

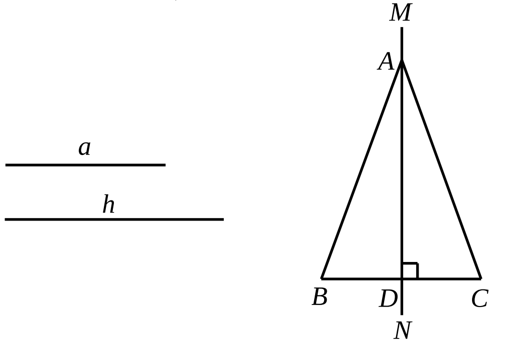


圖 3-47

作法：
1. 作線段 $BC = a$。
2. 作線段 BC 的垂直平分線 MN，MN 與 BC 交於點 D。
3. 在 MN 上截取 DA，使 $DA = h$。
4. 連結 AB、AC。

$\triangle ABC$ 為所求的等腰三角形。

證明：　由作圖可知，$\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (SAS)

$\therefore \quad AB = AC$ (全等三角形對應邊相等)

又 $\because \quad BC = a$、$AD \perp BC$、$AD = h$ (作圖)

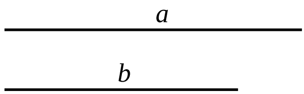
$\therefore \quad \triangle ABC$ 是所求的等腰三角形。

一般的幾何作圖題，應有下面幾個步驟：已知、求作、作法、

證明。比較複雜的問題，在作圖之前可先作分析。目前，我們只要求寫出已知、求作、作法三個步驟。

練　習

作一個直角三角形，使它的兩條直角邊分別等於線段 a、b。



習　題　九

1. 作一個角等於已知鈍角。
2. 已知鈍角三角形，用尺規作出它的
   (1) 三條角平分線；
   (2) 三條中線；
   (3) 三條高 (畫三個圖，不寫作法)。
3. 已知線段 AB，求作 AB 的中點 C。
4. 已知一腰與一底邊長，求作等腰三角形。
5. 已知一直角邊與與它相鄰的一個銳角，求作直角三角形。

五、直角三角形

3.12　直角三角形的性質

直角三角形也是一種常見的特殊三角形，它除了有一般三角形的性質外，還有一些特殊性質。

因為直角三角形有一個角是直角，根據三角形內角和定理可

推出下面的定理：

定理 1　在直角三角形中，兩個銳角互餘。

下面我們再來研究直角三角形另外一些性質。

在圖 3-48 中，從 $Rt\triangle$*ABC 的直角頂點 C，作射線 CD，交 AB 於 D，使 $\angle ACD=\angle A$。

我們看 CD 與斜邊 AB 的大小有什麼關係。

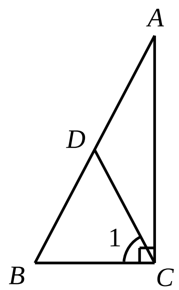


圖 3-48

$\because$　$\angle ACD=\angle A$

$\therefore$　$AD=CD$　　(等角對等邊)

又　$\because$　$\angle B+\angle A=90°$　　(直角三角形兩銳角互餘)

$\angle 1+\angle ACD=90°$

$\therefore$　$\angle B=\angle 1$

$\therefore$　$BD=CD$

於是得　$AD=BD=CD$

即 CD 是斜邊 AB 上的中線，並且 $CD=\dfrac{1}{2}AB$。

由此，我們得到下面的定理：

定理 2　在直角三角形中，斜邊上的中線等於斜邊的一半。

注意：從本節開始，在證明過程中，括號內的理由，可以只寫主要公理與定理，已知、定義等一般不再註明。

由定理 2 可知，在圖 3-48 中，$CD=BD$。如果 $\angle A=30°$，那麼，$\angle B=60°$，$\triangle DBC$ 是等邊三角形，所以 $BC=BD=\dfrac{1}{2}AB$。

由此，得到下面的推論：

推論 1　在直角三角形中，如果一個銳角等於 30°，那麼它所對的直角邊等於斜邊之一半。

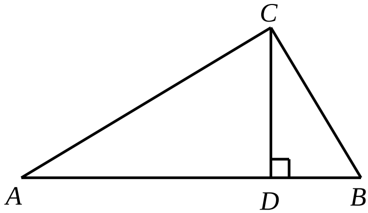
* 符號「$Rt\triangle$」表示直角三角形。

反過來，如果在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C = Rt\angle$、$BC = \frac{1}{2}AB$，那麼$\triangle BCD$ 是等邊三角形，$\angle B = 60°$。所以$\angle A = 30°$。於是，又有下面的推論：

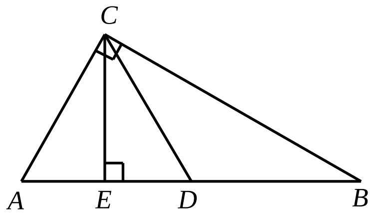
推論 2　在直角三角形中，如果一條直角邊等於斜邊的一半，那麼這條直角邊所對的角等於 30°。

練　習

1. 說出直角三角形有哪些重要性質。
2. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C = Rt\angle$，CD 是高，找出圖中相等的角。



(第 2 題)



(第 3 題)

3. $Rt\triangle ABC$ 中，CD 是斜邊上的中線，CE 是高。已知 AB = 10 cm、DE = 2.5 cm，求 CD 的長與$\angle DCE$ 的度數。

【例 1】圖 3-49 是屋架的設計圖之一部份，其中 AB = 7.4 m、D 是 AB 的中點，並且 DE、BC 都垂直於 AC。如果$\angle BAC = 30°$，DE、DC 與 BC 的長各是多少 m？

