第五章　面積、勾股定理

一、面積

5.1　面積概念與公理

在小學裡我們學習過一些面積的計算。在日常生活與生產中，會經常遇到面積的問題，例如，計算土地的面積、住房的面積、各種物體的表面積等。這些問題都與各種多邊形的面積有關，因此，我們須要進一步研究多邊形的面積。

多邊形的**面積**，就是它所圍的平面部分之大小。大小是用數來表示的，要表示一個多邊形的面積，與度量線段時一樣，必須取一個單位，然後看這個多邊形所圍平面部分是單位的多少倍，這個倍數就是面積的數值。面積的單位，通常是取邊長為單位長度的正方形。例如，邊長為 1 cm、1 m 的正方形，圖 5-1 表示一個直角梯形所圍平面部分是單位的 24 倍，因而這個梯形的面積就是 24 個面積單位。

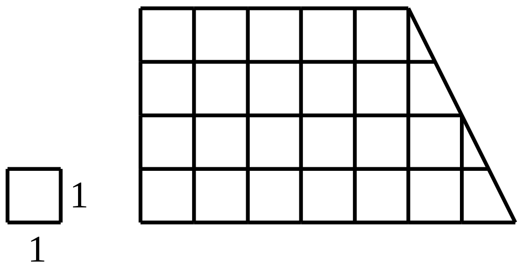


圖 5-1

很明顯，圖形的面積有下面之性質：

(1)　兩個圖形全等，它們的面積相等；

(2)　一個圖形的面積，等於它的各部分面積之總和。

我們必須注意，兩個面積相等的圖形，它們不一定全等。例如圖 5-2 中的矩形與平行四邊形，都是由兩個全等的直角三角形組成的，顯然它們的面積相等，但它們並不全等。

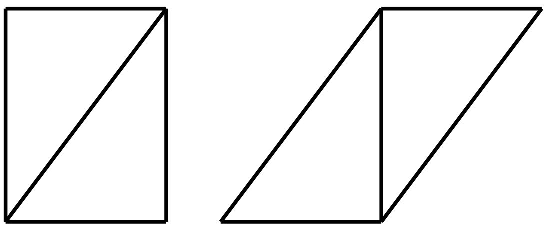


圖 5-2

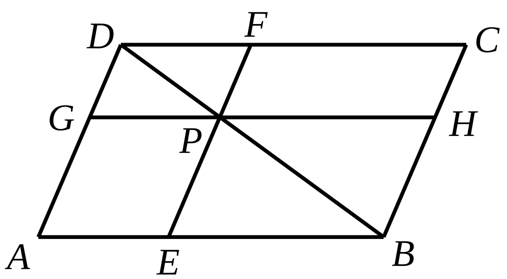


圖 5-3

圖形的面積用 S 表示，例如圖形 F 的面積，記作 $S_{圖形F}$ 。

【例】　已知：　如圖 5-3，▱$ABCD$ 中，$EF // AD$、$GH // AB$，EF 與 GH 交 BD 上一點 P。

　　　　求證：　$S_{▱AEPG} = S_{▱PHCF}$

　　　　證明：　$\because$　BD 是 ▱$ABCD$ 的對角線

　　　　　　　　$\therefore$　$\triangle ABD \cong \triangle CDB$

　　　　　　　　同理 $\triangle EBP \cong \triangle HPB$、$\triangle GPD \cong \triangle FDP$

　　　　　　　　$\therefore$　$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CDB}$、$S_{\triangle EBP} = S_{\triangle HPB}$、

　　　　　　　　　　$S_{\triangle GPD} = S_{\triangle FDP}$

　　　　　　又 $\because$　$S_{▱AEPG} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle EBP} - S_{\triangle GPD}$

　　　　　　　　　　$S_{▱PHCF} = S_{\triangle CDB} - S_{\triangle HPB} - S_{\triangle FDP}$

　　　　　　　　$\therefore$　$S_{▱AEPG} = S_{▱PHCF}$

多邊形面積的計算，都是以矩形的面積為基礎的。為了計算各種多邊形的面積，我們先觀察矩形的面積。

當矩形的長與寬都是整數時，容易看出，它的面積等於長與寬之積。例如圖 5-4 中的矩形，它的長、寬分別是 5 單位、3 單位，面積等於 $5 \times 3 = 15$ 平方單位。

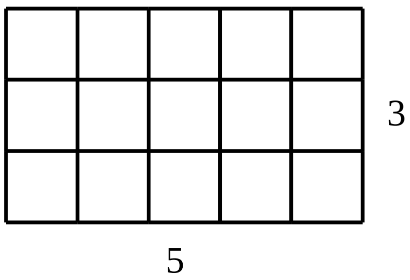


圖 5-4

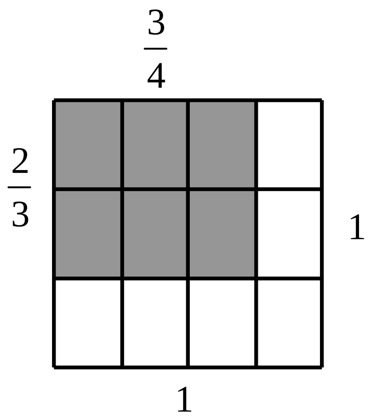


圖 5-5

當矩形的長與寬是分數時，它的面積也等於長與寬之積。例如，圖 5-5 中的矩形(陰影部分)，它的長、寬分別是 $\frac{2}{3}$ 單位、$\frac{3}{4}$ 單位，面積等於 $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12}$ 平方單位，即單位面積的 $\frac{1}{2}$。

