第六章　相似形

一、比例線段

6.1　比例

前面，我們學習了全等圖形。兩個全等圖形的形狀相同，大小也相同，它們能夠完全重合。我們還常見到這樣的一些圖形，如大正方形與小正方形；圖 6-1 中是兩幅大小不同的地圖。這些圖形大小雖然不同，但形狀卻是相同的。

圖 6-1

為了研究這些形狀相同的圖形之間的關係，我們須要先研究比例與比例線段。

在小學裡，我們學過比例，就是兩個比相等的式子。如

$$\frac{80}{2}=\frac{240}{6}\quad \text{或}\quad 80:2=240:6$$

如果用字母來表示數,那麼比例可以寫成如下的形式(只研究所有字母都不等於零的情形)：

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\quad \text{或}\quad a:b=c:d$$

在比例中，a、d 叫做**比例外項**，b、c 叫做**比例內項**，d 叫做 a、b、c 的**第四比例項**。如果比例中兩個比例內項相等，即比例為

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c} \quad 或 \quad a:b=b:c$$

時，我們把 b 叫做 a 與 c 的**比例中項**。

在比例 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 的兩邊同乘以 bd，得到

$$ad=bc$$

這個推理步驟就是：

$$\because \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\therefore \quad ad=bc$$

為了簡明，可以把這個推理步驟寫成

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow ad=bc \qquad (1)$$

符號「$\Rightarrow$」讀作「推出」。

在等式 $ad=bc$ 的兩邊同除以 bd，又得到 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，即

$$ad=bc \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad (2)$$

(1)、(2)式合起來表明 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 與 $ad=bc$ 可以互相推出，它是比例的基本性質。

比例的性質定理 $\boldsymbol{\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc}$。

符號「$\Leftrightarrow$」讀作「等價於」。它表示從左端可以推出右端，並且由右端也可以推出左端。

推論 $\boldsymbol{\frac{a}{b}=\frac{b}{c} \Leftrightarrow b^2=ac}$。

根據比例的性質定理，一個比例可以得出多種不同的比例變形，例如，

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow ad=bc \Rightarrow bc=ad \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

由於$ad=bc$可以寫成$bc=ad$、$ad=cb$、$cb=da$、⋯等七種形式，所以由$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$又可以得出$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$、$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$、$\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$、⋯等七種不同的形式。

【例 1】依據下列各式，求a：b

(1) $3a=4b$；

(2) $\frac{a}{5}=\frac{b}{7}$。

$\boxed{解}$

(1) $3a=4b \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{4}{3}$；

(2) $\frac{a}{5}=\frac{b}{7} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{5}{7}$。

下面，我們再學習比例的兩個重要性質。

1. 合比性質

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}}$$

證明： $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}\pm 1=\frac{c}{d}\pm 1 \Rightarrow \frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$。

2. 等比性質

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}\ (b+d+\cdots+n\neq 0) \Rightarrow \frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{a}{b}}$$

證明： 設$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}=k$，那麼$a=bk$、$c=dk$、⋯、$m=nk$。

$$\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{bk+dk+\cdots+nk}{b+d+\cdots+n}=\frac{(b+d+\cdots+n)k}{b+d+\cdots+n}=k=\frac{a}{b}$$

【例 2】(1) 已知：$\frac{a-b}{b}=\frac{3}{8}$。求證：$\frac{a}{b}=\frac{11}{8}$；

(2) 已知：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\,(b\pm d\neq 0)$。求證：$\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}$。

證明： (1) $\frac{a-b}{b}=\frac{3}{8}\Rightarrow\frac{a-b+b}{b}=\frac{3+8}{8}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{11}{8}$；

(2) $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}\\ \frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$$

$$\Rightarrow\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}$$

【例 3】已知：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=3$、$b+d+f=4$。求$a+c+e$。

解

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=3\Rightarrow\frac{a+c+e}{b+d+f}=3$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow a+c+e=3(b+d+f)\\ b+d+f=4\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow a+c+e=3\times 4=12$$

練　習

1. 求下列各式中的 x：
   (1) $4:x=3:5$；　　(2) $(x+2):x=11:9$；
   (3) $3:x=x:12$；　　(4) $1:x=x:(1-x)$。

2. 已知$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。寫出其它七個比例式，並指出其中哪些是以 a 與 d 為外項、以 b 與 c 為內項的比例式，哪些是以 b 與 c 為外項、以 a 與 d 為內項的比例式。

練 習

3. 求下列各式中的 $x：y$

(1) $3y=4x$； (2) $3：2=y：x$；

(3) $7：x=4：y$； (4) $m：y=n：x$；

(5) $(x+y)：y=8：3$； (6) $(x-y)：y=1：2$。

4. 已知 h 是 e、f、g 的第四比例項，寫出比例式。

5. 已知 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{5}{7}$。求 $\frac{2a-c+7e}{2b-d+7f}$。

6. (口答)：

(1) $\frac{a}{b}$是不是等於$\frac{a^2}{b^2}$？為什麼？

(2) 從$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$能不能得出$\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$？為什麼？

7. 從下面兩個比例可以推出什麼結果：

(1) $b：a=c：b$； (2) $b：a=b：c$。

6.2 比例線段

我們先來研究兩條線段的比。

在同一單位下，兩條線段長度的比叫做這兩條線段的比。兩條線段 AB、CD 的比值為 k 時，可以記作：

$$\frac{AB}{CD}=k \quad \text{或} \quad AB：CD=k$$

因為線段的長度是一個正量，所以兩個正數的比值一定是正數。例如，課本的封面相鄰兩邊 a、b 的長度分別是 18.5 cm 與 13 cm，那麼

$$\frac{a}{b}=\frac{18.5}{13}=\frac{37}{26} \quad \text{或} \quad a：b=18.5：13=\frac{37}{26}$$

如果改用 m、mm 作為線段的長度單位，那麼

$$a：b = 0.185：0.130 = \frac{37}{26}$$

$$a：b = 185：130 = \frac{37}{26}$$

由此可知：兩條線段的比與所採用的長度單位沒有關係。因此，下面討論線段的比時，一般不指明長度單位。但如果遇到給出的線段長度使用不同單位時，要先化成同一單位。

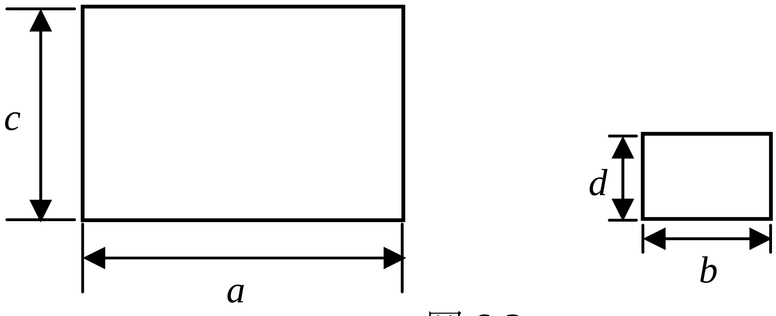


圖 6-2

如圖 6-2，分別度量兩個矩形的長 a 與 b、寬 c 與 d，得

$a = 3\,\text{cm}$ 、 $b = 12\,\text{mm}$ 、 $c = 2\,\text{cm}$ 、 $d = 8\,\text{mm}$ 。

改用 mm 為單位，得 $a = 30\,\text{mm}$、 $c = 20\,\text{mm}$。可得

$$\frac{a}{b} = \frac{30}{12} = 2.5 \text{ 、 } \frac{c}{d} = \frac{20}{8} = 2.5$$

於是得

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ 或 } a：b = c：d$$

在四條線段 a、b、c、d 中，如果 a 與 b 的比等於 c 與 d 的比，那麼，這四條線段叫做**成比例線段**或簡稱**比例線段**。

【例 1】 兩地的實際距離是 250 m，畫在一份地圖上的距離(圖距)是 5 cm，圖距與實際距離的比(0.05：250)就是比例尺($\frac{1}{5000}$)。在這樣的地圖上，圖距 $a = 8\,\text{cm}$ 的兩地 A、B，實際距離是多少 m？

$\boxed{解}$　根據題意

$$\frac{a}{AB}=\frac{1}{5000}$$

$\therefore\quad AB=5000a=40000\ (\text{cm})=400\ (\text{m})$

答：A、B 兩地的實際距離是 400 m。

【例 2】已知線段 $AB=l$，C 是 AB 上的一點(圖 6-3)，且 AC 是 AB 與 BC 的比例中項，求 AC 的長。

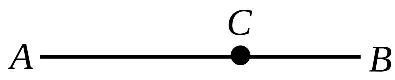


圖 6-3

$\boxed{解}$　設 $AC=x$，那麼 $BC=AB-AC=l-x$。因為 AC 是 AB 與 BC 的比例中項，得

$$x^2=l(l-x)$$

$$x^2+lx-l^2=0$$

解得　$x=\dfrac{-l\pm\sqrt{l^2+4l^2}}{2}$

$x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}l$、$x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}l$ (不合題意)

即　$AC=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}l\approx 0.618l$。

把一條線段(AB)分成兩條線段，使其中較大的線段(AC)是原線段(AB)與較小的線段(BC)之比例中項，叫做把這條線段**黃金分割**。

在一條線段 AB 上截取這條線段的 0.618 倍得點 C，點 C 就是線段 AB 的黃金分割點(近似)。我們也可以根據勾股定理，利用尺規作圖做出 $\sqrt{(\frac{l}{2})^2+l^2}$，再作出一條線段的黃金分割點。作法如下：

1. 過點 B 作 $BD\perp AB$，使 $BD=\dfrac{1}{2}AB$ (圖 6-4)。
2. 連結 AD，在 AD 上截取 $DE=DB$。

3. 在 AB 上截取 $AC = AE$ 。點 C 就是所求的黃金分割點。這是因為，

$AC = AE$

$$= AD - \frac{AB}{2}$$

$$= \sqrt{AB^2 + (\frac{AB}{2})^2} - \frac{AB}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}AB}{2} - \frac{AB}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$$

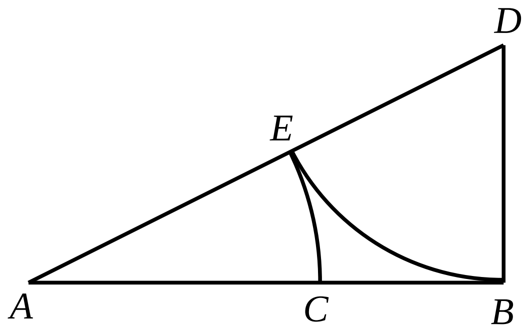
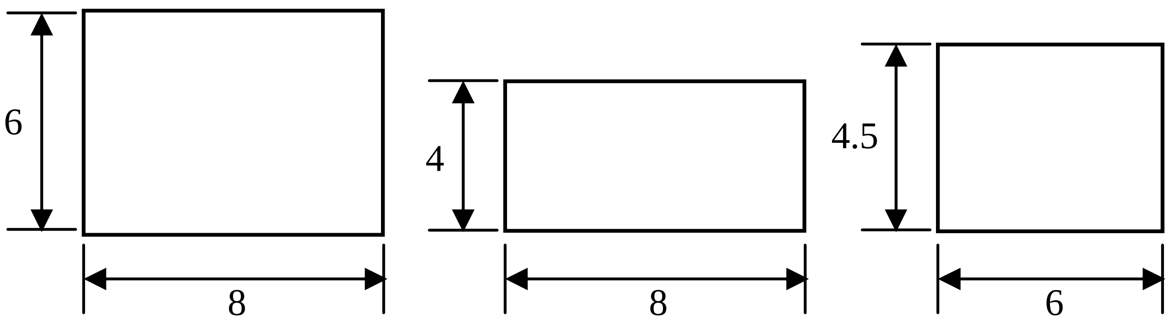


圖 6-4

練　習

1. 延長線段 AB 到 C，使 $BC = AB$ 。求
   (1) $AC：AB$；　(2) $AB：BC$；　(3) $AC：BC$。
2. 求正方形的對角線與它一邊的比值：
   (1) 用根式表示；(2) 精確到 0.1；(3) 精確到 0.001。
3. (口答) 如圖所示的三個矩形中，那兩個矩形的長與寬是成比例的線段？

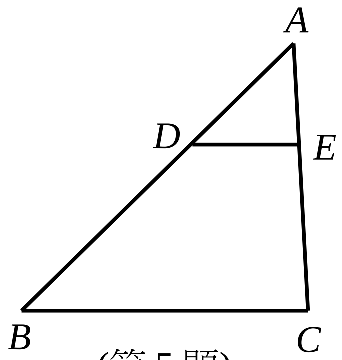


(第 3 題)

4. 已知：線段 $a = \frac{1}{7}$ cm、$b = 4$ cm、$c = 28\sqrt{2}$ cm。求 a、b、c 的第四比例項。

練 習

5. 已知：如圖，$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$、$AD=15$、$AB=40$、$AC=28$。求 AE 的長。



(第 5 題)

習 題 十 九

1. 煙囪高 30 m，影長 20 m；竿高 1.5 m，影長 1 m。物高與影長成比例嗎？
2. (1) 求等腰直角三角形的直角邊與斜邊之比；
   (2) 求正三角形的高與邊長之比。
3. 把下列各式寫成比例的形式：

   (1) $mn=pq$； (2) $a^2=bc$； (3) $x=\dfrac{bc}{a}$。
4. 已知 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$。

   (1) 用 b、c、d 表示 a； (2) 用 a、c、d 表示 b。
5. 圖紙上畫出的某個零件之長是 32 mm，如果比例尺是 1∶20，這個零件實際的長度是多少？如果比例尺是 5∶1 呢？
6. 在相同時刻的物高與影長成比例。如果某建築物在地面上的影長為 50 m，同時，高為 1.5 m 的測竿之影長為 2.5 m，那麼建築物的高是多少 m？

7. 在兩個比例式$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$與$\dfrac{a'}{b'}=\dfrac{c'}{d'}$中，如果$a=a'$、$b=b'$、$c=c'$，那麼$d$與$d'$是不是相等？為什麼？

8. 已知：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}$。求

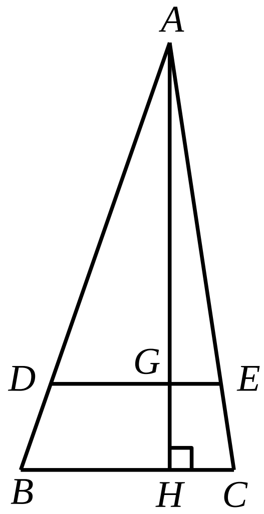
(1) $\dfrac{x+y+z}{x}$；　(2) $\dfrac{x+y+z}{x+y-z}$；　(3) $\dfrac{y+z-x}{z+x-y}$。

9. 已知$x:y:z=3:4:5$，$x+y-z=6$。求x、y與z。
(註：$x:y:z=3:4:5$是$x:3=y:4=z:5$的另一種寫法。)

10. (1) 求證：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Rightarrow\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$；