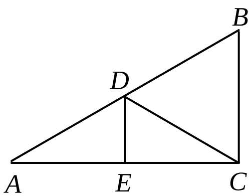


圖 3-49

$\boxed{解}$　在$\triangle ABC$ 中

$\because$　$BC \perp AC$、$\angle ACB = Rt\angle$、$\angle BAC = 30°$

$\therefore$　$BC = \frac{1}{2}AB$　(在直角三角形中，30° 角所對的邊等於斜邊的一半)

$\therefore$　$BC = \frac{1}{2} \times 7.4 = 3.7$ (m)

又　$\because$　D 是 AB 中點，CD 是中線

$\therefore$　$DC=\frac{1}{2}AB$　(在直角三角形中，斜邊上的中線等於斜邊之一半)

$\therefore$　$DC=\frac{1}{2}\times 7.4=3.7\,(\text{m})$

在$\triangle AED$ 中，同理可求得 $DE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{4}AB=1.85\,(\text{m})$。

答：DE、DC 與 BC 的長分別是 1.85 m、3.7 m、3.7 m。

【例 2】 已知：　在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=Rt\angle$、$AB=2AC$，CD、CE 分別是中線與高 (圖 3-50)。

求證：　$\angle ACE=\angle ECD=\angle DCB$。

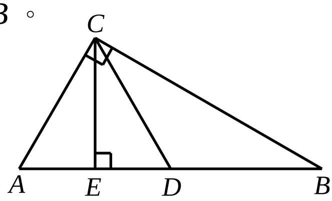


圖 3-50

證明：　在$\triangle ABC$ 中

$\because$　$\angle ACB=Rt\angle$

$AB=2AC$

$\therefore$　$\angle B=30^\circ$

(直角三角形中，如果一條直角邊等於斜邊的一半，那麼這條直角邊所對的角等於 30°)

又　$\because$　CD 是中線

$\therefore$　$CD=BD$　(直角三角形中，斜邊上的中線等於斜邊之一半)

$\therefore$　$\angle DCB=\angle B=30^\circ$　(等邊對等角)

在$\triangle ACD$ 中，

$\because$　$AC=\frac{1}{2}AB=CD$，CE 是高

$\therefore$　$\angle ACE=\angle DCE$　(等腰三角形底邊上的高與頂角平分線重合)

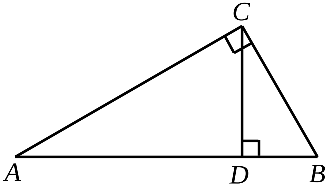
$\because$　$\angle ACE=\frac{1}{2}(90^\circ-\angle DCB)=\frac{1}{2}(90^\circ-30^\circ)$

$=30^\circ$

$\therefore$　$\angle ACE=\angle ECD=\angle DCB$

練 習

1. (口答) 已知$\triangle ABC$中，$\angle ACB = 90°$、CD是高、$\angle A = 30°$、$AB = 4$ cm，依次求BC、$\angle BCD$、BD、AD。



(第 1 題)

2. 一個人從山下沿$30°$的坡路登上山頂，共走了 500 m，求這座山的高度。

3.13 直角三角形全等的判定

要判定兩個直角三角形全等，除了可以應用一般三角形全等的判定公理與判定定理外，還有下面的判定定理。

斜邊、直角邊定理 **有斜邊與一條直角邊對應相等的兩個直角三角形全等 (**可以簡寫成「**斜邊、直角邊**」或「***RHS***」**)。**

已知： 在$\triangle ABC$與$\triangle A'B'C'$中，$\angle ACB = \angle A'C'B' = Rt\angle$、$AB = A'B'$、$AC = A'C'$ (圖 3-51)。

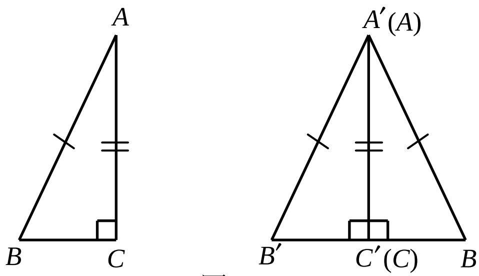


圖 3-51

求證： $Rt\triangle ABC \cong Rt\triangle A'B'C'$。

證明：　把$\triangle ABC$與$\triangle A'B'C'$拼在一起，使相等的直角邊 AC與$A'C'$重合，並使點B與點B'在$A'C'$邊的兩旁。

$\because\quad \angle A'C'B' = Rt\angle$、$\angle A'C'B = \angle ACB = Rt\angle$

$\therefore\quad \angle B'C'B = 2Rt\angle$

$\therefore\quad B'$、C'、B在同一條直線上

在$\triangle A'B'B$中

$\because\quad A'B' = AB = A'B$

$\therefore\quad \angle B = \angle B'$　　　　(等邊對等角)

在$\triangle ABC$與$\triangle A'B'C'$中，$\angle ACB = \angle A'C'B'$、$\angle B = \angle B'$、$AB = A'B'$

$\therefore\quad \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$　　　　(AAS)

這個定理的條件，實際上是已知兩邊與其中一邊的對角對應相等，前面我們已經想過，具備這樣條件的兩個三角形不一定全等。但是，如果這個角是個直角，那麼這兩個三角形就會全等了。

【例 1】已知：　$\triangle ABC$中，D是BC的中點，$DF \perp AB$、$DE \perp AC$，垂足分別是F、E，$DF = DE$ (圖 3-52)。

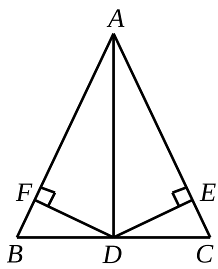


圖 3-52

求證：　$AB = AC$

證明：　$Rt\triangle DBF$與$Rt\triangle DCE$中，

$DB = DC$、$DF = DE$

$\therefore\quad Rt\triangle DBF \cong Rt\triangle DCE$　(RHS)