對於長與寬為任意實數的矩形，也有長、寬相乘等於面積這樣的事實，我們把這個事實當作公理。

公理　　矩形的面積等於它的長 a 與寬 b 之積。

$$\boxed{S_{\text{矩形}} = a \cdot b}$$

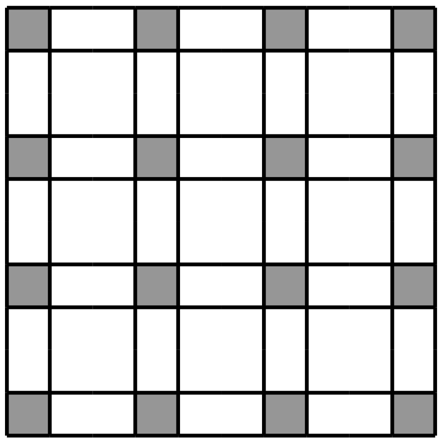
從這個公理可以直接得出下面的推論：

推論　　正方形的面積等於它的邊長 a 之平方。

$$\boxed{S_{\text{正方形}} = a^2}$$

練　習

1. 正方形的對角線長是 10 cm，求連結這個正方形各邊中點所成正方形的面積。
2. 如圖，用邊長為 20 cm、10 cm 的兩種正方形磁磚與長寬分別為 20 cm、10 cm 的矩形磁磚鑲嵌地板，鑲嵌 1 m^2 各需多少塊磁磚？
3. 矩形的長寬分別是 10 cm 與 6 cm，求連結這個矩形各邊中點所成菱形的面積。



(第 2 題)

5.2　平行四邊形、三角形、梯形的面積

1.　平行四邊形的面積

已知 ▱$ABCD$，從一個頂點 B 作邊 CD 的垂線 BE，垂足為 E，以 AB、BE 為鄰邊作矩形 $ABEF$ (圖 5-6)。

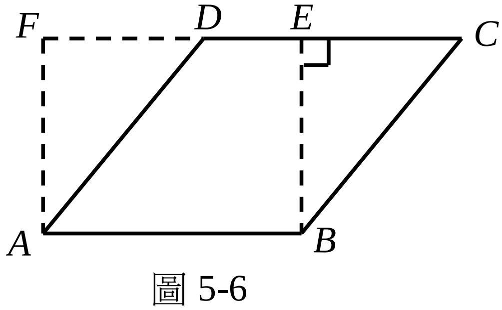


圖 5-6

∵　$\triangle ADF \cong \triangle BCE$ (為什麼？)

∴　$S_{\square ABCD} = S_{\text{矩形}ABEF}$

∴　$S_{\square ABCD} = AB \bullet BE$

我們把平行四邊形的一條邊叫做它的**底**，這條邊與對邊的距離叫做它這個底上的**高**。於是得到下面的定理：

定理　　平行四邊形的面積等於它的底 a 與高 h 之積。

$$\boxed{S_{\text{平行四邊形}} = a \bullet h}$$

推論　　等底等高的平行四邊形之面積相等。

例如，在圖 5-7 中，$S_{\square ABCD} = S_{\square ABEF}$

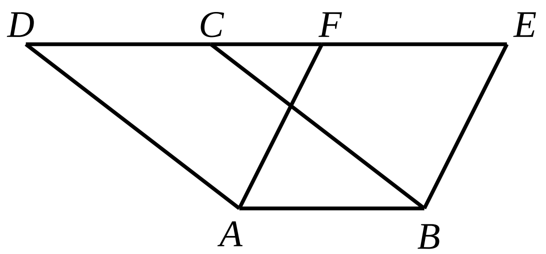


圖 5-7

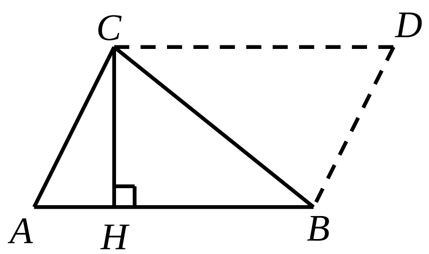


圖 5-10

2.　**三角形的面積**

已知$\triangle ABC$，CH 是高。以 AB、AC 為鄰邊作$\square ABCD$，BC 是對角線(圖 5-8)。

∵　$\triangle ABC \cong \triangle DCB$

∴　$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD}$

∵　$\triangle ABC$ 與$\square ABCD$的底與高相同，由平行四邊形面積定理，得

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD} = \frac{1}{2} AB \bullet CH$$

由此我們得到下面定理：

定理　　三角形的面積等於它的底 a 與高 h 之積的一半。

$$\boxed{S_{\text{三角形}} = \frac{1}{2} a \bullet h}$$

推論 1　等底等高的三角形之面積相等。

例如，在圖 5-9 中， $AB // EC$ ，有 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ABE}$ 。

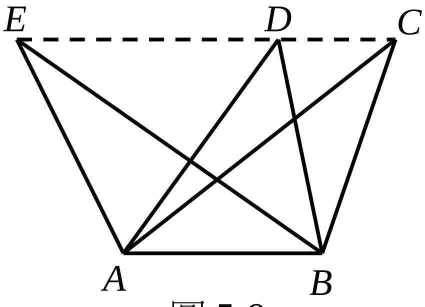


圖 5-9

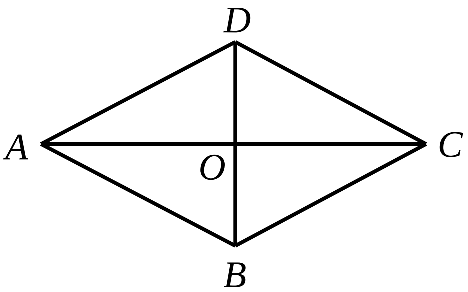


圖 5-10

如圖 5-10，菱形 *ABCD* 被對角線 *AC*、*BD* 分成四個全等的直角三角形。它們的底與高都分別是兩條對角線之一半，利用三角形的面積可得：

推論 2　菱形的面積等於它的兩條對角線之積的一半。

3. 梯形的面積

已知梯形 *ABCD*，高為 *DH*(圖 5-11)。作對角線 *BD* 把梯形分為兩個三角形 *ABD*、*BCD*。顯然，這兩個三角形的高都等於 *DH*。於是由三角形面積定理得