(2) 求證：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Rightarrow\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{c}{c+d}$。

11. 如圖，$\triangle ABC$中，$DE\,/\!/\,BC$、$AH\perp BC$、AH交DE於點G。已知$\dfrac{AG}{DE}=\dfrac{AH}{BC}$且$DE=12$、$BC=15$、$GH=6$。求高$AH$。



(第 11 題)

12. (1) 已知：$a=4\,\text{cm}$、$b=6\,\text{cm}$、$c=3\,\text{cm}$。求a、b、c的第四比例項d；

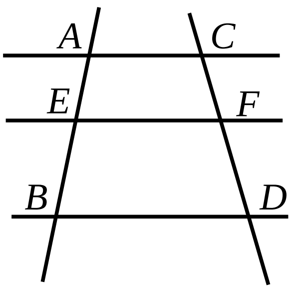
(2) 已知：$a=2.4\,\text{cm}$、$c=5.4\,\text{cm}$。求a與c的比例中項b；

(3) 已知：線段$a=1$、$b=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$、$c=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$。求證：線段b是a與c的比例中項。

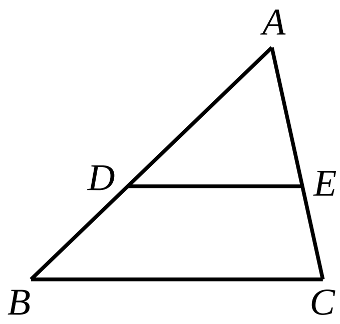
13. 已知：如圖，$\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{CF}{FD}$。依據比例的性質證明：

(1) $\dfrac{AE}{CF}=\dfrac{EB}{FD}$；　(2) $\dfrac{AB}{EB}=\dfrac{CD}{FD}$；　(3) $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{AE}{CF}$。

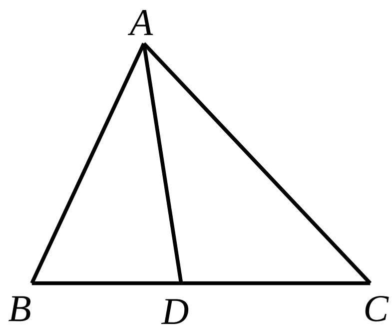
14. 已知：如圖，$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{3}{2}$。求$\dfrac{AB}{DB}$、$\dfrac{EC}{AE}$、$\dfrac{AB}{AD}$、$\dfrac{EC}{AC}$。



(第 13 題)



(第 14 題)



(第 15 題)

15. 已知：如圖，$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}$。$AB=2.8$ cm、$BC=3.6$ cm、$AC=3.5$ cm。求 BD、DC。

16. 已知：在四邊形 $ABCD$ 與 $A'B'C'D'$ 中，
$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{DA}{D'A'}=\dfrac{2}{3}$、$AB+BC+CD+DA=13.6$ cm。
求 $A'B'+B'C'+C'D'+D'A'$。

6.3　平行線分線段成比例定理

在四邊形一章裡，我們學過平行線等分線段定理。如圖 6-5，$l_1 // l_2 // l_3$，如果 $AB=BC$，那麼 $DE=EF$。

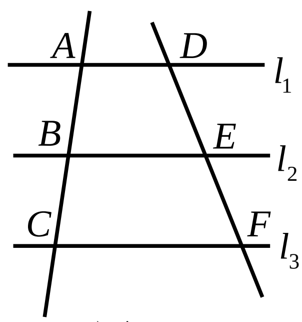


圖 6-5

由於 $\dfrac{AB}{BC}=1$、$\dfrac{DE}{EF}=1$，我們可得比例：

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$$

這就是說，平行線等分線段時，分得的線段成比例。

下面我們來研究平行線不等分線段的情形。如圖 6-6，$l_1 // l_2 // l_3$，如果 $AB \neq BC$，那麼四條線段 AB、BC、DE、EF 是否也有比例關係。

以 B 為起點，在 BA 上順次截取與 BC 相等的線段，有以下幾種可能情形：

(1) 如果截取 3 次正好截盡，這些分點與點 B 四等分線段 AC (圖 6-6 (甲))，這時 $\frac{AB}{BC}=3$。經過分點分別作 l'、l'' 平行 l_1。根據平行線等分線段定理，l'、l'' 與 l_2 也等分線段 DF，即 $DE=3EF$，$\frac{DE}{EF}=3$。這就得到

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$$

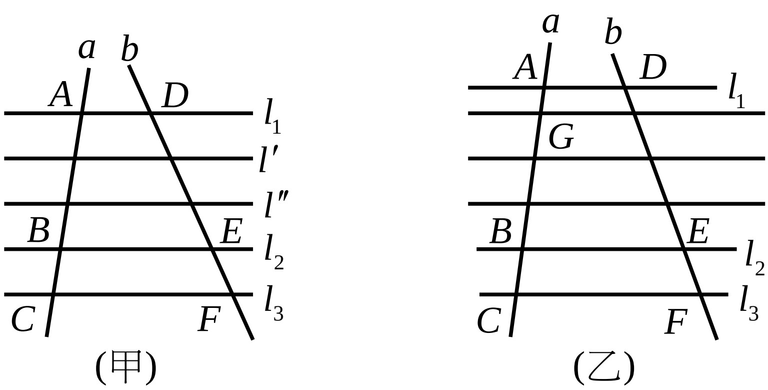


圖 6-6

(2) 如果截取 3 次後還剩餘一條小於 BC 的線段 GA(圖 6-6 (乙))，那麼再以 G 為起點，在 GA 上順次截取等於 $\frac{BC}{10}$ 的線段，截 4 次正好截盡，這時 $\frac{AB}{BC}=3.4$。運用(1)中那樣作平行線的方法，可以得到 $\frac{DE}{EF}=3.4$，因此也有

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$$

(3) 如果 $\frac{AB}{BC}=3.47$，同樣有 $\frac{DE}{EF}=3.47$；如果 $\frac{AB}{BC}=3.476$，也有 $\frac{DE}{EF}=3.476$；$\frac{AB}{BC}=3.476\cdots$，那麼，也有 $\frac{DE}{EF}=3.476\cdots$。

這樣，對於$\frac{AB}{BC}$是任何實數，都可得

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$$

利用合比性質，可得

$$\frac{AB}{AC}=\frac{DE}{DF}$$

這樣，我們就得到

平行線分線段成比例定理　三條平行線截兩條直線，所得的對應線段成比例。

如圖 6-7，在△ABC 中，已知 $DE \mathbin{//} BC$，過點 A 作 $MN \mathbin{//} DE$，依據上述定理得：

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \quad \text{或} \quad \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$

這樣，就得到

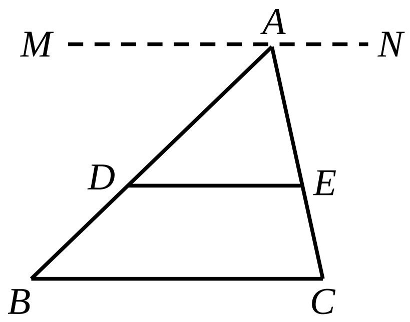


圖 6-7

推論　平行於三角形一邊的直線截其它兩邊，所得對應線段成比例。

利用比例的性質，從推論還可得到圖 6-7 中對應線段的各種比例。例如$\frac{AD}{AE}=\frac{DB}{EC}=\frac{AB}{AC}$等。

【例 1】 **作已知線段 a、b、c 的第四比例項。**

已知：　線段 a、b、c。

求作：　線段 x，使 $a : b = c : x$。

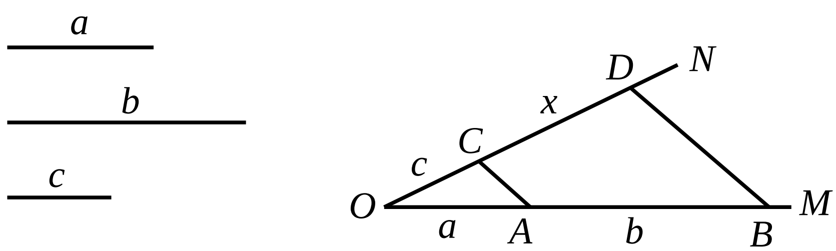


圖 6-8

作法：　如圖 6-8。

1. 作以點 O 為端點的射線 OM 與 ON。
2. 在 OM 上依次截取 $OA=a$、$AB=b$；
   在 ON 上截取 $OC=c$。
3. 連結 AC。過點 B 作 $BD \mathbin{/\mkern-3mu/} AC$，交 ON 於點 D。

CD 就是所求的線段。

證明：　略。

【例 2】 **平行於三角形的一邊，並且與其它兩邊相交的直線，所截得的三角形之三邊與原三角形三邊對應成比例。**

已知：　$\triangle ABC$ 中，$DE \mathbin{/\mkern-3mu/} BC$，分別交 AB、AC 於 D、E (圖 6-9)。

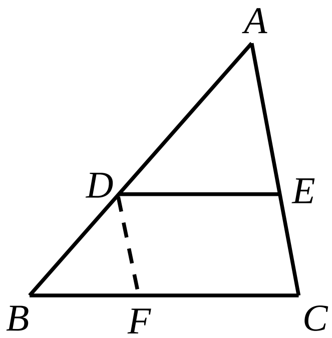


圖 6-9

求證：　$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{DE}{BC}$。

分析：　由上一節定理的推論可以直接得到

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$

$\dfrac{DE}{BC}$ 中的 DE 不在$\triangle ABC$ 的邊 BC 上，我們不能直接利用前面所學的定理。但從比例 $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{DE}{BC}$ 可以看出，除 DE 外，其它線段都在$\triangle ABC$ 的邊上，因此，我們只要將 DE 移到 BC 邊上去，得到 $CF=DE$，然後再來證明 $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{CF}{BC}$ 就可以了。這只要過點 D 作 $DF \mathbin{/\mkern-3mu/} AC$，交 BC 於點 F，CF 就是平移 DE 所得的線段。

證明：　過點 D 作 $DF \mathbin{/\mkern-3mu/} AC$，交 BC 於點 F。

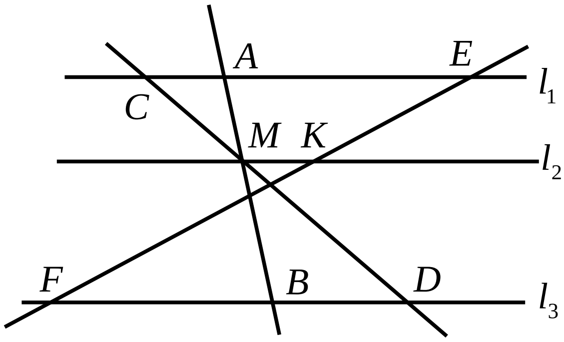
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}DE\,//\,BC\\ DF\,//\,AC\end{array}\right\}\Rightarrow DE=FC\\ DF\,//\,AC\Rightarrow \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{FC}{BC}\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{DE}{BC}$$

$$DE\,//\,BC\Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$

$$\therefore\quad \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

練　習

1. 已知：如圖，$l_1 // l_2 // l_3$。$AM=3$ cm、$BM=5$ cm、$CM=4.5$ cm、$EF=15$ cm。求 DM、EK、FK 的長。



(第 1 題)

2. 已知：線段 a、b。
   求作：線段 a、b 的第三比例線段(即求 x，使 $a:b=b:x$)

3. 平行於△ABC 的邊 BC 之直線，與另兩邊 AB、AC(或 BA、CA)的延長線相交於點 D、E，畫出圖形，並說出圖中所有的成比例線段。

4. 已知：如圖 6-9，$DE // BC$、$DF // AC$。判斷下列比例是否正確，不對的加以改正：

   (1) $\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{DE}{BC}$；　(2) $\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{BF}{FC}$；　(3) $\dfrac{DF}{AC}=\dfrac{DE}{BC}$。

6.4　三角形一邊的平行線之判定

上一節我們研究了平行於三角形一邊的直線截三角形另兩邊所得的對應線段成比例。下面，我們來研究它的逆命題是否成立。

如圖 6-10，在△ABC 中，$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$，那麼 DE 與 BC 是不是平行呢？

以前，我們判定兩條直線平行，一般要用到角相等或線段相等，但現在的問題裡沒有這樣的條件。所以需要考慮另外的途徑。

我們來看，假如在已知條件下 BC 與 DE 不平行會發生什麼情況。過點 B 作直線 $BC' // DE$，交直線 AC 於點 C'。這時 C' 與 C 是不同的兩點，因而 $AC' \neq AC$。但是，

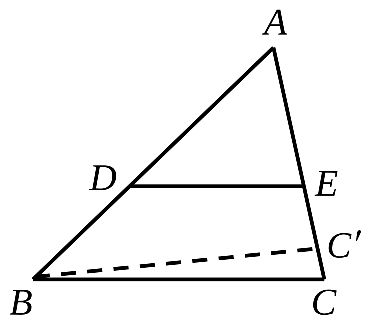


圖 6-10

$$BC' // DE \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC'}\\ \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\end{array}\right\} \Rightarrow AC' = AC$$

這樣就出現 $AC' \neq AC$ 與 $AC' = AC$ 兩種相矛盾的結果。出現矛盾的原因就是我們作了假設 BC 與 DE 不平行造成的，這說明我們所做的假設是錯誤的。因此，$BC // DE$。由此得到下面的定理：

定理　　**如果一條直線截三角形的兩邊，其中一邊上截得的一條線段與這邊與另一邊上截得的對應線段與另一邊成比例，那麼，這條直線平行於第三邊。**

根據比例的性質，我們很容易得到下面的結論：

推論　　**如果一條直線截三角形的兩邊所得之對應線段成比例，那麼這條直線平行於三角形的第三邊。**

例如，圖 6-10 中，如果 $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$ 或 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，則 $DE // BC$。

【例】　已知：　如圖 6-11，$AB // A'B'$、$BC // B'C'$。
　　　　求證：　$AC // A'C'$。

證明：

$$\left.\begin{array}{l} AB \mathbin{/\!/} A'B' \Rightarrow \dfrac{OA}{OA'}=\dfrac{OB}{OB'} \\ BC \mathbin{/\!/} B'C' \Rightarrow \dfrac{OC}{OC'}=\dfrac{OB}{OB'} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OA'}=\frac{OC}{OC'} \Rightarrow AC \mathbin{/\!/} A'C'$$

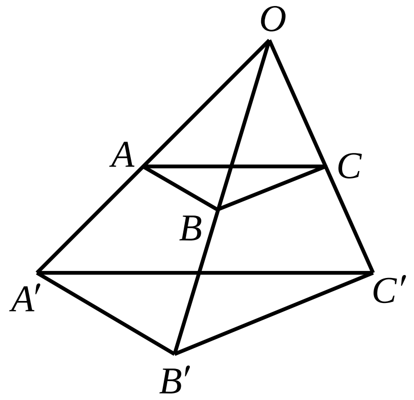
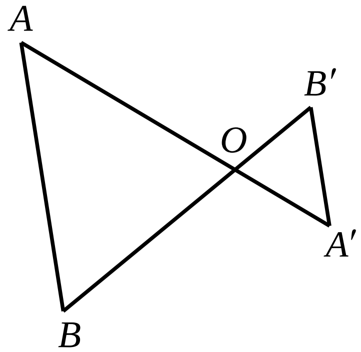