$\therefore\quad \angle B = \angle C$

$\therefore\quad AB = AC$　　　　(等角對等邊)

另證：　因$DB=DC$，$\triangle DBA$與$\triangle DCA$的面積相等，

即　$\frac{1}{2}AB \times DF = \frac{1}{2}AC \times DE$

因　$DF=DE$，故$AB=AC$。

【例 2】已知斜邊與一條直角邊，求作直角三角形。

已知：線段 c、a (圖 3-53)

求作：$Rt\triangle ABC$，使它的斜邊 $AB=c$、一條直角邊 $BC=a$

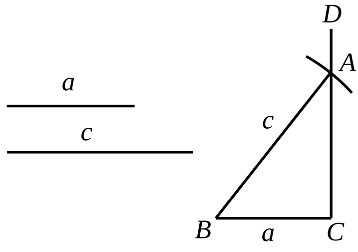


圖 3-53

作法：
1. 作線段 $BC=a$。
2. 過點 C 作直線 $CD\perp BC$。
3. 以 B 為圓心，c 為半徑作弧交 CD 於點 A
4. 連結 AB。

$\triangle ABC$ 就是所求的直角三角形。

證明：$\because$ $CD\perp BC$

$\therefore$ $\angle C=Rt\angle$

又 $AB=c$、$BC=a$

所以$\triangle ABC$ 為所求的三角形。

討論：因為 $Rt\triangle$中，斜邊一定要大於直角邊，所以 $c\le a$時，此題無解。

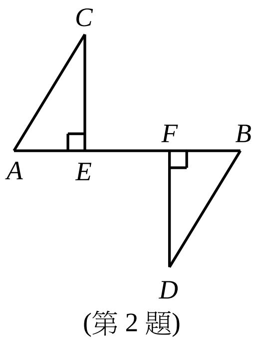
練 習

1. (1) 兩條直角邊對應相等的兩個直角三角形是否全等？為什麼？

   (2) 兩個銳角對應相等的兩個直角三角形是否全等？為什麼？

2. 已知：如圖，$CE\perp AB$、$DF\perp AB$、$AC\,//\,DB$，且 $AC=DB$

   求證：$CE=DF$。



(第 2 題)

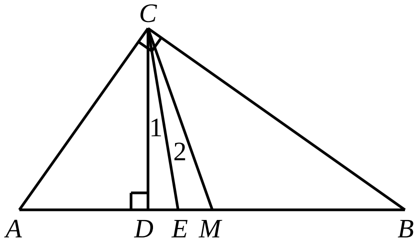
3. 求證：有兩條高相等的三角形是等腰三角形。

習 題 十

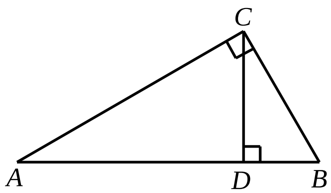
1. 求證： 如果三角形一邊上的中線等於這條邊之一半，那麼這個三角形是直角三角形。

2. 已知： 如圖，CD、CE、CM 分別是 $Rt\triangle ABC$ 斜邊上的高、角平分線與中線。

   求證： $\angle 1 = \angle 2$ 。



(第 2 題)



(第 4 題)

3. 三角形三個角的度數之比為 1：2：3，它的最大邊之長等於 16 cm，求最小邊的長。

4. 已知： $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$ 、CD 是高、$\angle A = 30°$ 。

   求證： $DB = \dfrac{1}{4}AB$ 。

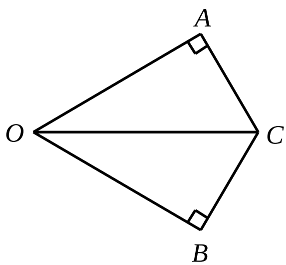
5. 等腰三角形的底角等於$15°$ ，腰長等於 $2a$ ，求腰上的高。

6. 已知直角三角形一條直角邊等於 10 cm，它所對的角為$60°$ 。求斜邊上的高。

7. 已知等腰三角形底邊上的高等於腰長之一半。求這個等腰三角形各角的度數。

8. 已知： 如圖，$OA = OB$ 、$AC \perp OA$ 、 $BC \perp OB$ 。

   求證： $\angle AOC = \angle BOC$

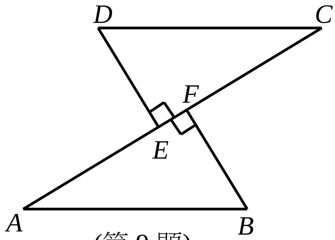


(第 8 題)

9. 已知： 如圖，$AB = CD$、$DE \perp AC$、$BF \perp AC$，E、F 是垂足，$DE = BF$。

求證： (1) $AE = CF$；

(2) $AB // CD$。



(第 9 題)

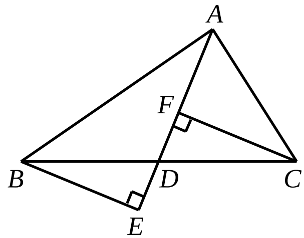
10. 已知： BE 與 CF 是△ABC 的高，$BE = CF$，H 是 BE 與 CF 的交點。

求證： $HB = HC$

11. 求證：有一條直角邊與斜邊上的高對應相等之兩個直角三角形全等。

12. 已知： 如圖，AD 是△ABC 的中線，$CF \perp AD$，交 AD 於 F、$BE \perp AD$，交 AD 的延長線於 E。

求證： $CF = BE$



(第 12 題)