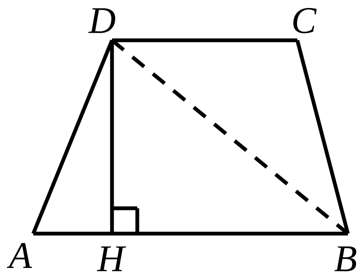


圖 5-11

定理　梯形的面積等於它的兩底 a、b 的和與高 h 之積的一半。

$$\boxed{S_{梯形} = \frac{1}{2}(a+b)h}$$

推論　梯形面積等於它的中位線長與高之積。

由於任意多邊形都可以看作是若干個平行四邊形、三角形、梯形組成的，而平行四邊形、三角形、梯形的面積都可以計算，所以任何多邊形的面積，都可以變為這些圖形的面積和或差來計算。

【例 1】如圖 5-12，有一塊土地 $ABCD$，頂點 B、C 到一條長邊 AD 的垂線段為 BN、CQ，已測得 BN、CQ、AQ、ND 的長。將這塊土地的面積用這些條件表示出來。

解　在多邊形 $ABCD$ 中，垂線段 BN、CQ 將多邊形 $ABCD$ 分為三角形與梯形，所以

$$\begin{aligned} S_{多邊形ABCD} &= S_{\triangle ABN} + S_{梯形BCQN} + S_{\triangle CDQ} \\ &= \frac{1}{2} AN \bullet BN + \frac{1}{2}(BN + CQ) \bullet NQ + \frac{1}{2} QD \bullet CQ \\ &= \frac{1}{2} BN \bullet (AN + NQ) + \frac{1}{2} CQ \bullet (NQ + QD) \\ &= \frac{1}{2}(BN \bullet AQ + CQ \bullet ND) \end{aligned}$$

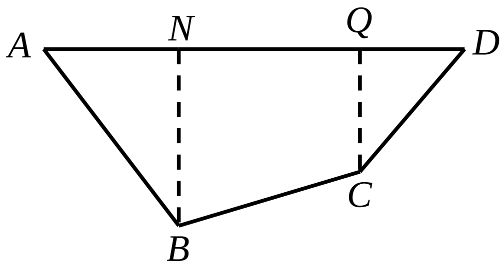


圖 5-12

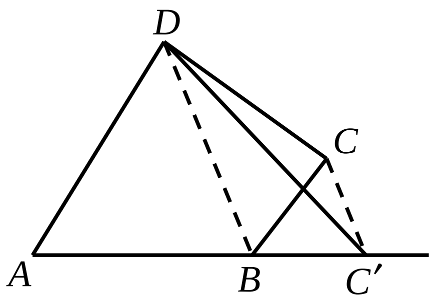


圖 5-13

【例 2】將四邊形 $ABCD$ 變為面積相等的三角形。

已知：　四邊形 $ABCD$ (圖 5-13)。

求作：　一個三角形與四邊形 $ABCD$ 面積相等。

分析：　從點 D 引對角線把四邊形分成兩個三角形，如果能把其中一個三角形變為與它面積相等的三角形，並且有一邊在另一個三角形的一邊之延長線上，問題就解決了。

作法：
1. 連結對角線 DB。
2. 過頂點 C 作 CC' 平行於 DB，與 AB 的延長線交於點 C'。
3. 連結 DC'。

$\triangle ADC'$ 就是所求的三角形。

證明：　根據等底等高的三角形面積相等，按作法

$\because \quad CC' \,//\, BD$

$\therefore \quad S_{\triangle BDC} = S_{\triangle BDC'}$

(等底等高的三角形之面積相等)

$\because \quad S_{四邊形ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BDC}$

$\therefore \quad S_{四邊形ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BDC'} = S_{\triangle ADC'}$

練　習

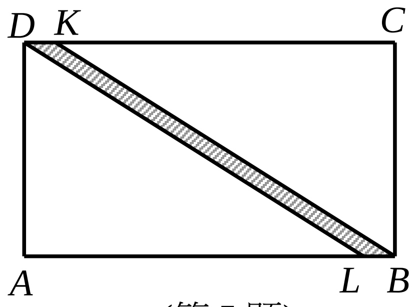
1. 求證：平行四邊形的兩條對角線把它分成四個面積相等的三角形。
2. $\triangle ABE$ 與矩形 $ABCD$ 有公共邊 AB，頂點 E 在矩形的邊 CD 或其延長線上。求證：$S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} S_{矩形ABCD}$ 。
3. 一個等腰梯形的下底長 18 cm、高 $4\sqrt{3}$ cm、腰長 8 cm，腰與下底成 60° 角，求它的面積。
4. 連結三角形各邊中點所成的三角形之面積，是原三角形面積的幾分之幾？

習　題　十　七

1. 一塊地的面積是 10 公頃，分別用下列面積單位表示出這塊地的面積。（註：1 公頃 = 100 公畝 = 10000 m^2）
   (1)　m^2；　　　　(2)　km^2。
2. 有長為 5.4 m、寬為 4.2 m 的一間房子。窗戶長為 1.2 m、寬為 1.6 m。如果照明標準是進光面積為室內地面面積的 20%，問窗戶是否合乎標準？
3. 平行四邊形的底增為原來之 2 倍，高變為原來的 $\frac{1}{2}$ ，它的面積有何變化？為什麼？