圖 6-11

練　習

1. 一條直線交△ABC 的邊 AB 於點 D，交 AC 邊於點 E。如果
   (1)　$AD=3\,\text{cm}$、$BD=4\,\text{cm}$、$AE=1.8\,\text{cm}$、$CE=2.4\,\text{cm}$；
   (2)　$AB=11\,\text{cm}$、$BD=6\,\text{cm}$、$AC=4.4\,\text{cm}$、$AE=2.1\,\text{cm}$；
   DE 與 BC 是否平行？
2. D、E 分別是△ABC 兩邊 AB、AC 上的點，哪些線段成比例能推出 $DE \mathbin{/\!/} BC$？
3. 已知：如圖，$\dfrac{OA}{OA'}=\dfrac{OB}{OB'}$。
   求作：$\angle A=\angle A'$、$\angle B=\angle B'$。



(第 3 題)

6.5　三角形角平分線的性質

三角形內角平分線性質定理

三角形的內角平分線分對邊所得之兩條線段與這個角的兩邊對應成比例。

已知：　△ABC 中，AD 是角平分線(圖 6-12)。

求證：　$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$。

分析：　在比例式 $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$ 中，AC 是 BD、DC、AB 的第四比例項。從圖 6-12 中又可以看出，如果過點 C 作 $CE \parallel AD$，交 BA 的延長線於 E，就可以得到 BD、DC、BA 的第四比例項 AE，要證明 $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$，只要證明 $AC=AE$ 即可。

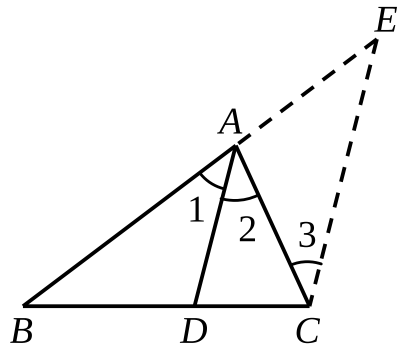


圖 6-12

證明：　點 C 作 $CE \parallel AD$，交 BA 的延長線於 E。

$$CE \parallel DA \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \angle 1=\angle 2 \\ \left\{\begin{array}{l} \angle 1=\angle E \\ \angle 2=\angle 3 \end{array}\right. \end{array}\right\} \Rightarrow \angle E=\angle 3$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow AE=AC \\ CE \parallel DA \Rightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{BA}{AE} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

在一條線段上的一個點，將線段分成兩條線段，這個點叫做這條線段的**內分點**。如圖 6-13(甲)中，點 C 是線段 AB 的內分點，這時，點 C 內分線段 AB 成兩條線段 AC、BC。在一條線段的延長線上之點，有時也叫做這條線段的**外分點**。外分點分線段所得的兩條線段也是這個點分別與線段的兩個端點確定之線段。如圖 6-13(乙)中，點 $D(E)$是線段 AB 的外分點，外分線段 AB 成兩條線段 AD、BD(AE、BE)。

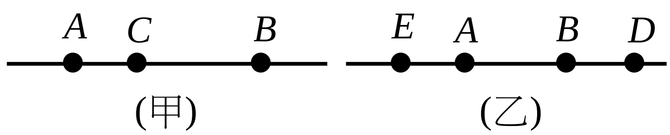


圖 6-13

根據內分點定義，三角形內角平分線性質也可說成「三角形內角平分線內分對邊所成的兩條線段與相鄰兩邊對應成比例」。

用類似的方法可以得到三角形外角平分線性質定理：

三角形外角平分線性質定理

如果三角形的外角平分線外分對邊成兩條線段，那麼這兩條線段與相鄰的兩邊對應成比例。

已知：　△*ABC* 中，*AD* 是外角平分線，交 *BC* 的延長線於點 *D* (圖 6-14)。

求證：　$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$ 。

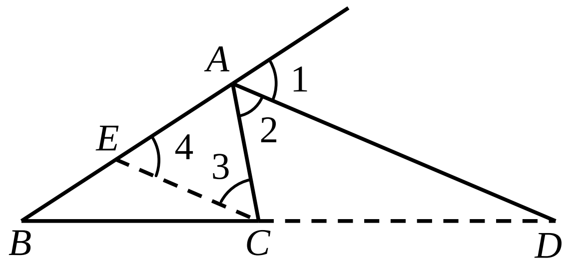


圖 6-14

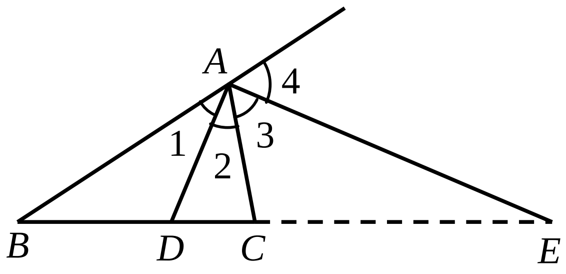


圖 6-15

同學可以根據圖形自己寫出證明。

【例】　已知：　如圖 6-15，*AD* 與 *AE* 分別是△*ABC* 的內角平分線與外角平分線。

求證：　$\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{BE}{CE}$ 。

證明：

$$\left.\begin{array}{l}\angle 1=\angle 2\Rightarrow \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{CD}\\ \angle 3=\angle 4\Rightarrow \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BE}{CE}\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{BD}{CD}=\dfrac{BE}{CE}$$

練　習

1. (口答) (1)　等腰三角形頂角平分線分底邊所得兩條線段的比值是多少？
   (2)　三角形外角平分線性質定理為什麼在「三角形的外角平分線外分對邊成兩條線段」之前一定要加如果二字？
2. 總結本節兩個定理中作輔助線的方法，即怎樣根據比例作輔助線(平行線)。
3. 已知：△*ABC* 中，*AD* 是角平分線，$AB=5\,\text{cm}$、$AC=4\,\text{cm}$、$BC=7\,\text{cm}$。求 *BD*、*DC* 的長。

習 題 二 十

1. (1) 把下列各式寫成比例，並使 x 為第四比例項：

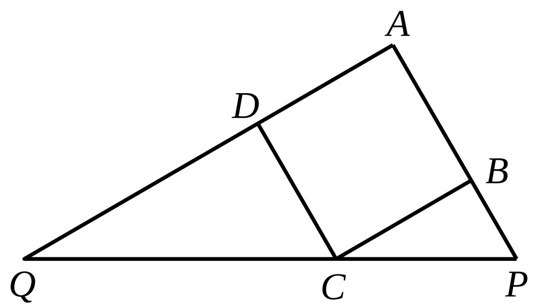
$$mx = np \text{；} x = \frac{ac}{b}$$

(2) 設 a、b、c、m、n、p 是已知線段，用直尺與圓規作出上兩題中的線段 x。

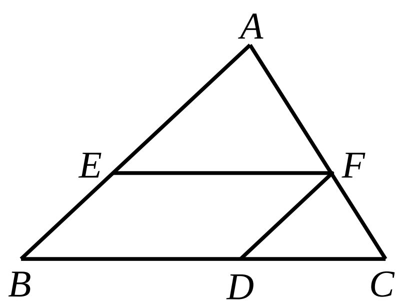
2. 已知：梯形 $ABCD$，點 E 是腰 AB 上的一點。在腰 CD 上求作一點 F，使 $\dfrac{CF}{FD} = \dfrac{BE}{EA}$ 。

3. 梯形 $ABCD$ 的腰 BA 與 CD 之延長線交於點 F，$FB:AB=8:5$，$DC = 2.25\,\text{cm}$。求 FC 的長。

4. 如圖，直線 PQ 經過菱形 $ABCD$ 的頂點 C，分別交邊 AB 與 AD 的延長線於點 P 與 Q，並且 $BP = \dfrac{1}{2}AB$ 。求證： $DQ = 2AB$ 。



(第 4 題)

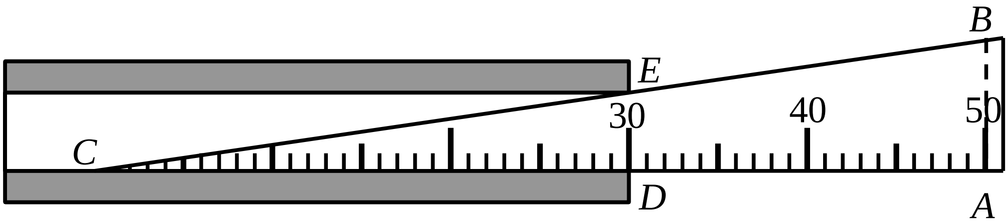


(第 5 題)

5. 已知：如圖，$EF \mathbin{/\!/} BC$、$FD \mathbin{/\!/} AB$、$AE = 1.8\,\text{cm}$、$BE = 1.2\,\text{cm}$、$CD = 1.4\,\text{cm}$。求 BD。
(提示：設 $BD = x$ ，列出比例。)

6. 已知：$\triangle ABC$ 中， $DE \mathbin{/\!/} BC$ ，DE 與 AB 相交於點 D，與 AC 相交於點 E。
(1) 如果 $AD:AB = 3:5$，求 $DE:BC$；
(2) 如果 $AE:EC = 3:5$，求 $DE:BC$。

7. 如圖，測量小玻璃管口徑的量具 ABC 上，AB 長為 5 mm，AC 被分為 50 等份。。如果小管口 DE 正好對著量具上 30 份處 ($DE \,//\, AB$)，那麼小管口徑就是 3 mm。為什麼？如果 DE 對著量具上 38 份處呢？



(第 7 題)

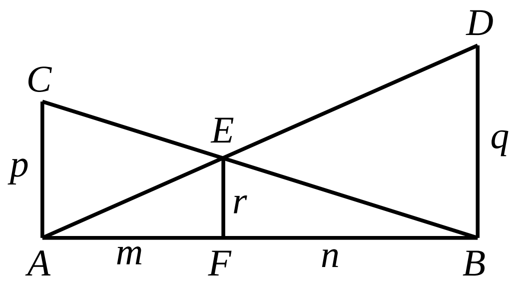
8. 已知：OC 是 $\angle AOB$ 內的一條射線。求證：自 OC 上的任意兩點到 $\angle AOB$ 的兩邊之距離成比例。

9. 已知：如圖， $AC \perp AB$ 、 $BD \perp AB$ ，AD 與 BC 相交於點 E，$EF \perp AB$，垂足為 F。又 $AC = p$ 、$BD = q$ 、$FE = r$ 、 $AF = m$ 、$FB = n$ 。

(1) 用 m、n 表示 $\dfrac{r}{p}$ ；

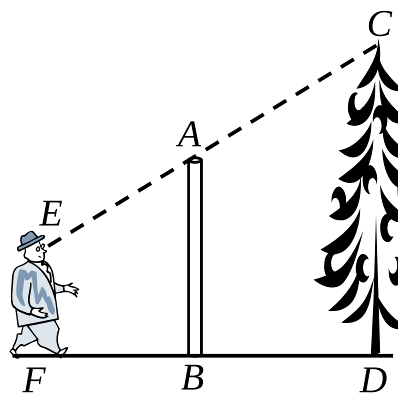
(2) 用 m、n 表示 $\dfrac{r}{q}$ ；

(3) 證明： $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$ 。

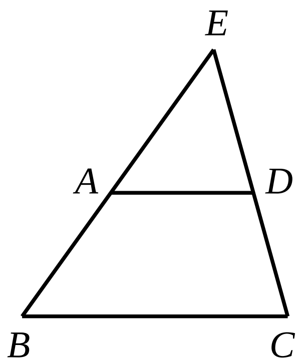


(第 9 題)

10. 如圖，直立在點 B 處的標桿 $AB = 2.5\,\text{m}$，立在點 F 處的觀測者從點 E 處看到桿頂 A、樹頂 C 在一直線上(點 F、B、D 也在一直線上)。已知： $BD = 3.6\,\text{m}$、 $FB = 2.2\,\text{m}$，人目高 $EF = 1.5\,\text{m}$，求樹高 DC。



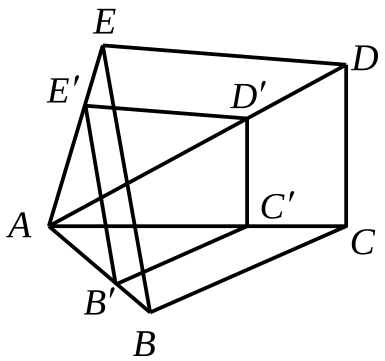
(第 10 題)



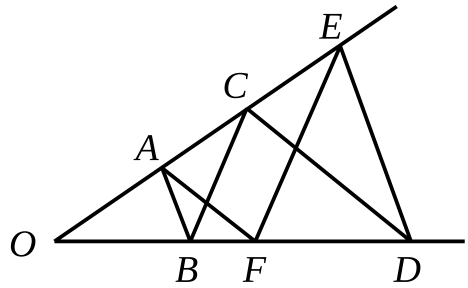
(第 11 題)

11. 梯形 $ABCD$ 的兩腰 BA 與 CD 延長相交於點 E (如圖)。已知：$AD=3.2\text{ m}$、$BC=6\text{ m}$、$BA=2.8\text{ m}$。求 AE。(提示：設 $AE=x$，列出比例。)

12. 已知：如圖，$B'C' // BC$、$C'D' // CD$、$D'E' // DE$、$AB'：B'B=2：1$。求 $B'E'：BE$。



(第 12 題)



(第 13 題)

13. 已知：如圖，A、C、E 與 B、F、D 分別是$\angle O$ 兩邊上的點，且 $AB // ED$、$BC // FE$。求證：$AF // CD$。

14. $\triangle ABC$ 中，BC 的中點為 D，$\angle ADB$ 與$\angle ADC$ 的平分線分別交 AB、AC 於點 M、N。求證：$MN // BC$。

15. 已知：$\triangle ABC$ 中，D 為 BC 邊上一點，$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$。求證：$AD$ 平分 $\angle BAC$。

16. $\triangle ABC$ 中，BE 與 CF 為角平分線，$FE // BC$。求證：$\triangle ABC$ 是等腰三角形。

17. 指出分點 C 是在線段 AB 上或是在 AB 哪一端的延長線上：
   (1) 內分線段 AB，使 $AC：CB=3：2$；
   (2) 外分線段 AB，使 $AC：CB=3：2$；
   (3) 外分線段 AB，使 $AC：CB=2：3$；

18. 已知$\triangle ABC$ 的三邊 $AB=11\text{cm}$、$AC=7\text{ cm}$、$BC=6\text{ cm}$，AD、AD' 是內、外角平分線。求 DD' 的長。

二、相似三角形

6.6 相似三角形

前面我們學過，有一些圖的形狀相同，但大小不一定相同。我們知道兩個全等三角形的形狀相同，大小也相同。有些三角形的形狀是相同的，但大小不一定相同，如圖 6-16 中，$\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$、$\triangle A''B''C''$ 就是形狀相同大小不同的三角形。