六、逆定理、對稱

3.14 逆命題、逆定理

在等腰三角形一節裡，我們學過這樣兩個命題：(1)如果一個三角形是等腰三角形，那麼它的兩個底相等；(2)如果一個三角形有兩個角相等，那麼，它是一個等腰三角形。其中第一個命題的題設「等腰三角形」恰好是第二個命題的結論，第一個命題的結論「兩個底角相等」正好是第二個命題的題設。

在兩個命題中，如果第一個命題的題設是第二個命題的結論，而第一個命題的結論又是第二個命題的題設，那麼這兩個命題叫做**互逆命題**。如果把其中一個叫做**原命題**，那麼另一個叫做它的**逆命題**。

如果一個定理逆命題經過證明是真命題，那麼它也是一個定理，這兩個定理叫做**互逆定理**，其中一個叫做另一個的**逆定理**。

例如，上面提到的等腰三角形之兩個定理是互逆定理；直角三角形性質定理 2 的兩個推論也是互逆定理。

雖然每個命題都有逆命題，但要注意，因為一個真命題的逆命題不一定也是真命題，所以並不是所有的定理都有逆定理。例如，「對頂角相等」的逆命題是假命題，所以「對頂角相等」這個定理沒有逆定理。

練　習

1. (口答)說出下列命題的題設與結論，再說出它們的逆命題：
   (1)　兩條直線平行，內錯角相等；
   (2)　直角三角形的兩個銳角互為餘角；
   (3)　直角三角形的一個角是 $30°$，它所對的邊是斜邊之一半
   (4)　等邊三角形的每個角都等於 $60°$。
2. 舉例說明，下列定理沒有逆定理：
   (1)　如果 $a=b$，那麼 $a^2=b^2$；
   (2)　如果兩個角都是直角，那麼這兩個角相等；
   (3)　如果三角形有一個角是鈍角，則它的另外兩個角是銳角

3.15　線段的垂直平分線

設 MN 是線段 AB 的垂直平分線，點 P 是直線 MN 上任意一點(圖 3-54)。連結 PA、PB。

$\because$　$AC=BC$ 、 $PC=PC$ 、

　　$\angle PCA=\angle PCB=Rt\angle$

$\therefore$　$\triangle PCA\cong\triangle PCB$　　　(SAS)

$\therefore$　$PA=PB$

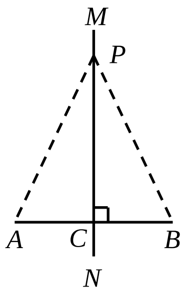


圖 3-54

因此，我們得到下面定理：

定理　　線段垂直平分線上的點與這條線段兩個端點的距離相等。

這個定理有逆定理：

逆定理　與一條線段兩個端點的距離相等之點，在這條線段的垂直平分線上。

已知：　$PA = PB$ (圖 3-55)。

求證：　點 P 在線段 AB 的垂直平分線上

證明：　經過點 P 作 $MN \perp AB$，垂足是 C

那麼

$\angle PCA = \angle PCB = Rt\angle$

在 $Rt\triangle PCA$ 與 $Rt\triangle PCB$ 中，

$PA = PB$ 、 $PC = PC$

$\therefore$ $Rt\triangle PCA \cong Rt\triangle PCB\,(RHS)$

$\therefore$ $AC = BC$

$\therefore$ MN 是線段 AB 的垂直平分線。就是說，點 P 在 AB 的垂直平分線上。

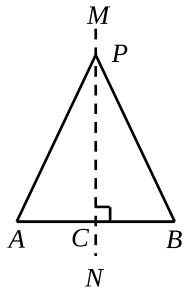


圖 3-55

根據上述定理與逆定理可以知道，在 AB 的垂直平分線 MN 上的點與兩點 A、B 的距離都相等；反過來，到兩點 A、B 的距離相等之點都在 MN 上，所以直線 MN 可以看作是與兩點 A、B 的距離相等之所有點之集合。

線段的垂直平分線可以看作是與線段兩個端點距離相等的所有點之集合。

【例】　求證：三角形三邊的垂直平分線交於一點。

已知：　MN、GH、PQ 分別是 $\triangle ABC$ 三邊 AB、BC、CA 的垂直平分線 (圖 3-56)。

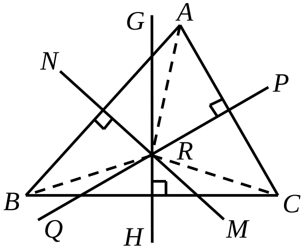


圖 3-56

求證：　MN、GH、PQ 交於一點。

分析：　我們知道，兩條相交直線只有一個交點。要證明三條直線交於一點，只要證明第三條直線通過前兩條直線的交點就可以了。

證明：　設 MN、PQ 交於點 R。連結 AR、BR、CR。

$\because$　MN 是 AB 的垂直平分線

$\therefore$　$AR = BR$ (線段垂直平分線上的點與這條線段兩個端點的距離相等)

同理 $AR = CR$

$\therefore$　$BR = CR$

$\therefore$　點 R 在 GH 上

(與一條線段的兩個端點距離相等的點，在這條線段垂直平分線上)

因此，MN、GH、PQ 交於一點。

練　習

1. 如圖，在直線 MN 上求作一點 P，使 $PA = PB$。

(第 1 題)

2. 已知：$\triangle ABC$。

   求作：一點 O，使 $OA = OB = OC$。

3.16　角平分線

仿照對線段垂直平分線的討論，我們可以得到下面的定理：

定理　**在角平分線上的點到這個角的兩邊之距離相等。**

已知：　OC 是 $\angle AOB$ 的平分線，點 P 在 OC 上，$PD \perp OA$、$PE \perp OB$，垂足分別是 D、E (圖 3-57)。