4. 正方形的邊長為 12 cm，與它面積相等的矩形之其中一邊長為 18 cm，求矩形的另一邊長。

5. 一條路穿過矩形地面 $ABCD$，已知 AB = 125 m、BC = 72.5 m、$AL = CK$ = 114.6 m，計算這塊地內路面 $BKDL$ 的面積。



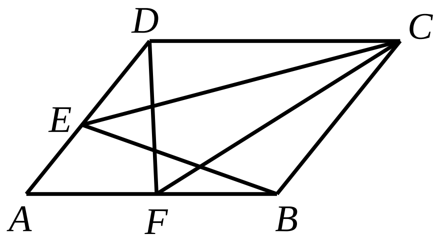
(第 5 題)

6. 順次連結任意四邊形各邊中點所成的四邊形之面積，是原四邊形面積的幾分之幾？

7. 平行四邊形內任意一點與它的各頂點連線，將四邊形分成四個三角形。求證：相對兩個三角形面積的和等於另兩個三角形面積的和。

8. 一個菱形的兩條對角線長之比是 2：3，面積是 12 cm^2，求對角線長。

9. E、F 分別是▱$ABCD$ 的邊 AD、AB 上的點。求證：△EBC 與△FCD 的面積相等。



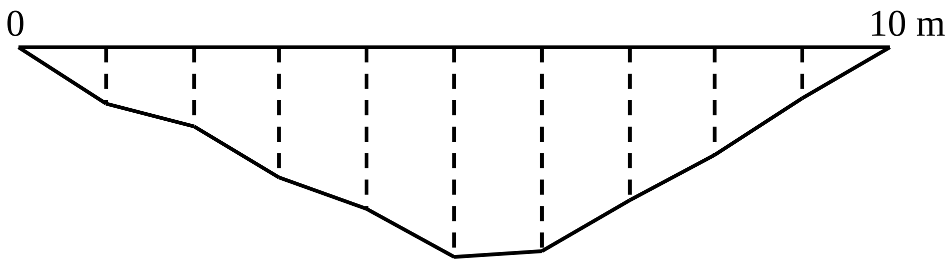
(第 9 題)

10. 在梯形 $ABCD$ 中，已知 $AD \parallel BC$，AC 與 BD 交於點 O。求證：△OAB 與△OCD 的面積相等。

11. 把一個梯形變為一個與它等高、等面積的三角形，並使三角形的一條邊與梯形之底在同一直線上。

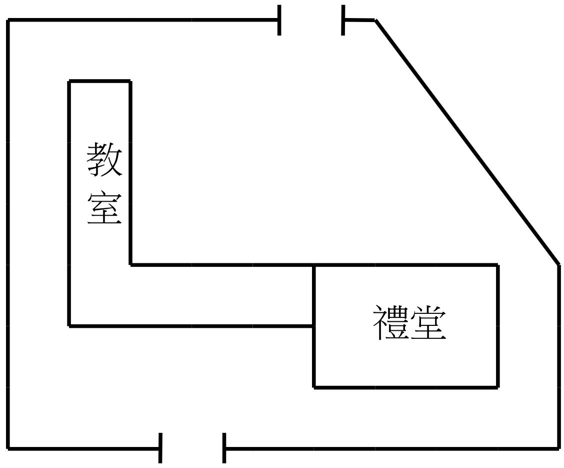
12. 河流的一個橫斷面如圖，根據下表中的測量數據計算它的面積。

離河一岸的距離(m)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
水深(m)	0.00	0.65	0.90	1.50	1.85	2.40	2.35	1.75	1.25	0.60	0.00



(第 12 題)

13. 學校的平面圖如圖，計算教室與禮堂佔地約各佔總面積的幾分之幾 (圖中長度是原長的$\dfrac{1}{10000}$)。



(第 13 題)

二、勾股定理

5.3 勾股定理

如圖 5-14，我們把兩個全等的正方形，用對角線分成四個全等的等腰直角三角形，然後把它們拼成一個正方形。這個正方形的邊，恰好是以前兩個正方形的邊為腰之等腰直角三角形的斜邊。因此，等腰直角三角形兩腰上的正方形面積之和，等於斜邊上正方形的面積。我們可以證明，對於一般的直角三角形也有這種關係(圖 5-15)。由於正方形的面積等於它的一邊之平方，這種關係可寫成下面定理：

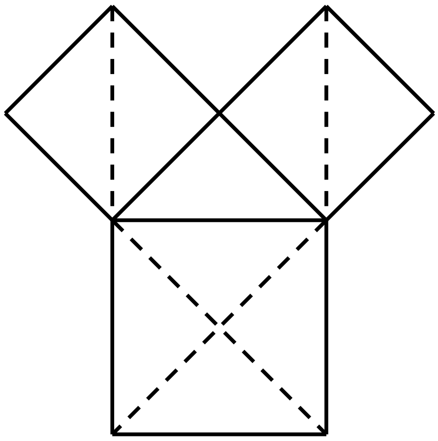


圖 5-14

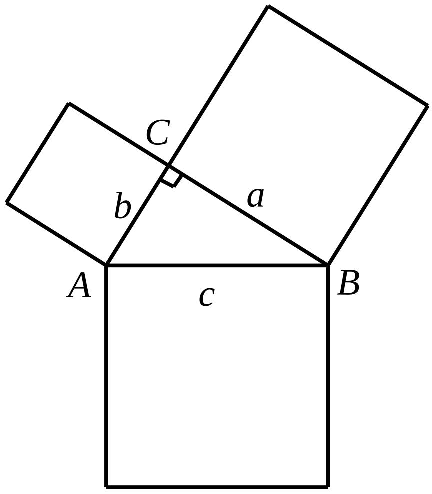


圖 5-15

定理　　直角三角形兩直角邊 a、b 的平方和，等於斜邊 c 的平方。

$$\boxed{a^2+b^2=c^2}$$

已知：　$Rt\triangle ABC$ 中，$AB=c$、$BC=a$、$CA=b$(圖 5-16 甲)