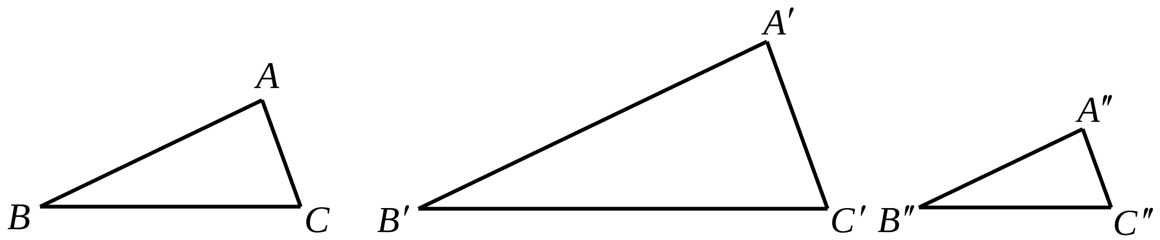


圖 6-16

僅依觀察是不能確定兩個三角形的形狀是否相同的。因而須研究兩個形狀相同的三角形之間有什麼關係。為此，我們來測量 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 的各邊與各角，可以得出：

$$\angle A=\angle A'、\angle B=\angle B'、\angle C=\angle C'、\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}。$$

這就是說，這兩個三角形的對應角都相等，對應邊都成比例。

對應角相等，對應邊成比例的三角形，叫做**相似三角形**。相似利用符號「~」來表示，讀作「相似於」，如圖 6-16 中的 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 相似，記作

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'。$$

與記兩個三角形全等一樣，在記兩個三角形相似時，通常把表示對應頂點的字母寫在對應之位置上，這使得我們可以比較容易地找出相似三角形的對應角與對應邊。

現在我們來研究下面兩個圖形。

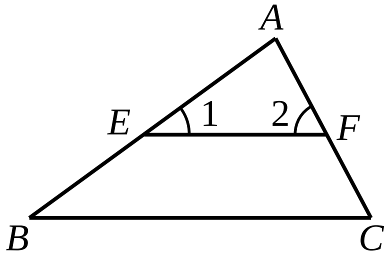


圖 6-17

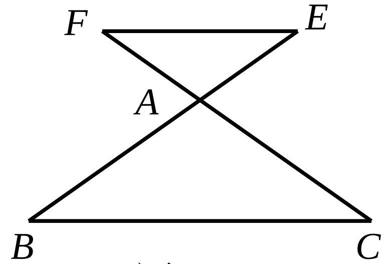


圖 6-18

如圖 6-17，△ABC 中，$EF\,//\,BC$，可得

$$EF\,//\,BC \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC}=\dfrac{EF}{BC} \\ \angle 1=\angle B \\ \angle 2=\angle C \end{array} \right. \\ \\ \angle A=\angle A \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC$$

類似地，可以證明圖 6-18 中，當 $EF\,//\,BC$ 時，△AEF~△ABC。由此，可以得到下面的定理：

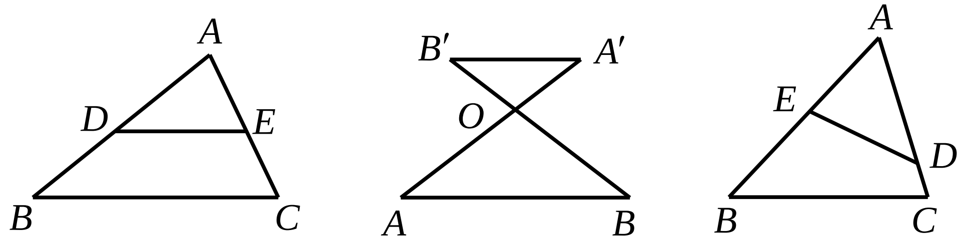
定理　　平行於三角形一邊的直線與其它兩邊(或兩邊的延長線)相交，所構成的三角形與原三角形相似。

相似三角形對應邊的比，叫做兩個相似三角形的**相似比**(或**相似係數**)。但要注意的是，如圖 6-16，△ABC 與△$A'B'C'$ 的相似比是 k_1，而△$A'B'C'$ 與△ABC 的相似比是 k_2，此時 $k_1=\dfrac{1}{k_2}$。只有當 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ 時，相似比 $k_1=k_2=1$。

練　習

1. (1)　所有的等腰三角形都相似嗎？所有的等邊三角形呢？為什麼？
   (2)　所有的直角三角形都相似嗎？所有的等腰直角三角形呢？為什麼？

2. 已知：如圖，(1)　△ABC~△ADE，其中 $DE\,//\,BC$；
   (2)　$\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$，其中 $A'B'\,//\,AB$；
   (3)　△ABC~△ADE，其中 $\angle ADE=\angle B$。
   寫出各組相似三角形的對應邊之比例式。



(第 2 題)

練 習

3. $\triangle ABC$ 中，$BC = 52\text{ cm}$、$CA = 46\text{ cm}$、$AB = 63\text{ cm}$。另一個與它相似的三角形之最短邊為 12 cm，求其餘兩邊的長度。

4. 已知：$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$。
   求證：$\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C_2$。

6.7 三角形相似的判定

我們知道，全等三角形是相似三角形的特殊情形。判定兩個三角形全等的方法有「SAS」、「ASA」、「SSS」、「RHS」等，那麼判定兩個三角形相似是否也有類似的方法呢？下面，我們來研究這個問題。

如圖 6-19，$\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 中，如果 $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$、$\angle A = \angle A'$，我們看$\triangle ABC$ 與$\triangle A'B'C'$ 是否相似。

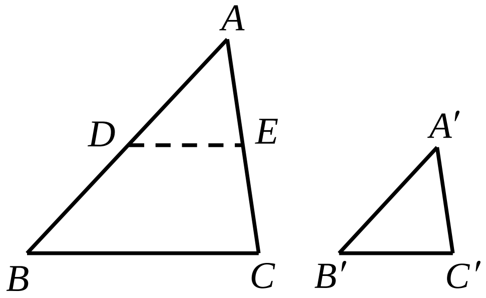


圖 6-19

我們知道，如果在$\triangle ABC$ 的邊 AB、AC(或延長線)上，分別截取 $AD = A'B'$、$AE = A'C'$，連結 DE，就得到與$\triangle A'B'C'$ 全等的$\triangle ADE$。這就相當於把$\triangle A'B'C'$ 搬到$\triangle ABC$ 中去。因而只要證明$\triangle ADE$~$\triangle ABC$。

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}\\ AD = A'B'\\ AE = A'C'\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE} \Rightarrow BC \,//\, DE \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE\\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left.\begin{array}{r}AD = A'B'\\ AE = A'C'\\ \angle A = \angle A'\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ADE \cong \triangle A'B'C'\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

這樣，我們就得到下面的定理：

三角形相似的判定定理 1

如果一個三角形的兩條邊與另一個三角形的兩條邊對應成比例，並且夾角相等，那麼這兩個三角形相似。

類似地，我們可以得到下面的判定定理：

三角形相似的判定定理 2

如果一個三角形的兩個角與另一個三角形的兩個角對應相等，那麼這兩個三角形相似。

如圖 6-19，$\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 中，如果 $\angle A = \angle A'$、$\angle B = \angle B'$，那麼 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$。

三角形相似的判定定理 3

如果一個三角形的三條邊與另一個三角形的三條邊對應成比例，那麼這兩個三角形相似。

如圖 6-19，$\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 中，如果 $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'}$，那麼 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$。

關於直角三角形的相似，還有下面的判定定理：

定理　如果一個直角三角形的斜邊與一條直角邊與另一個直角三角形的斜邊與一條直角邊對應成比例，那麼這兩個三角形相似。

已知：$Rt\triangle ABC$ 與 $Rt\triangle A'B'C'$ 中，$\angle C = \angle C' = Rt\angle$、$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{CA}{C'A'}$ (圖 6-20)。

求證：$Rt\triangle ABC \sim Rt\triangle A'B'C'$

證明：在 CA(或延長線)上，截取 $CA_1 = C'A'$，過點 A_1 作 $A_1B_1 // AB$，交 CB(或延長線)於點 B_1。

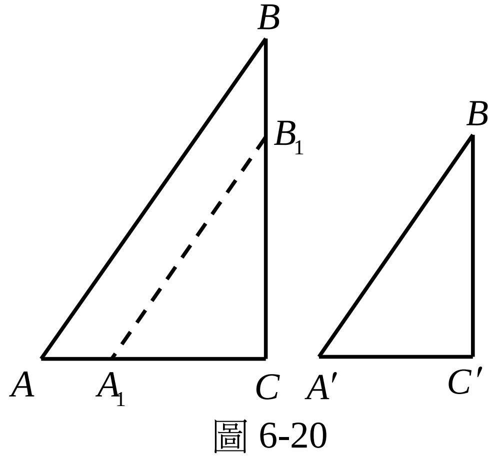


圖 6-20

$$\left.\begin{array}{r} AB /\!/ A_1B_1 \Rightarrow \dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C} \\ A_1C = A'C' \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A'C'} \\ \\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow \dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AB}{A'B'} \Rightarrow A_1B_1 = A'B' \\ \angle C = \angle C' = Rt\angle \\ A_1C = A'C' \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow Rt\triangle A_1B_1C \cong Rt\triangle A'B'C'$$

又　$AB /\!/ A_1B_1 \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$

$\therefore$　$Rt\triangle ABC \sim Rt\triangle A'B'C'$

練　習

1. 說明三角形相似的判定定理 2。
2. 依據下列各組條件，判定$\triangle ABC$ 與$\triangle A'B'C'$是否相似，並說明為什麼？
   (1)　$\angle A = 45°$、$AB = 12\text{ cm}$、$AC = 15\text{ cm}$、
   　　$\angle A' = 45°$、$A'B' = 16\text{ cm}$、$A'C' = 20\text{ cm}$；
   (2)　$\angle A = 68°$、$\angle B = 40°$、$\angle A' = 68°$、$\angle C' = 72°$；
   (3)　$AB = 12\text{ cm}$、$BC = 15\text{ cm}$、$AC = 24\text{ cm}$、
   　　$A'B' = 20\text{ cm}$、$B'C' = 25\text{ cm}$、$A'C' = 40\text{ cm}$。
3. 兩個三角形中，一個三角形的兩邊分別是 1.5 cm 與 2 cm，另一個三角形的兩邊分別是 2.8 cm 與 2.1 cm，且夾角均為 47°。這兩個三角形是否相似？為什麼？
4. (口答)判定兩個三角形全等與兩個三角形相似的條件有什麼相同與不同？為什麼三角形全等的判定「ASA」中有對應邊相等，而三角形相似的判定中只要兩角對應相等就可以了？

【例 1】 **直角三角形被斜邊上的高分成之兩個直角三角形與原三角形都相似。**

已知： $Rt\triangle ABC$ 中，CD 是斜邊上的高(圖 6-21)。

求證： $\triangle ABC \sim \triangle CBD \sim \triangle ACD$

證明：

$$\left.\begin{array}{r}\angle B=\angle B\\ Rt\angle ACB=Rt\angle CDB\end{array}\right\}\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle CBD$$

同理可證 $\triangle ABC \sim \triangle ACD$

$\therefore$ $\triangle ABC \sim \triangle CBD \sim \triangle ACD$

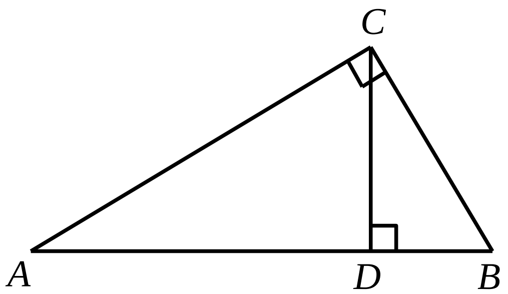


圖 6-21

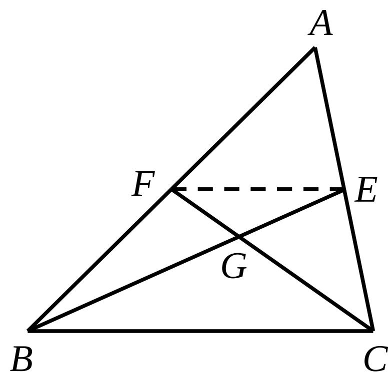


圖 6-22

【例 2】 已知： 如圖 6-22，BE、CF 是$\triangle ABC$ 的中線，它們相交於點 G。

求證： $\dfrac{GE}{GB}=\dfrac{GF}{GC}=\dfrac{1}{2}$

分析： 要證明四條線段成比例，一般是證明這四條線段分別是某兩個相似三角形的對應邊。從圖中可以看到，GF、GB 在$\triangle FGB$ 中，GE、GC 在$\triangle EGC$ 中，但是，即使$\triangle FGB$ 與$\triangle EGC$ 相似，由於 $\angle FGB=\angle EGC$ ，可能得到的比例 $\dfrac{GE}{GC}=\dfrac{GF}{GB}$ 或 $\dfrac{GE}{GC}=\dfrac{GB}{GF}$ 也不符合要求，因而只能另找辦法。考慮到點 E、F 是 AB、AC 的中點，如果連結 EF，那麼 $EF \parallel BC$ ，又 GF、GE 在$\triangle FGE$ 中，GB、GC 在$\triangle BGC$ 中，這樣就可以證明比例成立了。

證明：　連結 EF。

$$\left.\begin{array}{l} AE = EC \\ AF = FB \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} FE = \dfrac{1}{2}BC \Rightarrow BC = 2EF \\ FE \,/\!/\, BC \Rightarrow \dfrac{GE}{GB} = \dfrac{GF}{GC} = \dfrac{EF}{BC} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{GE}{GB} = \frac{GF}{GC} = \frac{1}{2}$$

如果 AD 是圖 6-22 中△ABC 的另一條中線(圖 6-23)，同樣可以證明它與 BE 的交點也分別內分 AD、BE 為 2：1。即 AD 與 BE 的交點也是 BE 與 CF 的交點 G。就是說，三角形的三條中線交於一點。三角形三條中線的交點叫做三角形的重心。由以上證明可以得到