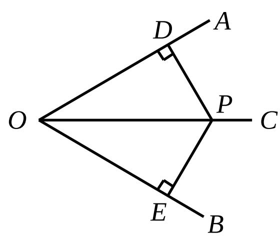


圖 3-57

求證：　$PD = PE$。

證明：　$\because$　$PD \perp OA$、$PE \perp OB$

$\therefore$　$\angle PDO = \angle PEO = Rt\angle$

在$\triangle PDO$與$\triangle PEO$中，$\angle PDO = \angle PEO$、

$\angle POD = \angle POE$、$OP = OP$

$\therefore$　$\triangle PDO \cong \triangle PEO$　(AAS)

$\therefore$　$PD = PE$

逆定理　到一個角的兩邊之距離相等的點，在這個角的平分線上。

已知：　$PD \perp OA$、$PE \perp OB$，垂足分別是D、E，$PD = PE$（圖 3-58）。

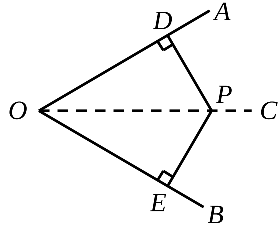


圖 3-58

求證：　點P在$\angle AOB$的平分線上

證明：　$\because$　$PD \perp OA$、$PE \perp OB$

$\therefore$　$\angle PDO = \angle PEO = Rt\angle$

在$Rt\triangle PDO$與$Rt\triangle PEO$中

$OP = OP$、$PD = PE$

$\therefore$　$Rt\triangle PDO \cong Rt\triangle PEO$　(RHS)

$\therefore$　$\angle POD = \angle POE$

$\therefore$　OC是$\angle AOB$的平分線

就是說，點P在$\angle AOB$的平分線上。

根據上述的定理與逆定理可以知道：**角平分線可以看作是到角的兩邊之距離相等的所有點之集合。**

【例】　求證：三角形三條角平分線交於一點

已知：　AM、BN、CP是$\triangle ABC$的三條平分線（圖 3-59）。

求證：　AM、BN、CP交於一點。

證明：　設AM、BN交於點R。過點R分別作邊BC、AC、AB的垂線，垂足分別為D、E、F。

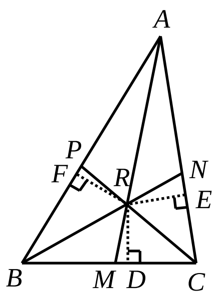


圖 3-59

$\because$ 點 R 在 AM 上

$\therefore$ $RE = RF$

(在角的平分線上之點
到這個角的兩邊之距離相等)

同理 $RD = RF$

$\therefore$ $RD = RE$

$\therefore$ 點 R 在 CP 上

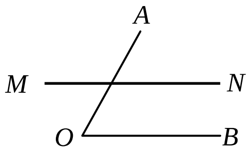
(到一個角的兩邊之距離相等的點,在這個
角的平分線上)

因此,AM、BN、CP 交於一點。

練 習

1. 如圖,在直線 MN 上求作一點 P,使 P 到射線 OA 與 OB 的距離相等。

2. 已知:$\triangle ABC$。
求作:一點 P,使 P 到 BC、CA、AB 的距離都相等。



(第 1 題)

3.17 軸對稱與軸對稱圖形

在日常生活裡,我們常見到下面一些圖形(圖 3-60),例如,畫出的雙手,天平的兩個秤盤等。如果把它們沿某一條直線翻摺過來,其中一個就與另一個重合。

圖 3-60

把一個圖形沿著某一條直線摺過來,如果它能夠與另一個圖形重合,那麼我們說這兩個圖形**關於這條直線對稱**,兩個圖形中的對應點叫做關於這條直線的**對稱點**,這條直線叫做**對稱軸**。例

如，在圖 3-61 中，$\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 關於直線 MN 對稱，點 A 與 A'、B 與 B'、C 與 C' 是關於直線 MN 的對稱點，直線 MN 是對稱軸。

因為兩個關於某直線對稱的圖形是可以互相重合的，所以它們一定全等。

下面，我們研究關於軸對稱的兩個圖形之性質。

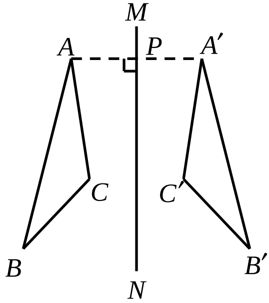


圖 3-61

根據定義，如果點 A 與點 A' 是關於直線 MN 的對稱點 (圖 3-61)，那麼沿 MN 摺過來，點 A 與點 A' 重合，於是

$$AP = PA' \text{、} \angle MPA = \angle MPA' = Rt\angle$$

也就是直線 MN 垂直平分線段 AA'。因此可得：

性質 1　如果兩個圖形關於某直線對稱，那麼對應點的連線被對稱軸垂直平分。

在圖 3-61 中，把兩個圖形沿對稱軸 MN 對摺後，直線 AB 與 $A'B'$ 能夠重合。如果直線 AB 與 MN 相交，那麼 $A'B'$ 也與 MN 相交於同一點。因此，又可以得到：

性質 2　兩個圖形關於某直線對稱，如果它們的對應線段或其延長線相交，那麼交點在對稱軸上。

性質 1 的逆命題：「如果兩個圖形的對應點連線被同一條直線垂直平分，那麼這兩個圖形關於這條直線對稱」也是成立的。我們有時用它判定兩個圖形是否對稱。

【例 1】 已知：　$\triangle ABC$ 與直線 MN (圖 3-62)。

求作：　$\triangle A'B'C'$，使 $\triangle A'B'C'$ 與 $\triangle ABC$ 關於 MN 對稱

作法：
1. 作 $BD \perp MN$，垂足是 D。延長 BD 到 B'，使 $DB' = DB$，得到點 B 的對稱點 B'。
2. 同法作點 C 的對稱點 C'。
3. 因為點 A 在對稱軸 MN 上，所以點 A 的對稱點 A' 與 A 重合。
4. 連結 $A'B'$、$B'C'$、$C'A'$。