求證：　$a^2+b^2=c^2$

證明：　如圖 5-16 乙那樣，取四個與 $Rt\triangle ABC$ 全等的三角形，放在邊長為 $a+b$ 的正方形內，得到邊長分別為 a、b 的正方形 I、II。

再將同樣的四個直角三角形，如圖 5-16 丙那樣放在邊長為 $a+b$ 的正方形內，這時，得到的四邊形 III 也是正方形，並且邊長等於 $\triangle ABC$ 的斜邊。

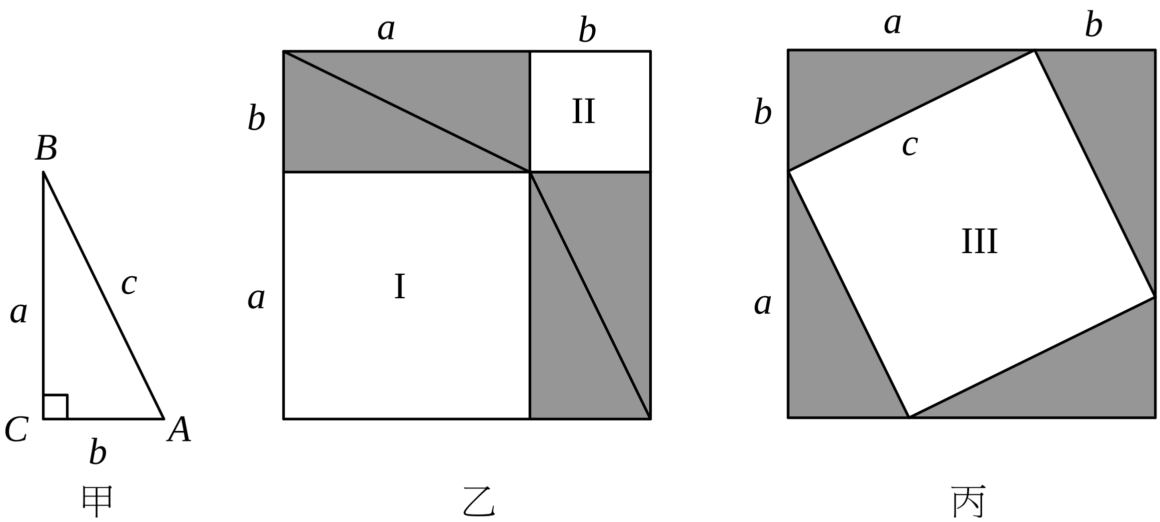


圖 5-16

比較乙、丙兩個圖形，正方形 I、II 的面積之和 a^2+b^2 與正方形 III 的面積 c^2 都是同一正方形面積與 4 倍 $\triangle ABC$ 面積的差，所以

$$a^2+b^2=c^2 \text{。}$$

這個定理的逆命題也成立：

逆定理　如果三角形的三邊長 a、b、c 有下面關係：

$$\boldsymbol{a^2+b^2=c^2}$$

那麼這個三角形是直角三角形。

已知：　在$\triangle ABC$中，$AB=c$、$BC=a$、$CA=b$，並且 $a^2+b^2=c^2$ (圖 5-17)

求證：　$\angle C=Rt\angle$

證明：　作 $\triangle A'B'C'$，使 $\angle C'=Rt\angle$、$B'C'=a$、$C'A'=b$，那麼 $A'B'^2=a^2+b^2$。

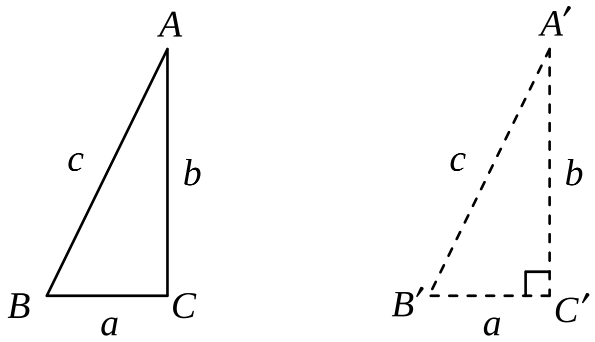


圖 5-17

$\because$　$a^2+b^2=c^2$

$\therefore$　$A'B'^2=c^2$

$\because$　邊長是正值

$\therefore$　$A'B'=c$

在$\triangle ABC$與$\triangle A'B'C'$中

$\because$　$BC=a=B'C'$、$CA=b=C'A'$、$AB=c=A'B'$

$\therefore$　$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$

$\therefore$　$\angle C=\angle C'=Rt\angle$

例如，$3^2+4^2=5^2$、$5^2+12^2=13^2$、⋯，所以，邊長分別是 3、4、5；5、12、13；⋯的三角形都是直角三角形。

在我國古代，一部數學書《周髀算經》中有用邊長為 3、4、5 的直角三角形來進行測量的記載，並把直角三角形的兩直角邊分別叫做**勾**與**股**，斜邊叫做**弦**。因此，我們把上面兩個定理分別叫做**勾股定理**與它的逆定理。勾股定理是數學中最常用的定理之一。在外國是古希臘人畢達哥拉斯首先發現這個定理的，所以外國把它叫做**畢達哥拉斯定理**。