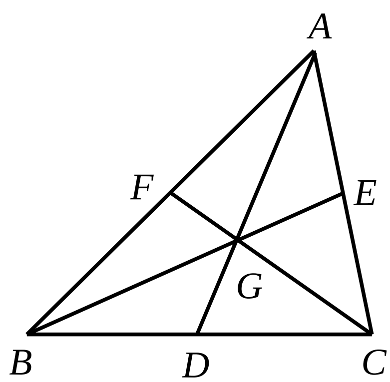


圖 6-23

三角形重心與頂點的距離等於它與對邊中點距離的兩倍。

【例 3】 已知△ABC，P 是 AB 上的一點，連結 CP。滿足什麼條件時，△ABC 與△ABC 相似？

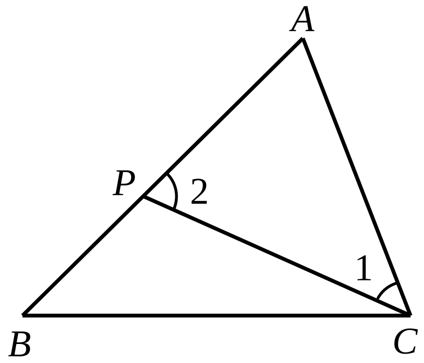


圖 6-24

分析：　從圖形可以看出，兩個三角形有一個公共角 $\angle A$。根據三角形相似的判定定理，只要還有另一對對應角相等，或夾 $\angle A$ 的對應邊成比例，兩個三角形相似。因為 $\angle 2 > \angle B$、$\angle 1 < \angle ACB$，所以 AP 與 AB、AC 與 AC 不可能是對應邊。只能 $\angle 1 = \angle B$ 與 $\angle 2 = \angle ACB$

$\boxed{\text{解}}$

$$\left.\begin{array}{l} \angle 1 = \angle B \\ \angle A = \angle A \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ACP \sim \triangle ABC$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle 2=\angle ACB\\ \angle A=\angle A\end{array}\right\}\Rightarrow \triangle ACP\sim\triangle ABC$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AC}{AP}\\ \angle A=\angle A\end{array}\right\}\Rightarrow \triangle ACP\sim\triangle ABC$$

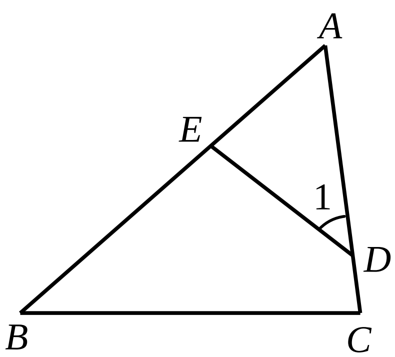
又因 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AC}{AP}\Leftrightarrow AC^2=AB\bullet AP$ ，因此，得

當 $\angle 1=\angle B$ ，或 $\angle 2=\angle ACB$ ，或 $AC^2=AB\bullet AP$ 時，

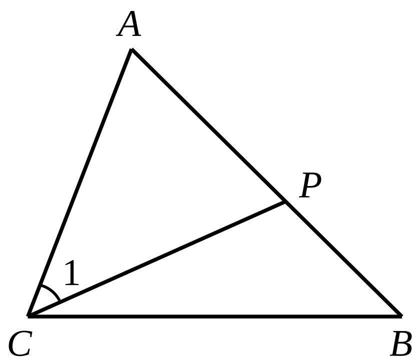
$\triangle ACP\sim\triangle ABC$ 。

練　習

1. 已知：D、E、F 分別是$\triangle ABC$ 的三邊 AB、BC、CA 之中點。
   求證：$\triangle DEF\sim\triangle ABC$。
2. 如圖：D、E 是$\triangle ABC$ 的邊 AC、AB 上的點。
   證明：(1) 如果 $\angle 1=\angle B$ ，那麼 $AD\bullet AC=AE\bullet AB$ ；
   (2) 如果 $AD\bullet AC=AE\bullet AB$ ，那麼 $\angle 1=\angle B$ 。



(第 2 題)

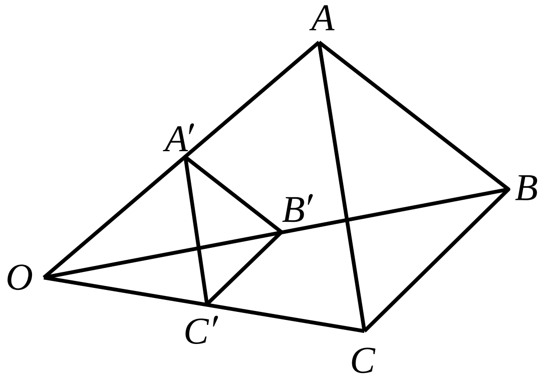


(第 3 題)

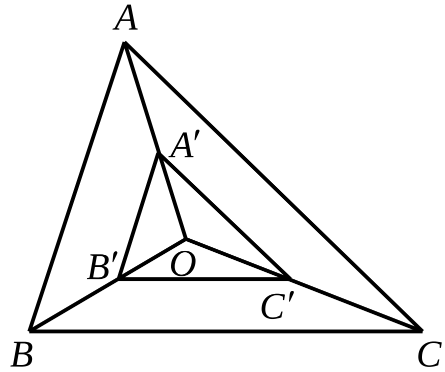
3. 如圖，$\triangle ABC$ 中，P 是 AB 上的點， $\angle 1=\angle B$ 。
   求證： $CP=\dfrac{AC\bullet BC}{AB}$ 。
4. 已知：P 是正方形 $ABCD$ 的邊 BC 上之點，且 $BP=3PC$ 、Q 是 CD 的中點。求證：$\triangle ADQ\sim\triangle QCP$。

習 題 二 十 一

1. 已知：如圖，$AB // A'B'$ 、 $BC // B'C'$ 。
求證：$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ 。



(第 1 題)



(第 2 題)

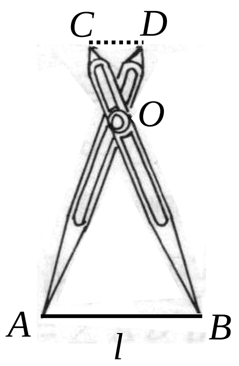
2. 已知：如圖，$AB // A'B'$ 、 $BC // B'C'$ 。
求證：$\triangle OAC \sim \triangle OA'C'$ 。

3. M 是$\triangle ABC$ 的邊 BC 之中點，$\angle AMB$ 的平分線交 AB 於 E、$\angle AMC$ 的平分線交 AC 於 D。
求證：$\triangle AED \sim \triangle ABC$ 。

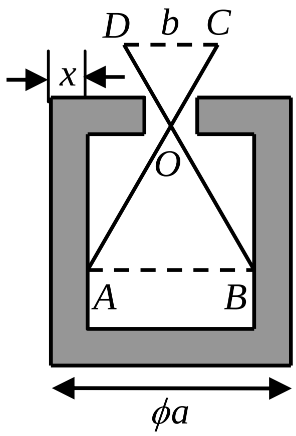
4. 作 $\triangle A'B'C'$ ，使它與已知$\triangle ABC$ 相似，且與邊 BC 相對應的邊 $B'C'$ 等於已知線段 a' 。

5. 已知：$\triangle ABC$。
求作：$\triangle A'B'C'$ ，使它與$\triangle ABC$ 相似，並使相似比為 $\frac{2}{3}$ 。

6. 比例規是一種畫圖工具(如圖)，使用它可以把線段按一定比例伸長或縮短。它是由長度相等的兩腳 AD 與 BC 交叉構成的。如果把比例規的兩腳合上，使螺絲釘固定在刻度 3 的地方(即同時使 $OA = 3OD$ 、 $OB = 3OC$)，然後張開兩腳，使 A、B 兩個尖端分別在線段 l 的兩個端點上，這時 $CD = \frac{1}{3}AB$ ，為什麼？



(第 6 題)

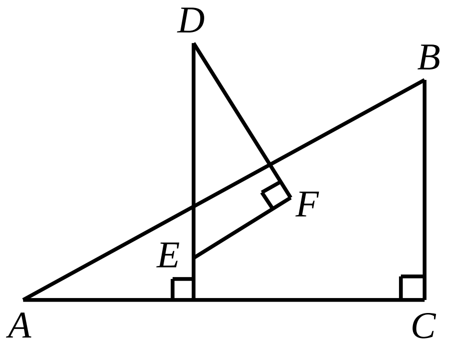


(第 7 題)

7. 已知如圖所示的零件之外徑為 a，要求它的厚度 x，須先求出內孔的直徑 AB，但不能直接量出 AB。現用一個交叉卡鉗(兩條尺長 AC 與 BD 相等)去量，若 $\dfrac{OC}{OA}=\dfrac{OD}{OB}=\dfrac{1}{n}$，且量得 $CD=b$，求厚度 x。

8. 證明：
   (1) 兩個直角三角形有一個銳角相等，兩個三角形相似；
   (2) 兩個等腰三角形的頂角(或底角)相等，兩個三角形相似；
   (3) 兩個等腰三角形中，腰與底對應成比例，兩個三角形相似。

9. 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 為直角；$\triangle DEF$ 中，$\angle F$ 為直角；$DE\perp AC$、$DF\perp AB$。
   求證：$DF=\dfrac{AC}{AB}\bullet DE$。



(第 9 題)

10. 已知：四邊形 $ABCD$ 中，AC 平分 $\angle DAB$、$\angle ACD=\angle ABC$。
    求證：$AC^2=AB\bullet AD$。

11. 設 AD、BE 與 CF 是$\triangle ABC$ 的三條高。
    求證：$AD\bullet BC=BE\bullet CA=CF\bullet AB$ (用比例線段證明)。
    (分$\triangle ABC$ 是銳角三角形、直角三角形與鈍角三角形三種情況。)

12. 已知：$\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ 、 $\angle A = 36°$ 、BD 是角平分線。

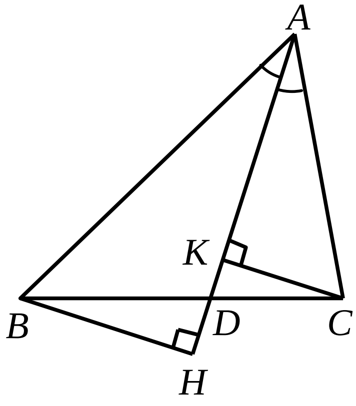
求證： (1) $BD = AD$ ；

(2) $\triangle ABC \sim \triangle BCD$ ；

(3) $BC = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}AB \approx 0.618AB$ 。

13. 已知：AD 是$\triangle ABC$ 的角平分線，$BH \perp AD$ ，垂足為 H，$CH \perp AD$ ，垂足為 K。

求證：$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DH}{DK}$ 。



(第 13 題)

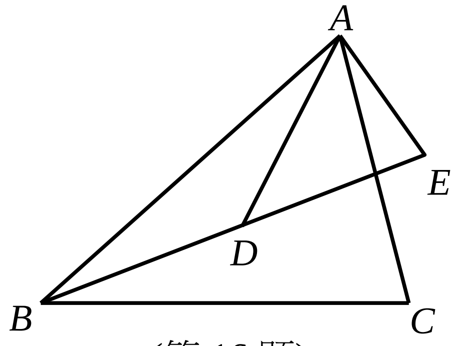
14. 已知：O 是$\triangle ABC$ 內任一點，OA、OB、OC 的中點分別是 A' 、B' 、C' 。

求證：$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ 。

15. 求證：如果一個三角形的兩邊與其中一邊上的中線與另一個三角形的對應部分成比例，那麼這兩個三角形相似。

16. 已知：如圖，$\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DE} = \dfrac{AC}{AE}$ 。

求證：$\angle BAD = \angle CAE$ 。

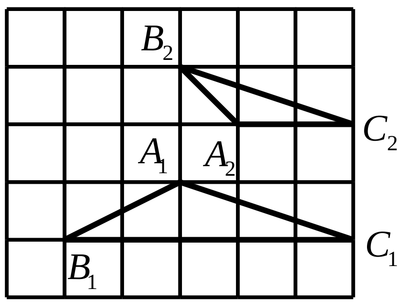


(第 16 題)

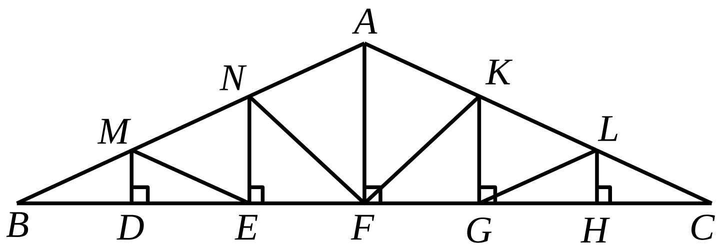
17. 求證：如果一個三角形的兩邊與第三邊上的中線與另一個三角形的對應部分成比例，那麼這兩個三角形相似。

18. 如圖，在正方形網格上有兩個三角形 $A_1B_1C_1$ 與 $A_2B_2C_2$ 。

求證：$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ 。



(第 18 題)



(第 19 題)

19. 如圖，人字型屋架上的六段距離 BD、DE、EF、FG、GH、HC 彼此相等。MD、NE、AF、KG、LH 都垂直於 BC，中柱 $AF = 2\,\mathrm{m}$，求支柱 DM、EN 的長度。

20. 求證：如果一個直角三角形的一條直角邊與斜邊上的高，與另一個直角三角形的一條直角邊與斜邊上的高成比例，那麼這兩個直角三角形相似。

6.8 相似三角形的性質

兩個三角形相似，根據定義可知它們具有對應角相等，對應邊成比例這些性質。下面我們來研究其它性質。

已知 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$。相似比為 k，AD、$A'D'$ 是對應高(圖 6-25)。那麼在 $\triangle ABD$ 與 $\triangle A'B'D'$ 中，$\angle B = \angle B'$、$\angle ADB = \angle A'D'B' = Rt\angle$，所以

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'} = k$$

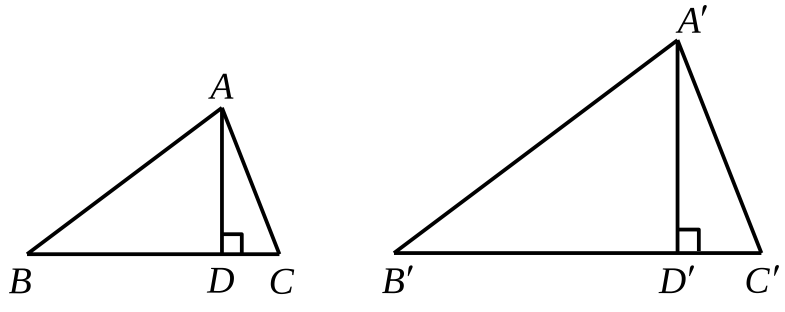


圖 6-25

類似地，可以推得兩個相似三角形對應中線的比，對應角平分線的比也等於相似比。就是

相似三角形對應高的比，對應中線的比與對應角平分線的比都等於相似比。

如圖 6-26，$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，相似比是 k。

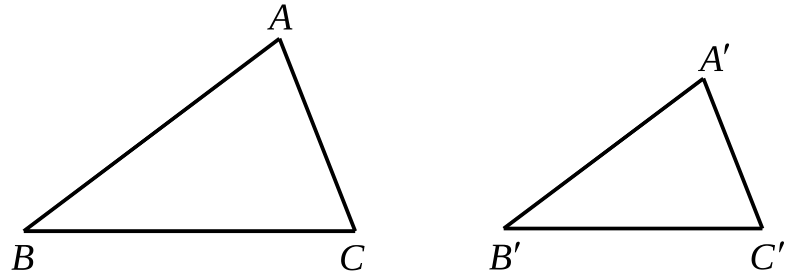


圖 6-26

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = k$$

$$\Rightarrow \frac{AB+BC+CA}{A'B'+B'C'+C'A'} = k$$

由此可得

相似三角形周長的比等於相似比。

如圖 6-25，$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，相似比是 k，AD、$A'D'$ 分別是兩個三角形的高。那麼，