$\triangle A'B'C'$ 就是所求的三角形。

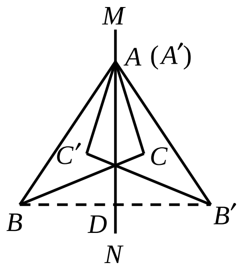


圖 3-62

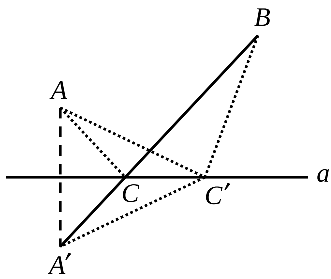


圖 3-63

【例 2】 如圖，在鐵路 a 的同側有兩個工廠 A、B，要在路邊建一個貨場 C，使 A、B 兩廠到貨場 C 的距離之和最小。在圖上作出點 C。

已知： 直線 a 與 a 的同側兩點 A、B (圖 3-63)。

求作： 點 C，使 C 在直線 a 上，並且 $AC+CB$ 最小。

作法： 1. 作點 A 關於直線 a 的對稱點 A'。
2. 連結 $A'B'$ 交 a 於點 C。
點 C 就是所求的點。

證明： 在直線 a 上另取一點 C'，連結 AC、AC'、$A'C'$、$C'B$。因為直線 a 是點 A、A' 的對稱軸，點 C 在對稱軸上

$\therefore \quad AC = A'C$ 、 $AC' = A'C'$

$\therefore \quad AC + CB = A'C + CB = A'B$

在 $\triangle A'C'B$ 中

$\because \quad A'B < A'C' + C'B$

$\therefore \quad AC + CB < A'C' + C'B$

即 $AC+CB$ 最小。

如果一個圖形沿一條直線對摺，直線兩旁的部分能夠互相重合，也就是圖形與它本身重合，那麼這個圖形叫做**軸對稱圖形**，這條直線就是它的對稱軸。例如，等腰三角形是一個軸對稱圖形，它的底邊之垂直平分線是它的對稱軸；角也是軸對稱圖形，對稱軸是角的平分線所在之直線；線段也是軸對稱圖形，對稱軸

是它的垂直平分線。日常生活中見到的軸對稱圖形也很多，如圖 3-64 中的圖形，都是軸對稱圖形。

圖 3-64

練　習

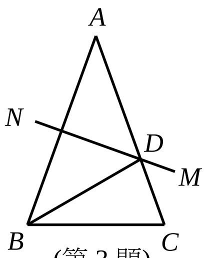
1. 如果 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，能否說 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 是對稱的？為什麼？
2. 已知 $\triangle ABC$。以邊 BC 所在的直線為對稱軸，作一個三角形與它對稱。
3. 為什麼等邊三角形是軸對稱圖形？畫出它的對稱軸。共有幾條對稱軸？

習　題　十　一

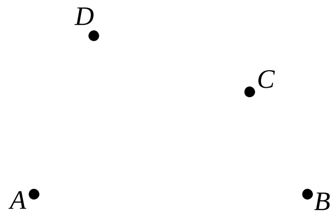
1. 寫出下列定理的逆命題，並判斷真假：
   (1)　如果 $a=b$，那麼 $|a|=|b|$；
   (2)　如果 $\angle 1$ 與 $\angle 2$ 是鄰補角，那麼 $\angle 1+\angle 2=180°$；
   (3)　等邊三角形的三個角都相等。

2. 已知：　MN 是線段 AB 的垂直平分線，C、D 是 MN 上的兩個點。
   求證：　$\angle CAD=\angle CBD$。

3. 如圖，已知 $AB=AC$、$\angle A=40°$，AB 的垂直平分線 MN 交 AC 於 D。求 $\angle DBC$ 的度數。



(第 3 題)

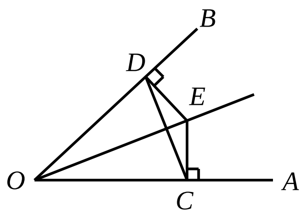


(第 4 題)

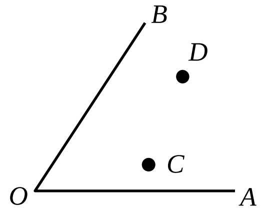
4. (1)　如圖，與兩點 A、C 等距的點在什麼線上？為什麼？
   (2)　與兩點 B、D 等距的點呢？
   (3)　求作一點 P，使 $PA=PC$、$PB=PD$。

5. 已知：　$\triangle ABC$ 中，$\angle C=Rt\angle$、$\angle A=30°$、BD 是角平分線，交 AC 於點 D。
   求證：　點 D 在 AB 的垂直平分線上。

6. 已知：　E 是 $\angle AOB$ 的平分線上一點，$EC\perp OA$、$ED\perp OB$，垂足分別是 C、D。
   求證：　(1)　$\angle ECD=\angle EDC$
   　　　　(2)　$OC=OD$；
   　　　　(3)　OE 是 CD 的垂直平分線。



(第 6 題)

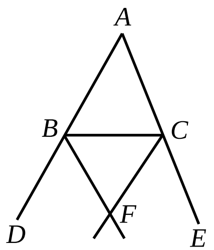


(第 7 題)

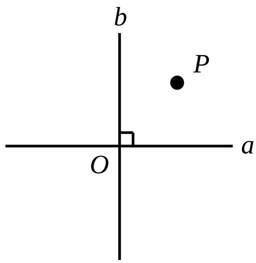
7. 如圖，求作一點 P，使 $PC = PD$ ，並且使 P 點到 $\angle AOB$ 的兩邊 OA、OB 的距離相等。