練　習

1. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=Rt\angle$。
   (1) 已知 $a=6$、$b=8$，求 c；
   (2) 已知 $a=40$、$c=41$，求 b。
2. 在邊長為 (1) $a=8$、$b=15$、$c=17$；(2) $a=7$、$b=24$、$c=25$ 的三角形是不是直角三角形？若是直角三角形，那個角是直角？
3. 正三角形的邊長為 10 cm，求這個三角形的面積。

5.4　勾股定理的例題

【例 1】 求圖 5-18 所示矩形零件上兩孔中心 A 與 B 的距離(精確到 0.1 mm)。

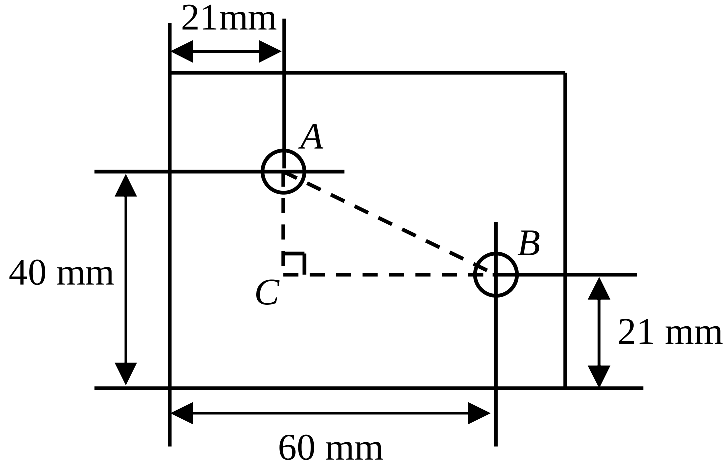


圖 5-18

解　$\because$　$\triangle ABC$ 是直角三角形，根據勾股定理，得

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$\therefore$　$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$

$\because$　$AC = 40 - 21 = 19$ 、 $BC = 60 - 21 = 39$

$\therefore$　$AB = \sqrt{19^2 + 39^2} = \sqrt{1882} \approx 43.4\ \text{mm}$

答：兩孔中心的距離約為 43.4 mm。

【例 2】從直角三角形的直角頂點到斜邊上之垂線，將斜邊上的正方形分成兩個矩形。求證：這兩個矩形的面積分別等於兩個直角邊上的正方形之面積。

已知：　如圖 5-19，$Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，四邊形 $ADEB$、$BKJC$、$CGFA$ 分別是$\triangle ABC$ 三邊上的正方形。$CI \perp AB$，垂足為 H，交 DE 於 I。

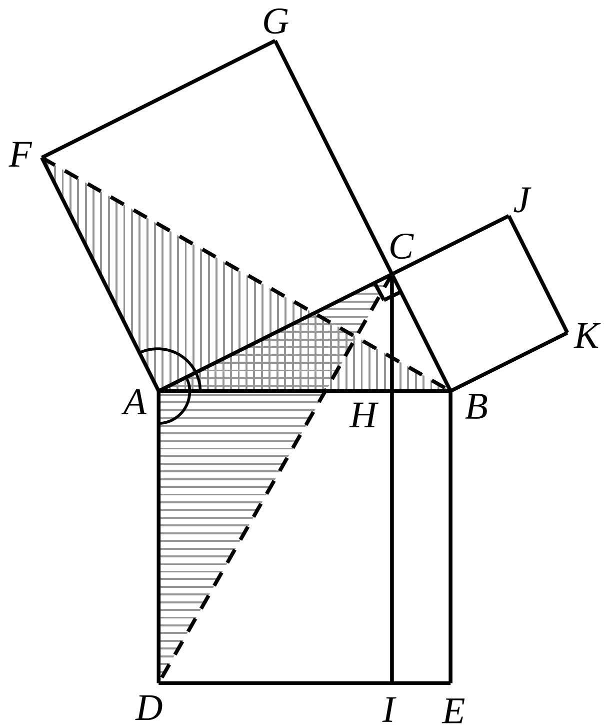


圖 5-19

求證：　$S_{\text{正方形}CGFA} = S_{\text{矩形}ADIH}$ 、 $S_{\text{正方形}BKJC} = S_{\text{矩形}HIEB}$

證明：　連結 BF、CD。

$\because$　$\triangle ABF \cong \triangle ADC$　　　(SAS)

$\therefore$　$S_{\triangle ABF} = S_{\triangle ADC}$

又 $\because$ $S_{\text{正方形}CGFA} = 2S_{\triangle ABF}$

$S_{\text{正方形}ADIH} = 2S_{\triangle ADC}$ (等底等高)

$\therefore$ $S_{\text{正方形}CGFA} = S_{\text{矩形}ADIH}$

同理可得，$S_{\text{正方形}BKJC} = S_{\text{矩形}HIEB}$ 。

古代希臘數學家歐幾里得曾把畢達哥拉斯定理編寫在他所著的《幾何原本》一書中，用上面的方法證明了這個定理。

【例 3】 作長為$\sqrt{2}$ 、$\sqrt{3}$ 、…、$\sqrt{7}$ 的各線段。

分析： 由勾股定理，直角邊長為 1 的直角三角形，斜邊長就等於$\sqrt{2}$ 直角邊長為$\sqrt{2}$、1 的直角三角形之斜邊長就是$\sqrt{3}$。以此類推，由此得到作法。