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} \bullet AD \bullet BC}{\frac{1}{2} \bullet A'D' \bullet B'C'} = \frac{AD}{A'D'} \bullet \frac{BC}{B'C'} = k \bullet k = k^2$$

由此得到下面的定理：

定理　　相似三角形面積的比等於相似比之平方。

【例 1】有一塊三角形餘料 ABC，它的邊 $BC = 120\,\text{mm}$，高 $AD = 80\,\text{mm}$ (圖 6-27)。要把它加工成正方形零件，使正方形的一邊在 BC 上，其餘兩個頂點分別在 AB、AC 上。加工成的正方形零件之邊長為多少 mm？

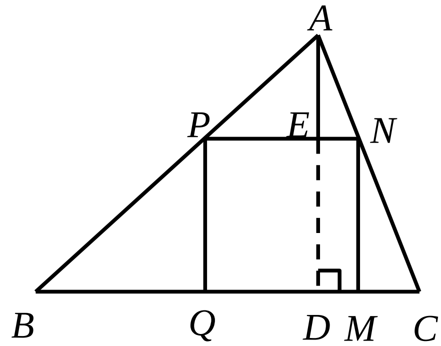


圖 6-27

解　設正方形 $PQMN$ 為加工成的正方形。邊 QM 在 BC 上，頂點 P、N 分別在 AB、AC 上，高 AD 與邊 PN 相交於點 E。設正方形的邊長為 x mm，則有

$$PN \,//\, BC \Rightarrow \triangle APN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{PN}{BC}$$

因此，可以列出方程：

$$\frac{80-x}{80} = \frac{x}{120}$$

解得 $x = 48$。

答：加工成的正方形零件為 48 mm。

【例 2】 已知：如圖 6-28，$DE \,//\, BC$、$\frac{AD}{AB} = \frac{3}{5}$、$S_{\triangle ABC} = S$。

求 $S_{\triangle ADE}$。

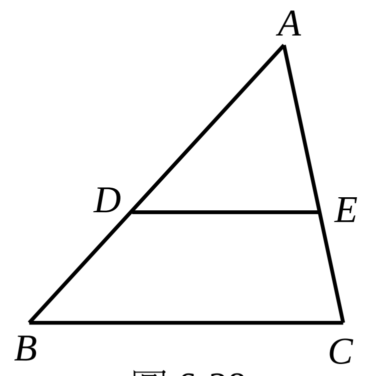


圖 6-28

$\boxed{解}$

$$DE \,//\, BC \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AD^2}{AB^2} \\ \frac{AD}{AB} = \frac{3}{5} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3^2}{5^2}$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow S_{\triangle ADE} = \frac{9}{25} S_{\triangle ABC} \\ S_{\triangle ABC} = S \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ADE} = \frac{9}{25} S$$

【例 3】 已知： $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 中，AD、BE 是 $\triangle ABC$ 的高，$A'D'$、$B'E'$ 是 $\triangle A'B'C'$ 的高，且 $\frac{AB}{AD} = \frac{A'B'}{A'D'}$、$\angle C = \angle C'$ (圖 6-29)。

求證： $\frac{AD}{BE} = \frac{A'D'}{B'E'}$。

分析：　從圖形可知，求證的四條成比例線段並不分別在兩個三角形中，所以不能用直接證兩個三角形相似得出。但我們可以知道這四條線段分別是△ABC 與△$A'B'C'$ 的高，如果能證明△ABC ~ △$A'B'C'$ ，那麼比例就成立了。可是由題設不能直接證得這兩個三角形相似，但可證得△ABD ~ △$A'B'D'$ ，得 $\angle ABC = \angle A'B'C'$ ，從而△ABC ~ △$A'B'C'$ 。

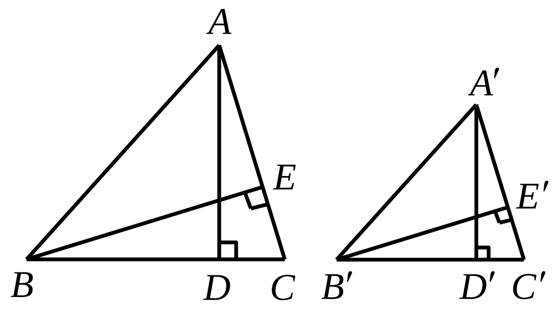


圖 6-29

證明：

$$\left.\begin{aligned} \frac{AB}{AD} &= \frac{A'B'}{A'D'} \\ \angle ADB = \angle A'D'B' &= 90^\circ \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow Rt\triangle ABD \sim Rt\triangle A'B'D'$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \angle ABC &= \angle A'B'C' \\ \angle C &= \angle C' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BE}{B'E'} = \frac{AD}{A'D'}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{BE} = \frac{A'D'}{B'E'}$$

練　習

1. 證明：兩個相似三角形的對應中線之比等於相似比。
2. 已知：點 M、N、P 分別是△ABC 的中線 AD、BE、CF 的中點。求△ABC 與△MNP 面積的比。
3. 把一個三角形改成與它相似的三角形。
   (1) 如果邊長擴大為原來的 100 倍，那麼面積擴大為原來的多少倍？
   (2) 如果面積擴大為原來的 100 倍，那麼邊長擴大為原來的多少倍？

6.9 直角三角形中成比例的線段

從一點到一直線所作垂線的垂足，叫做**這點在這條直線上正射影**。圖 6-30 中，點 P_1'、P_2'、P_3' 分別是點 P_1、P_2、P_3 在直線 MN 上的正射影。

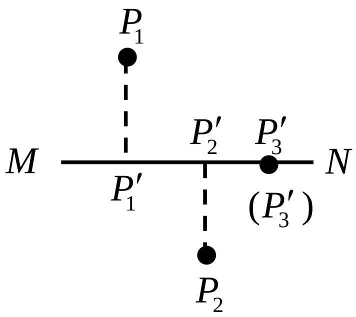


圖 6-30

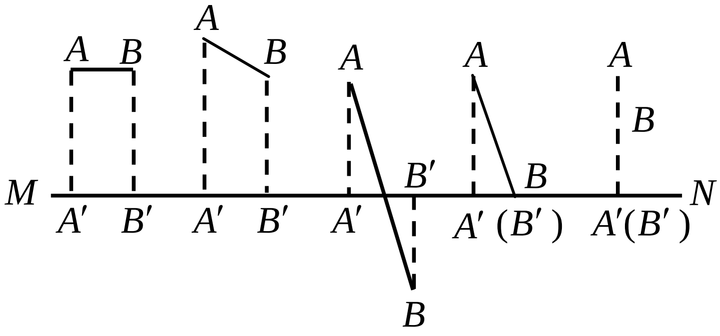


圖 6-31

一條線段的兩個端點在一條直線上的正射影之間的線段，叫做**這條線段在這條直線上的正射影**。圖 6-31 中的那些線段 $A'B'$ 都是對應的線段 AB 在直線 MN 上的正射影(當 $AB \perp MN$ 時，$A'B'$ 縮為一個點)。

點、線段在一條直線上的正射影，簡稱**射影**。

定理　**直角三角形中，斜邊上的高是兩條直角邊在斜邊上的射影之比例中項；每一條直角邊是這條直角邊在斜邊上的射影與斜邊之比例中項。**

已知：　圖 6-32 中，AB 是 $Rt\triangle ABC$ 的斜邊，CD 是高。

求證：　(1)　$CD^2 = AD \bullet BD$

(2)　$AC^2 = AD \bullet AB$

$BC^2 = BD \bullet AB$

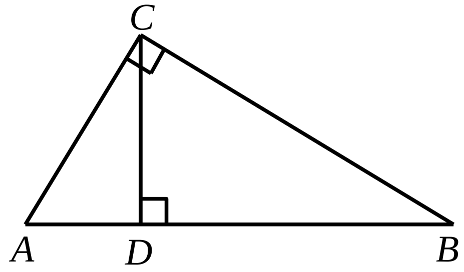


圖 6-32

證明：　(1)　$\left.\begin{aligned} \angle ACB = 90^\circ \\ CD \perp AB \end{aligned}\right\}$

$\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle CBD$

$\Rightarrow \dfrac{CD}{AD} = \dfrac{BD}{CD} \Rightarrow CD^2 = AD \bullet BD$

(2)　的證明由同學自己寫出。

在第五章中，我們曾用面積割補法證明了勾股定理，現在利用上面的定理很容易證明勾股定理。把上面定理中(2)的兩個關係式之兩邊分別相加，得

$$\begin{aligned} AC^2+BC^2 &= AD \bullet AB + BD \bullet AB \\ &= AB(AD+BD) \\ &= AB^2 \end{aligned}$$

【例】 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，CD 是高，CE 是角平分線，$AC = 9\,\text{cm}$，$BC = 12\,\text{cm}$ (圖 6-33)。求 CD、CE 的長。

解 由勾股定理可得

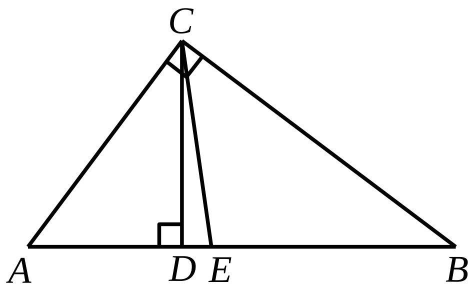


圖 6-33

$AB = \sqrt{AC^2+BC^2} = 15\,\text{cm}$

$\therefore \quad BD = \dfrac{BC^2}{AB} = \dfrac{144}{15} = \dfrac{48}{5}\,\text{cm}$

$AD = AB - BD = \dfrac{27}{5}\,\text{cm}$

$CD = \sqrt{BD \bullet AD} = \dfrac{36}{5}\,\text{cm}$

$\because \quad \angle ACE = \angle BCE$

$\therefore \quad \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{BC}{BE} = \dfrac{AC+BC}{AE+BE}\,\text{cm}$

得 $BE = \dfrac{BC \bullet AB}{AC+BC} = \dfrac{12 \times 15}{9+12} = \dfrac{60}{7}\,\text{cm}$

$DE = BD - BE = \dfrac{48}{5} - \dfrac{60}{7} = \dfrac{36}{35}$

$\therefore \quad CE = \sqrt{CD^2+DE^2} = \sqrt{(\dfrac{36}{5})^2 + (\dfrac{36}{35})^2} = \dfrac{36\sqrt{2}}{7}\,\text{cm}$

練　習

1. 證明本節定理(2)。
2. CD 是 $Rt\triangle ABC$ 的斜邊 AB 上之高。
   (1)　已知 $AD=9\,\text{cm}$、$DB=4\,\text{cm}$。求 CD 與 AC；
   (2)　已知 $AB=25\,\text{cm}$、$BC=15\,\text{cm}$。求 DB 與 CD。
3. 設 CD 是 $Rt\triangle ABC$ 斜邊 AB 上的高。求證：
   (1)　$\dfrac{AC^2}{CB^2}=\dfrac{AD}{DB}$；
   (2)　$CA\bullet CD=CB\bullet AD$。

6.10　相似多邊形

前面，我們研究了相似三角形，現在來研究相似多邊形。

如果兩個邊數相同的多邊形之對應角都相等，對應邊都成比例，這兩個多邊形叫做**相似多邊形**。

例如，四邊形 $ABCD$ 與四邊形 $A'B'C'D'$ 中(圖 6-34)

$$\angle A=\angle A'、\angle B=\angle B'、\angle C=\angle C'、\angle D=\angle D'、$$

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}=\frac{2}{3},$$

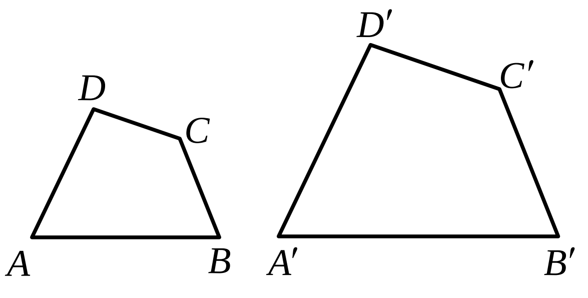


圖 6-34

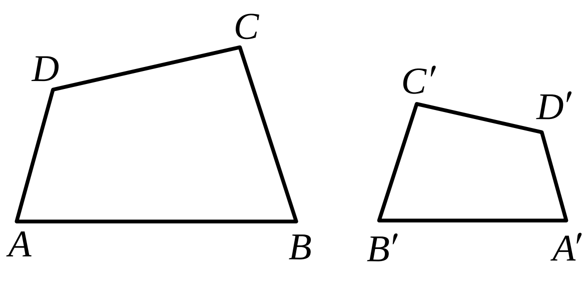


圖 6-35

所以四邊形 $ABCD\sim$ 四邊形 $A'B'C'D'$。

相似多邊形的對應邊之比叫做相似比(或相似係數)。如圖 6-35 中的四邊形 $ABCD\sim A'B'C'D'$，對應邊的比是 $\dfrac{3}{2}$，那麼四邊

形$ABCD$與$A'B'C'D'$的相似比$k_1=\dfrac{3}{2}$。而四邊形$A'B'C'D'$與$ABCD$的相似比是$k_2=\dfrac{2}{3}$。

現在，我們來研究相似多邊形的性質。

我們知道，過多邊形一個頂點的對角線有$n-3$條，它將多邊形分成$n-2$個三角形，由於我們已經學過相似三角形的性質，因此，我們先研究兩個相似多邊形的對應對角線之性質，然後再利用相似三角形來研究相似多邊形。

六邊形$ABCDEF\sim$ 六邊形$A'B'C'D'E'F'$ (圖 6-36)。相似比為k。AC與$A'C'$、AD與$A'D'$、AE與$A'E'$分別是對應對角線。

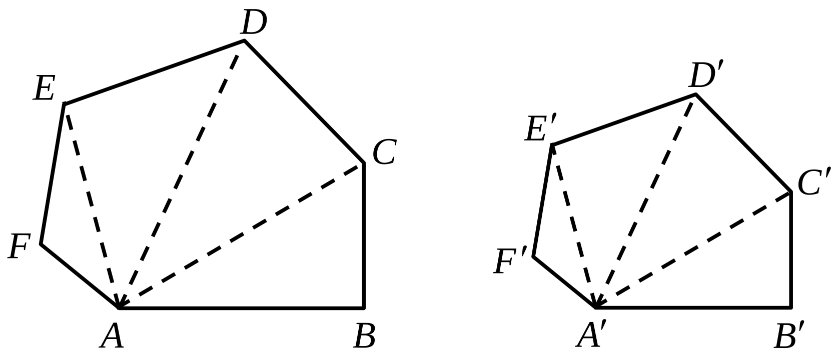


圖 6-36

六邊形$ABCDEF\sim$ 六邊形$A'B'C'D'E'F'$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\angle B=\angle B'\\ \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=k\end{array}\right\}\Rightarrow\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{AC}{A'C'}=k\\ \angle ACB=\angle A'C'B'\end{array}\right.$$