8. 已知： 如圖，在 $\triangle ABC$ 中，外角 $\angle CBD$ 與 $\angle BCE$ 的平分線 BF、CF 交於點 F。

   求證： 點 F 在 $\angle DAE$ 的平分線上。



(第 8 題)



(第 9 題)

9. 如圖，$a \perp b$ ，a、b 相交於點 O。點 P 為 a、b 外一點。

   求作： 點 P 關於 a、b 的對稱點，並證明各對稱點到點 O 的距離相等。

10. 已知： 對稱軸 MN 與線段 AB，

   (1) A 與 B 在 MN 的同旁；

   (2) A 與 B 在 MN 的兩旁；

   (3) A 在 MN 上，B 不在 MN 上。

   求作： AB 的對稱線段 $A'B'$ 。

小　結

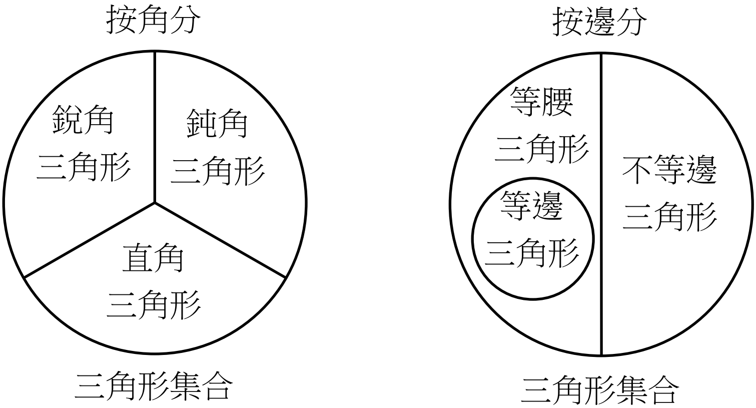
一、本章主要內容是有關三個角的一些知識，重點是三角形全等的判定與兩種特殊三角形—等腰三角形、直角三角形的性質。

二、三角形的邊、角有下面一些主要關係：

(1)　兩邊的和大於第三邊，兩邊的差小於第三邊。

(2)　內角的和等於180°。一個外角等於與它不相鄰的兩個內角之和，大於其中任何一個。

三角形可以按角或按邊分類如下：



三、判定兩個三角形全等有下面一些公理與定理：

一般三角形：*SAS*、*ASA*、*AAS*、*SSS*。

直角三角形：除 *SAS*、*ASA*、*AAS*、*SSS* 外，還有 *RHS*。

三角形全等的判定公理與定理，是進一步研究平面幾何問題的基礎。例如，利用三角形全等可以證明線段、角相等。

四、等腰三角形與直角三角形都是特殊三角形，除具有一般三角形的性質外，還有一些重要性質。

等腰三角形：

(1)　底角相等；

(2)　頂角的平分線、底邊上的高、中線互相重合。

直角三角形：

(1) 兩個銳角互餘；

(2) 斜邊上的中線等於斜邊的一半；

(3) 如果一個銳角等於30°，那麼它所對的直角邊等於斜邊的一半，而且逆命題也成立。

五、尺規作圖與工具作圖不同，只允許使用直尺(無刻度)與圓規。一些尺規作圖的作法，都是由基本作圖組成的。「邊邊邊」定理是基本作圖的主要根據。

六、關於某直線對稱，是對兩個圖形說的，它表示兩個之間的對稱關係；軸對稱圖形是對一個圖形說的，它表示某個圖形的特性。這兩個概念有聯繫，也有區別。

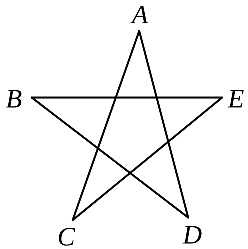
線段是軸對稱圖形。線段的垂直平分線是它的對稱軸。線段的垂直平分線上之點與這條線段的兩端距離相等。而且逆命題也成立。

角是軸對稱圖形。角的平分線所在之直線是它的對稱軸。在角的平分線上之點到這個角的兩邊之距離相等。而且逆命題也成立。

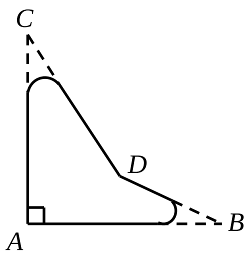
原命題是真命題，它的逆命題不一定也是真命題。如果原命題是真命題，逆命題也是真命題，那麼它們組成一對互逆定理。

複習參考題三

1. 已知：　O 是△ABC 內一點。
   求證：　(1)　$\angle BOC > \angle A$；
   　　　　(2)　$\frac{1}{2}(BC+CA+AB) < OA+OB+OC$
2. 已知：　△ABC 的 $\angle B$ 與 $\angle C$ 的平分線 BE、CF 交於點 I。
   求證：　(1)　$\angle BIC = 180° - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$；
   　　　　(2)　$\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$
3. 有星形如圖，求證：$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180°$。



(第 3 題)



(第 4 題)

4. 一個零件的形狀如圖，按規定 $\angle A$ 應等於 $90°$，$\angle B$、$\angle C$ 應分別是 $21°$ 與 $32°$。檢驗工人量得 $\angle BDC = 148°$，就斷定這個零件不合格，這是為什麼呢？
5. 求證：如果延長△ABC 的中線 AD 至 A'，使 $DA' = AD$，那麼 $A'C = AB$。
6. 求證：全等三角形對應邊上的中線相等。
7. 求證：三角形一條邊的兩端到這邊上的中線或中線延長線的距離相等。
8. 求證：如果兩個三角形有兩個角與第三個角的角平分線對應相等，那麼這兩個三角形全等。