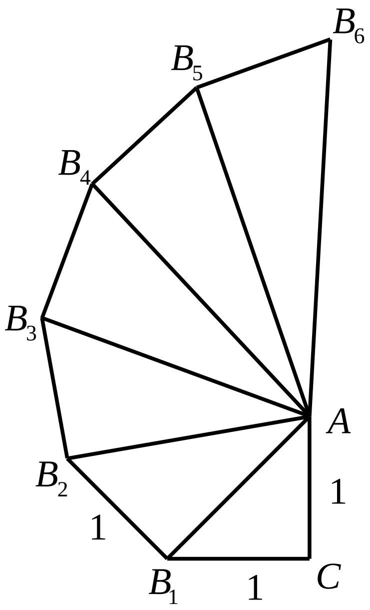


圖 5-20

作法： 1. 作直角邊長為 1 的等腰直角三角形 ACB_1 (圖 5-20)。

2. 以斜邊 AB_1 為一直角邊，作另一直角邊長為 1 的直角三角形 AB_1B_2 。

3. 順次這樣作下去，最後作到直角三角形 AB_5B_6 。這時斜邊 AB_1、AB_2 、…、AB_6 的長度就是$\sqrt{2}$ 、$\sqrt{3}$ 、…、$\sqrt{7}$ 。

證明： 根據勾股定理，在 $Rt\triangle ACB_1$ 中，

$AB_1^2 = AC^2 + B_1C^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

$\because$ $AB_1 > 0$

$\therefore$ $AB_1 = \sqrt{2}$

其他同理可證。

練　習

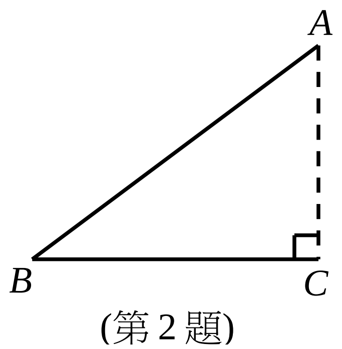
1. 已知 CD 是 $Rt\triangle ABC$ 斜邊 AB 上的高， $BD=1$、 $\angle A=30°$ 。求$\triangle ABC$ 的面積。
2. 證明：在四邊形 $ABCD$ 中，如果對角線 $AC\perp BD$ ，那麼 $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$ 。

習　題　十　八

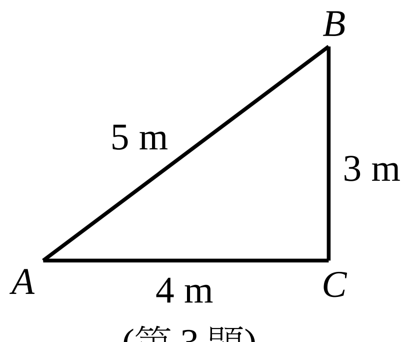
1. (1) 直角三角形 ABC 中，$\angle C=Rt\angle$、 $b=2.5$、 $c=6.5$ ，求 a；

   (2) $\triangle ABC$ 中， $a=n^2-1\,(n>1)$、 $b=2n$ 、 $c=n^2+1$ 。求證：$\angle C=Rt\angle$

2. 隔湖有兩點 A、B，從與 BA 方向成直角的 BC 方向上的點 C，測得$CA=50\,\text{m}$、 $CB=40\,\text{m}$，求 AB。



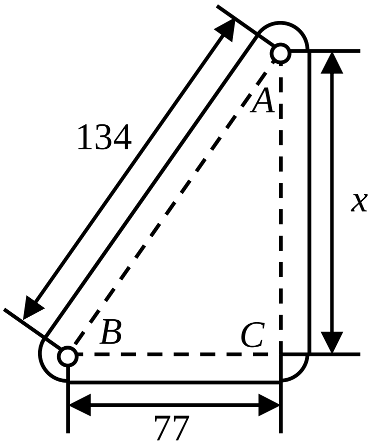
(第 2 題)



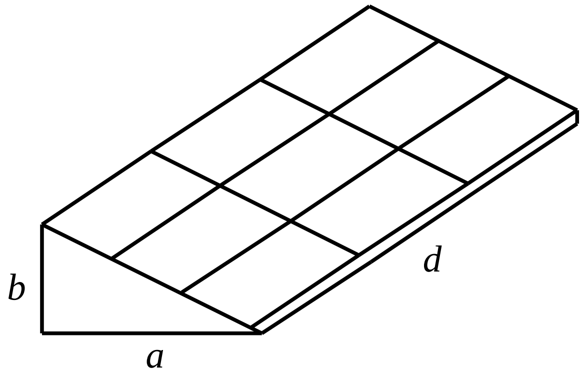
(第 3 題)

3. 在地面上確定直角，可以用如圖所示的方法：取一條長 12 m 的測繩，在地面上距離為 4 m 的兩點 A、C 打兩個木樁，把測繩套在木樁上，把剩下的 8 m 測繩分成 5 m 與 3 m 兩段，拉緊分點就可以在地面上確定點 B，這時$\angle ACB$ 就是直角。說明這種確定直角方法的根據。

4. 如圖，車床齒輪箱殼要鑽兩個圓孔，兩孔中心的距離 AB 是 134 mm，兩孔中心的水平距離 BC 是 77 mm，計算兩孔中心的垂直距離 AC (精確到 0.1 mm)。



(第 4 題)



(第 5 題)

5. 某人修建一個育苗棚(如圖)，棚寬 $a=3\,\text{m}$、高 $b=1.5\,\text{m}$、長 $d=10\,\text{m}$。求覆蓋在頂面上的塑料薄膜需要多少 m^2 (精確到 $0.1\ \text{m}^2$)？