由此又可推出$\angle ACD=\angle A'C'D'$、$\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{DC}{D'C'}=k$。可得到

$$\triangle ACD\sim\triangle A'C'D'\Rightarrow\frac{AD}{A'D'}=k$$

同理可得$\dfrac{AE}{A'E'}=k$。

一般地，可以得到

兩個相似多邊形對應對角線的比等於相似比。

以兩個相似多邊形的對應頂點為頂點之兩個三角形(相似多邊形中的對應三角形)，它們的邊或是多邊形之邊，或是多邊形的對應對角線，所以這樣的兩個三角形之三邊對應成比例，它們是相似三角形。例如 $\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$ 。於是有

定理　　相似多邊形中的對應三角形相似，相似比等於相似多邊形的相似比。

與相似三角形一樣，利用等比定理可得：

定理　　相似多邊形周長的比等於相似比。

我們知道，經過 n 邊形的任何一個頂點之 $n-3$ 條對角線，將多邊形分成 $n-2$ 個環繞著這個頂點按順序排列的三角形。兩個相似 n 邊形分別這樣一組對應對角線分成的對應三角形分別相似。
由等比定理可得：

定理　　相似多邊形的面積比等於相似比之平方。

【例 1】已知四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $A'B'C'D'$ ，它們的對角線分別交於點 O、O' (圖 6-37)。求證：$\triangle OAB \sim \triangle O'A'B'$ 。

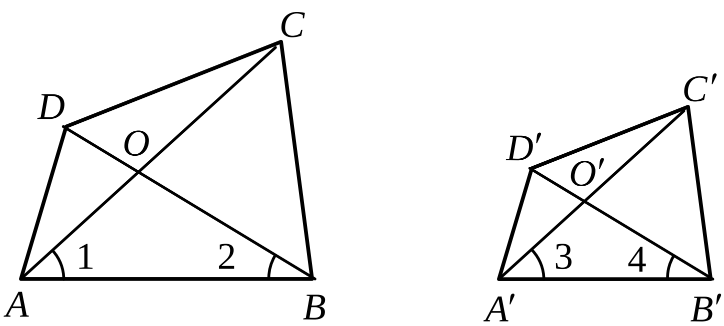


圖 6-37

證明：　四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $A'B'C'D'$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \triangle ABD \sim \triangle A'B'D' \Rightarrow \angle 2 = \angle 4 \\ \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \angle 1 = \angle 3 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle O'A'B'$$

【例 2】 如圖 6-38，已知四邊形 $ABCD$ 與四邊形 $A'B'C'D'$ 中，

$\angle B=\angle B'$ 、 $\angle D=\angle D'$ 、 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{DA}{D'A'}$ 。

求證：四邊形 $ABCD\sim$ 四邊形 $A'B'C'D'$ 。

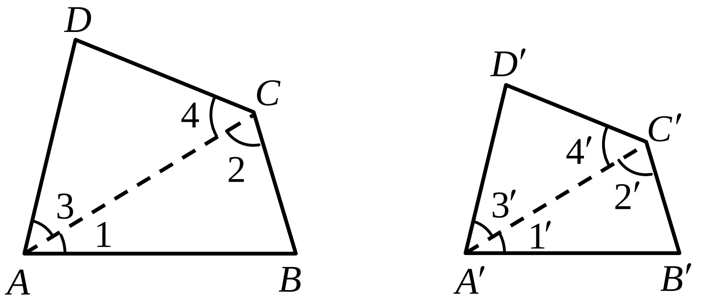


圖 6-38

證明： 連結 AC、 $A'C'$ 。

$$\left.\begin{array}{l}\angle B=\angle B'\\ \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}\end{array}\right\}\Rightarrow \triangle ABC\sim\triangle A'B'C'\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\angle 1=\angle 1'\\ \angle 2=\angle 2'\end{array}\right.$$

同理 $\triangle ADC\sim\triangle A'D'C'\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\angle 3=\angle 3'\\ \angle 4=\angle 4'\end{array}\right.$

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}\angle 1=\angle 1'\\ \angle 3=\angle 3'\end{array}\right\}\Rightarrow \angle BAD=\angle B'A'D'\\ \angle B=\angle B'\\ \left.\begin{array}{l}\angle 2=\angle 2'\\ \angle 4=\angle 4'\end{array}\right\}\Rightarrow \angle BCD=\angle B'C'D'\\ \angle D=\angle D'\\ \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{DA}{D'A'}\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ 四邊形 $ABCD\sim$ 四邊形 $A'B'C'D'$

練　習

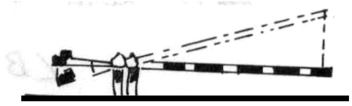
1. 在下表的空白處填入合適的數值：

兩個多邊形的相似比	10					$\frac{1}{100}$
它們周長的比			5	$\frac{1}{8}$		
它們面積的比		4			$\frac{1}{3}$	

2. 在四邊形 $ABCD$ 與四邊形 $A'B'C'D'$ 中，如果 $\angle B=\angle B'$ 、 $\angle C=\angle C'$ 、 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}$ ，那麼，這兩個四邊形相似。

習　題　二　十　二

1. 如圖，鐵道口的欄桿之短臂長 1.25 m、長臂長 16.5 m。當短臂端點下降 0.85 m 時，長臂端點升高多少(桿的寬度忽略不計)？



(第 1 題)

2. $\triangle ABC$ 中，$AB=12\,\text{cm}$，$BC=18\,\text{cm}$，$CA=24\,\text{cm}$。另一個與它相似的 $\triangle A'B'C'$ ，周長為 81cm，求 $\triangle A'B'C'$ 的各邊長。

3. 兩個相似三角形的一對對應邊長分別為 35 cm 與 14 cm。
   (1) 它們的周長相差 60 cm，求這兩個三角形的周長；
   (2) 它們的面積相差 588 cm^2，求這兩個三角形的面積。

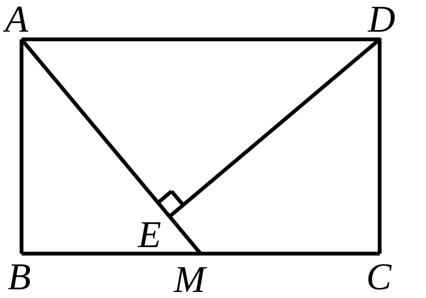
4. CD 是 $Rt\triangle ABC$ 斜邊 AB 上的高。設 $BC=a$、$CA=b$、$AB=c$、$CD=h$ 、 $AD=q$ 、 $DB=p$ 。
   (1) 已知：$c=29$ 、 $p=4$ ，求 h 與 b；
   (2) 已知：$a=5$ 、 $h=4$ ，求 p 與 q；
   (3) 已知：$a=10$ 、 $p=6$ ，求 q 與 b；
   (4) 已知：$p=4$ 、 $h=10$ ，求 a 與 b。

5. 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC$ 是直角，$AC > AB$，AD 是高，M 是 BC 的中點。求證：$AC^2 - AB^2 = 2DM \bullet BC$。

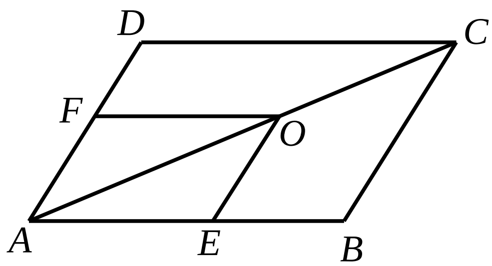
6. $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC$ 是直角，AD 是高，DE 是$\triangle ABD$ 的高。求證：$AD^2 = AC \bullet DE$。

7. $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC$ 是直角，AD 是高。求證：
   (1) 如果 $AB = 2AC$，那麼 $5AD = 2BC$；
   (2) 如果 $BC = 5DC$，那麼 $BC^2 = 5AC^2$。

8. 矩形 $ABCD$ 中，$AB = a$、$BC = b$、M 是 BC 的中點、$DE \perp AM$，E 是垂足。求證：$DE = \dfrac{2ab}{\sqrt{4a^2 + b^2}}$。



(第 8 題)



(第 10 題)

9. 在一張比例尺為 1∶50000 的地圖上，一塊多邊形地區的周長是 72 cm，面積是 320 cm^2。地區的實際周長是多少？面積是多少？

10. 如圖，設 O 是四邊形 $ABCD$ 對角線 AC 上的一點，$OF // CD$、$OE // BC$。求證：四邊形 $AEOF \sim$ 四邊形 $ABCD$。

11. 已知：四邊形 $ABCD$ 與四邊形 $A'B'C'D'$ 中，$\angle A = \angle A'$、$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{DA}{D'A'}$。
    求證：四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $A'B'C'D'$。

三、位似圖形*

6.11 位似形

現在，我們來研究相似形的一種特殊情形。

如圖 6-39，O 是四邊形 $ABCD$ 內的任一點，A'、B'、C'、D' 分別是 OA、OB、OC、OD 的點。

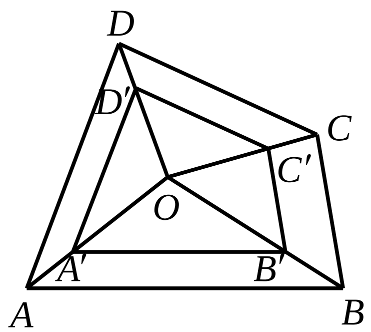


圖 6-39

$$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{OD'}{OD}=\frac{2}{3}$$

可以證明四邊形 $A'B'C'D' \sim$ 四邊形 $ABCD$，並且相似比為 $\frac{2}{3}$。

$$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC} \Rightarrow \begin{cases} A'B' \,//\, AB \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{OB'}{OB}=\dfrac{2}{3} \\ \angle OB'A'=\angle OBA \end{cases} \\ B'C' \,//\, BC \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{OB'}{OB}=\dfrac{2}{3} \\ \angle OB'C'=\angle OBC \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{2}{3} \\ \angle A'B'C'=\angle ABC \end{cases}$$

同理可得 $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{C'D'}{CD}=\dfrac{D'A'}{DA}=\dfrac{2}{3}$

$\angle B'C'D'=\angle BCD$、$\angle C'D'A'=\angle CDA$、

$\angle D'A'B'=\angle DAB$

$\therefore$ 四邊形 $A'B'C'D' \sim$ 四邊形 $ABCD$，相似比為 $\frac{2}{3}$。

---

* 此大節為選學內容。

由此看出，在四邊形 $ABCD$ 與四邊形 $A'B'C'D'$ 中，如果有：(1) 對應頂點 A' 與 A、B' 與 B、C' 與 C、D' 與 D 的連線都經過同一點 O；(2) $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{OD'}{OD}=\frac{2}{3}$，那麼四邊形 $A'B'C'D'$ 與四邊形 $ABCD$ 相似，相似比等於 $\frac{2}{3}$，這樣的兩個四邊形有特殊的位置關係。

如果一個圖形上的點 A'、B'、⋯、P' 與另一個圖形上的點 A、B、⋯、P 分別對應，並且

(1) 直線 $A'A$、$B'B$、⋯、$P'P$ 都經過同一點 O；

(2) $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\cdots=\frac{OP'}{OP}=k$，

那麼這兩個圖形叫做**位似圖形**，點 O 叫做**位似中心**。

位似圖形不僅形狀相同，而且有特殊的位置關係。

對於兩個多邊形來說，只要它們的對應頂點 A'、B'、⋯、P' 與 A、B、⋯、P 有上面的(1)、(2)兩個關係，這兩個多邊形就是位似多邊形。如圖 6-39 中的四邊形 $A'B'C'D'$ 與四邊形 $ABCD$ 是位似四邊形。

用類似的方法，可以證明(由同學自己證明)

兩個位似多邊形一定相似，它們的相似比等於對應頂點與位似中心的距離之比，它們的各對對應邊分別平行。

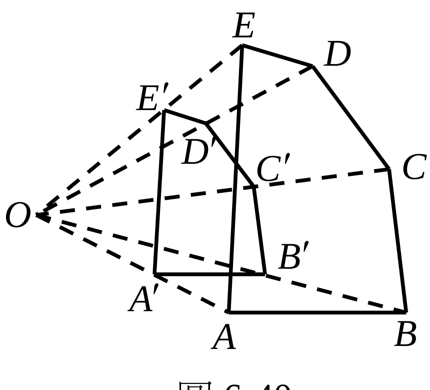


圖 6-40

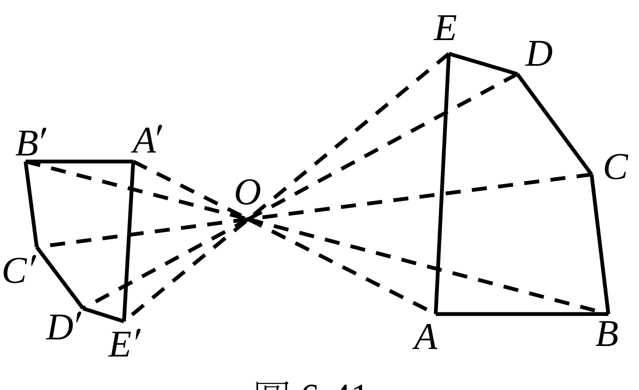


圖 6-41

兩個位似圖形的各對對應點可以全部都在位似中心的同旁，這時這兩個位似圖形叫做**相互外位似**，位似中心叫做**外位似中心**；也可以全部都在位似中心的兩旁，這時這兩個位似圖形叫

做**相互內位似**，位似中心叫做**內位似中心**。例如，圖 6-40 中，五邊形 $A'B'C'D'E'$ 與五邊形 $ABCDE$ 相互外位似，點 O 為外位似中心。圖 6-41 中，五邊形 $A'B'C'D'E'$ 與五邊形 $ABCDE$ 相互內位似，點 O 為內位似中心。

【例】 已知： 銳角三角形 ABC (圖 6-42)。

求作： 矩形 $DEFG$，使 DE 在邊 BC 上，點 G 與 F 分別在邊 AB 與 AC 上，且有 $DE：GD = 2：1$

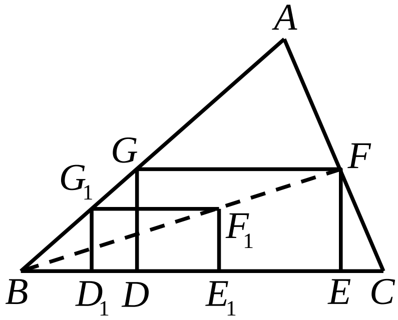


圖 6-42

作法：
1. 在 AB 上任取一點 G_1，作 $G_1D_1 \perp BC$，垂足為 D_1。
2. 在 D_1C (或其延長線)上取一點 E_1，使得 $D_1E_1 = 2G_1D_1$。
3. 以 G_1D_1、D_1E_1 為鄰邊作矩形 $D_1E_1F_1G_1$。
4. 作射線 BF_1，交 AC 於點 F。
5. 作 $FE // F_1E_1$，交 BC 於點 E；作 $FG // F_1G_1$，交 AB 於點 G；作 $GD // G_1D_1$，交 BC 於點 D。