9. (1) 在$\angle AOB$的 OA 邊上取兩點 P 與 S，再在 OB 邊上取兩點 Q 與 T，使$OQ=OP$ 、 $OT=OS$ ，PT 與 QS 相交於點 X。求證：OX 平分 $\angle AOB$ ；

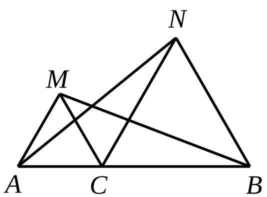
(2) 根據(1)，設計一種作已知角的平分線之方法。

10. 已知： 如圖，點 C 為線段 AB 上一點，$\triangle ACM$、$\triangle CBN$ 是等邊三角形。

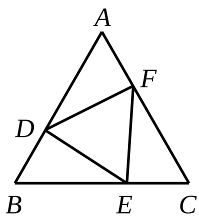
求證： $AN=BM$ 。

11. 在等邊三角形 ABC 的三邊上，分別取 D、E、F，使 $AD=BE=CF$ 。

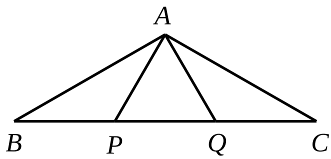
求證： $\triangle DEF$ 是等邊三角形。



(第 10 題)



(第 11 題)



(第 13 題)

12. 已知： $\triangle ABC$ 中，I 是角平分線 BE 與 CF 的交點，MN 經過 I，平行於 BC，交 AB 於點 M、交 AC 於點 N。

求證： $MN=BM+CN$ 。

13. 已知 P、Q 是$\triangle ABC$ 的邊 BC 上兩點，並且 $BP=PQ=QC=AP=AQ$ ，求$\angle BAC$的大小。

14. 求證：如果把等腰三角形的底邊向兩方向分別延長相等線段，那麼沿長線段的兩個外端與等腰三角形之頂點距離相等。

15. 已知： AB 是等腰直角三角形 ABC 的斜邊，AD 是$\angle A$的平分線。

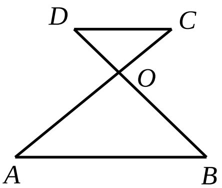
求證： $AC+CD=AB$ 。

16. 已知： $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，E 是 AB 上一點、F 是 AC 延長線上一點， $BE=CF$ ，EF 交 BC 於 D。

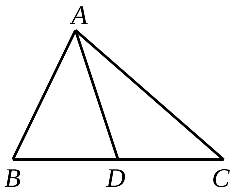
求證： $DE=DF$ 。

17. 已知： $DC // AB$ ，O 是 AC 與 BD 的交點，$OA < OB$ 。
求證： $OC < OD$ 。

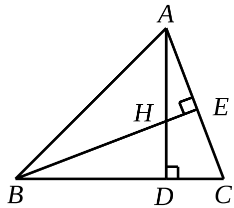
18. 已知： AD 是$\triangle ABC$ 的中線，$\angle BAD > \angle DAC$ 。
求證： $AC > AB$ 。
(提示：延長 AD 到 A'，使 $DA' = AD$ ，連結 BA' ，先證明 $\triangle ADC \cong \triangle A'DB$)



(第 17 題)



(第 18 題)



(第 19 題)

19. 已知： $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC = 45°$，H 是高 AD 與 BE 的交點。
求證： $BH = AC$ 。

20. 求證：等腰三角形腰上的高與底邊的夾角等於頂角之一半。

21. 已知： $\triangle ABC$ 中，BE、CF 是高，M 是 BC 的中點，N 是 EF 的中點。
求證： (1) $ME = MF$ ； (2) $MN \perp EF$ 。

22. 已知： $\triangle ABC$ 中，AD 是 BC 上的高， $AB = AC = 2AD$ ，$DE \perp AB$ ， $DF \perp AC$ ，垂足分別是 E、F。
求證： $DE + DF = \dfrac{1}{2}BC$ 。

23. 求證：兩個銳角三角形有兩邊與其中一邊上的高對應相等，那麼這兩個三角形全等。

24. 求作等腰直角三角形，使它的斜邊等於已知線段。

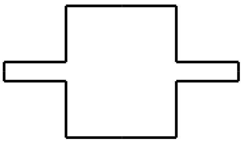
25. 寫出下列定理的逆命題，並且說明它們是不是真命題：
(1) 如果 $a = 2$ ，那麼 $a^2 = 4$ ；
(2) 如果一個整數的個位數碼是 5，那麼這個數能被 5 整除；
(3) 如果兩個三角形全等，那麼它們的對應角相等。

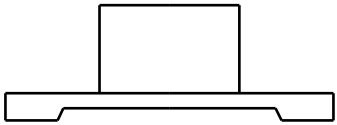
26. 已知：　△ABC 中，$AB = AC$，AD 是 BC 邊上的中線，AB 的垂直平分線交 AD 於點 O，$\angle B$ 的平分線交 AD 於點 I。

求證：　(1)　$OA = OB = OC$；

(2)　I 到 BC、CA、AB 的距離相等。

27. 下列圖形，如果有對稱軸，作出它們的對稱軸：


甲


乙

(第 27 題)

◆ 一個學生剛學始學習幾何，就問歐幾里得學了幾何之後可以得到什麼。歐幾里得喚來他的僕人說：

給他三枚錢幣，因為他想在學習中獲取實利！

... someone who had begun to learn geometry with Euclid, when he had learnt the first theorem, asked Euclid "What shall I get by learning these things?" Euclid called his slave and said ***"Give him three pence since he must make gain out of what he learns".***