6. (1) 正方形的邊長是 a，求對角線長；
   (2) 正方形的對角線長是 b，求一邊長。

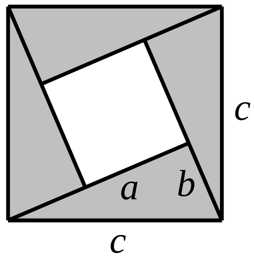
7. 求高等於 h 的等邊三角形之邊長。

8. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$ 、 $AC=2.1\,\text{cm}$、 $BC=2.8\,\text{cm}$。
   求 (1) $\triangle ABC$ 的面積； (2) 斜邊 AB； (3) 高 CD。

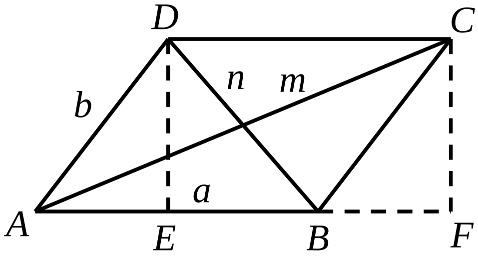
9. 一艘輪船以每小時 16 km 的速度離開港口向東南方向航行。另一艘輪船在同時同地以每小時 12 km 的速度向西南方向航行。它們離開港口一個半小時後相距多遠？

10. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$ 、 $\angle A=30°$ 、 $AB=10$ ，求 AC。

11. 在一個銳角等於$30°$的直角三角形中，$30°$角所對的直角邊之長是 a，求斜邊的長與另一條直角邊的長。



(第 12 題)



(第 14 題)

12. 如圖，在邊長為 c 的正方形中，有四個斜邊為 c 的全等直角三角形，已知它們的直角邊長為 a、b。利用這個圖證明勾股

定理。(這個圖叫做勾股方圓圖，我國古代數學家趙爽在他所著的《勾股方圓圖注》中，用這個圖證明了勾股定理。)

13. 已知：　$\triangle ABC$ 中，CD 是高。

求證：　$CA^2 - CB^2 = DA^2 - DB^2 = AB(DA - DB)$ 。

14. 已知：　如圖，平行四邊形的鄰邊長為 a、b，對角線長為 m、n。

求證：　$m^2 + n^2 = 2(a^2 + b^2)$ 。

15. 一個等腰三角形的周長是 16 cm，底邊上的高是 4 cm，求這個三角形各邊的長。

小　结

一、本章主要內容是研究多邊形的面積與直角三角形的勾股定理之理論與應用等問題。面積與勾股定理是平面幾何中的兩個重要內容。

二、面積是日常生活與科學記數中最常用的概念，我們從多邊形的面積概念出發，以矩形的面積等於它的長與寬之積為基礎，推算出平行四邊形、三角形、梯形的面積公式：

$$S_{\square} = ah$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}ah$$

$$S_{梯形} = \frac{1}{2}(a+b)h$$

有了這些面積公式，就可以求任意多邊形的面積。

三、勾股定理是數學中最有用的定理之一，我們在多邊形面積的基礎上，證明了勾股定理與它的逆定理：

$$Rt\triangle ABC \iff a^2 + b^2 = c^2$$

這個定理在我們將要學習的三角函數、立體幾何、解析幾何中，都有廣泛的應用。

複習參考題五

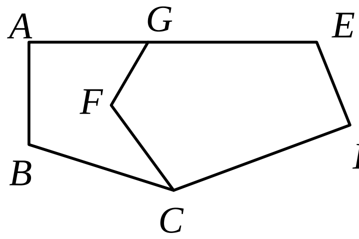
1. 已知：　$\triangle ABC$ 的中線 AD、BE 交於點 G。

   求證：　$S_{\triangle ABG} = S_{\text{四邊形}CEGD}$ 。

2. 求證：梯形面積等於一腰與另一腰中點到這個腰的距離之積

3. 把一個已知梯形改成與它面積相等的等腰梯形，使它兩底的大小不變。

4. 圖中兩塊土地之間有一條小路 CFG，用作圖方法把它改成經過點 C 的直路。使路兩旁的土地面積不變。



(第 4 題)

5. 三邊長為 $2n^2+2n$ 、 $2n+1$ 、 $2n^2+2n+1$ ($n>0$)的三角形是不是直角三角形？為什麼？

6. 一個直角三角形的三邊為三個連續整數，求它各邊的長。

7. 一個等腰三角形底邊與腰的長分別為 12 cm 與 10 cm。有一矩形，它的周長與面積與這個等腰三角形的周長與面積分別相等。求矩形的長與寬。

8. (1) 已知：　$\triangle ABC$ 的 $\angle A$ ： $\angle B$ ： $\angle C$ =1：2：3。

   求證：　$b^2 = 3a^2$ 。

   (2) 已知：　$\triangle ABC$ 的 $\angle A$ ： $\angle B$ ： $\angle C$ =1：1：2

   求證：　$c^2 = 2a^2$ 。

9. 已知：　在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = Rt\angle$ ，CD 是高。

   求證：　$2CD^2 + AD^2 + BD^2 = AB^2$ 。

10. 已知：　在 $\triangle ABC$ 中， $AB > AC$ ，AD 是中線，AE 是高。

    求證：　$AB^2 - AC^2 = 2BC \bullet DE$ 。

11. 已知菱形的周長是 52 cm，一條對角線長是 24 cm，求其面積。

12. 求證：菱形的對角線之平方和等於一邊平方的 4 倍。

13. 用一條 36 cm 長的鐵絲彎成一個直角三角形的模型，要使它的一條直角邊比另一條直角邊短 3 cm。應該怎樣彎？