四邊形 $DEFG$ 就是所求的矩形。

證明： 由作法知，DE 在 BC 上，點 G、F 分別在 AB、AC 上。又 DD_1、EE_1、FF_1、GG_1 相交於點 B，

且 $\dfrac{BE}{BE_1} = \dfrac{BF}{BF_1} = \dfrac{BG}{BG_1} = \dfrac{BD}{BD_1}$

$\therefore$ 四邊形 $DEFG$ 肓與四邊形 $D_1E_1F_1G_1$ 位似。

$\because$ 四邊形 $D_1E_1F_1G_1$ 是矩形，且

$$D_1E_1 ： G_1D_1 = 2：1$$

$\therefore$ 四邊形 $DEFG$ 是矩形，且 $DE：GD = 2：1$。

實際畫圖使用的一種工具——放縮尺，就是根據已知圖形作出它的位似圖形之道理製成的。應用它可以按指定的比把各種圖形進行放大或縮小。如圖 6-43，把鑽有若干小孔的四條直尺用螺栓分別在點 A、B、C、D 連結起來，使直尺可以繞著這些點轉動，並使

$OD=DA=CB$ 、 $DC=AB=BA'$ 。

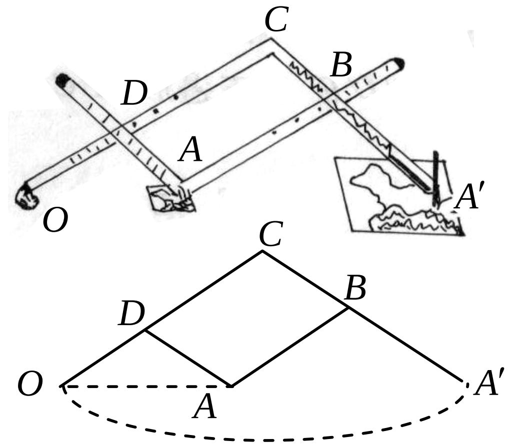


圖 6-43

根據以上構造可知：不論直尺如何轉動，四邊形 $ABCD$ 總是平行四邊形，而△ODA 與△OCA' 都是等腰三角形，並且

$$\angle ODA=\angle OCA'$$

$$\angle DOA=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ODA)$$

$$=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle OCA')$$

$$=\angle COA'$$

從而得點 O、A、 A' 在同一直線上，

$$\frac{OA'}{OA}=\frac{OC}{OD}=k \quad 或 \quad \frac{OA}{OA'}=\frac{OD}{OC}=\frac{1}{k}$$

於是，當點 O 的位置固定時，不論各尺如何轉動，點 A' 與 A 都是以點 O 為外位似中心，以 k 為相似比的外位似圖形之對應點，點 A 與點 A' 都是以點 O 為外位似中心，以 $\frac{1}{k}$ 為相似比的外位似圖形之對應點。

當我們放大某一給定圖形時，將這個圖形固定在點 A 處的下方，在尺上的點 A 處裝上尖針；將空白的圖紙固定在點 A' 處的下方，在尺上的點 A' 處裝上畫圖筆。當尺上的尖針 A 沿所給的圖形移動時，尺上點 A' 處的畫圖筆尖就可以在空白圖紙上畫出把所給

圖形放大成原來的$\dfrac{OC}{OD}$倍之圖形。

交換上數的尖針與畫圖筆之位置，也交換所給圖形與空白圖紙的位置，就可以畫出把所給圖形縮小成原來$\dfrac{OD}{OC}$的圖形。

改變螺栓所在的小孔 B 與 D，可以調整放大或縮小的比。

練　習

1. 作一個四邊形 $A'B'C'D'$ 與已知四邊形 $ABCD$ 外位似，相似比 $k=\dfrac{3}{4}$，外位似中心取在 (1) $ABCD$ 的外部；(2) $ABCD$ 的一條邊上；(3) $ABCD$ 的一個頂點。
2. 作一個四邊形 $A'B'C'D'$ 與已知四邊形 $ABCD$ 內位似，相似比 $k=\dfrac{3}{4}$，外位似中心取在 (1) 外部；(2) 內部。

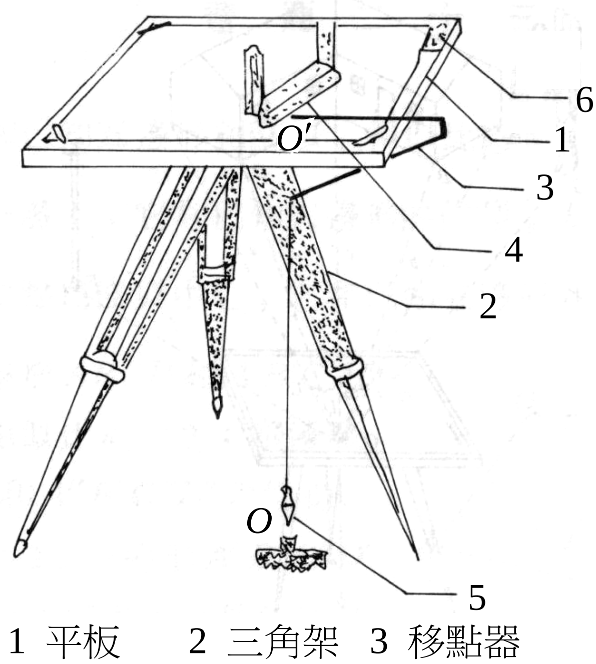
6.12　用小平板儀測繪平面圖

在興修水利、規劃農田、竹路架橋基建工程中，常用小平板儀測繪平面圖。下面介紹使用一種比較簡單的小平板儀進行測量之原理。

小平板儀是用三角架支撐的正方形平板，在平板上放圖紙用來繪製測出的平面圖(圖 6-44)。

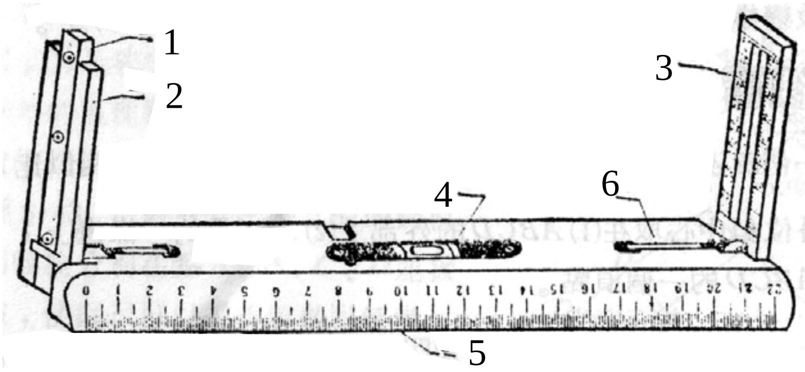
照準儀是用來觀測、繪圖的工具(圖 6-45)。

測繪時還要用到移點器、方框羅盤、標桿、捲尺、測繩等工具。



1 平板　2 三角架　3 移點器
4 照準儀　5 重錘　6 方框羅盤

圖 6-44



1 伸拔板 2 覘孔板 3 分劃板 4 水平管 5 直尺 6 水平校正桿

圖 6-45

繪製平面圖形，當測繪地區範圍不很大，能夠選定測站使它能通視各測點並直接測量該測站到各測點的距離時，可以使用射線法。

如圖 6-46，在測站 O 安裝小平板儀，使平板成水平位置，然後在圖紙上標出與點 O 對應相等的點 O'，測出點 O 與點 A 的距離，再用照準儀在圖紙上畫出 OA 的方向線 a，並按預定的比例尺 $1:k$ 在 a 上畫出 $O'A'$。這樣，就在圖紙上確定了與測點 A 相對應的點 A'。

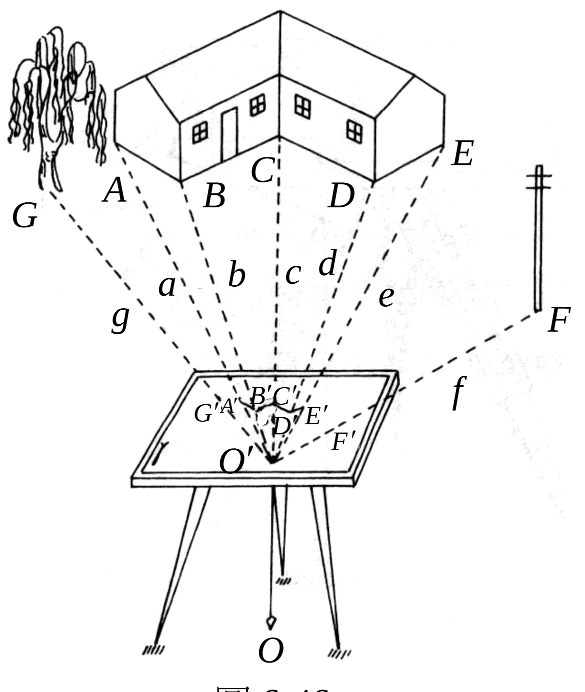


圖 6-46

用同樣的方法，可在圖紙上測定方向線 b、c、…上的測點 B、C、…相對應的點 B'、C'、…之位置。

所有各測點的位置都在圖紙上確定後，該地區的平面圖就可以描繪成了。

如果把上述測繪過程中的圖紙上之點 O' 與實際的測站 O 看作為同一個點，那麼，點 A' 與 A、B' 與 B、C' 與 C、…的連線都經過同一點，而且

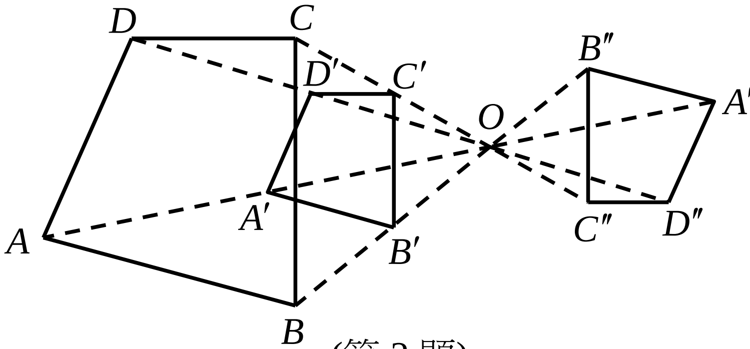
$$\frac{O'A'}{O'A}=\frac{O'B'}{O'B}=\frac{O'C'}{O'C}=\cdots=\frac{1}{k}$$

點 A'、B'、C'、…與點 A、B、C、…是以點 O' 為位似中心，相似比為 $\dfrac{1}{k}$ 的外位似對應點。這樣就可以畫出比例尺為 1：k 的平面圖。

習　題　二　十　三

1. 作五邊形與已知五邊形相位似，相似比為 k：
   (1) 位似中心取在已知五邊形的一邊上，它與已知五邊形內位似，$k=\dfrac{4}{3}$；
   (2) 取已知五邊形的一個頂點為位似中心，它與已知五邊形外位似，$k=\dfrac{3}{4}$。

2. 如圖，四邊形 $ABCD$ 與四邊形 $A'B'C'D'$ 外位似，相似比 $k_1=2$；四邊形 $A'B'C'D'$ 與 $A''B''C''D''$ 內位似，相似比 $k_2=1$。四邊形 $A''B''C''D''$ 與 $ABCD$ 位似嗎？是哪種位似？相似比是什麼？

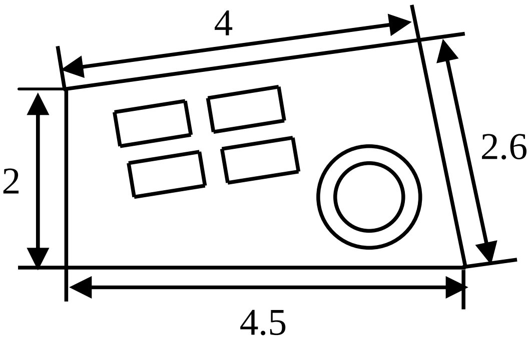


(第 2 題)

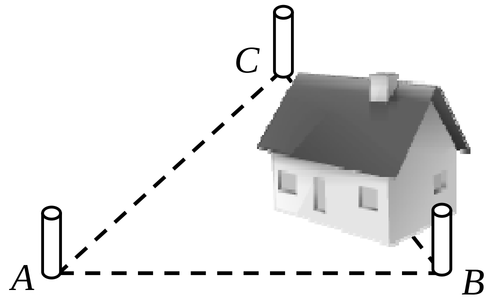
3. 運用位似圖形的性質，作已知銳角三角形的內接正方形，使它的一邊在已知三角形的一邊上，另兩個頂點分別在已知三角形的其餘兩邊上。

4. 利用放縮尺把一張簡易地圖放大，使放大圖與原圖的相似比為 2：1。

5. 如圖的平面圖之比例尺是 1∶5000，根據圖中的所示之尺寸(單位：cm)，求圍牆的長度。



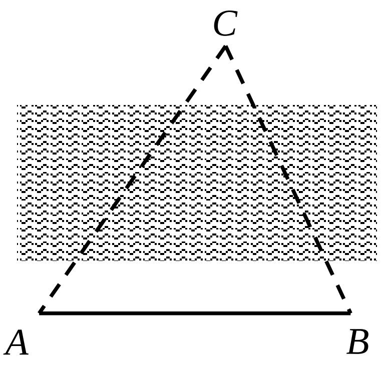
(第 5 題)



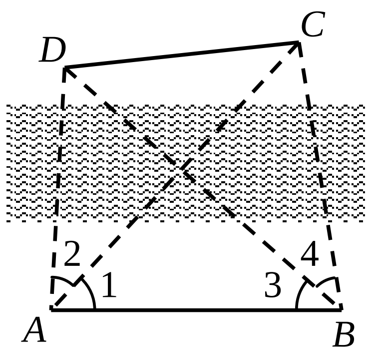
(第 6 題)

6. 如圖，點 B 與 C 之間的距離因有障礙不能直接測量。現測得 $AB = 52\,\text{m}$、$AC = 41\,\text{m}$、$\angle BAC = 42°$。試按 1：1000 的比例尺畫出△ABC，量出 BC 的長，求出實際距離。

7. 河的對岸有一個目標 C。已測得 $AB = 45\,\text{m}$、$\angle CAB = 55°$、$\angle CBA = 65°$。用 1：1000 的比例尺畫出△ABC，量出 AC、BC 的長，並求出實際距離。



(第 7 題)



(第 8 題)

8. 如圖，已測得 $AB = 78\,\text{m}$、$\angle 1 = 47°$、$\angle 2 = 40°$、$\angle 3 = 41°$、$\angle 4 = 40°$。按 1：2000 的比例尺畫出圖形，量出圖中 CD 的長，求出實際距離。

9. 利用小平板儀測繪操場周圍或校園的平面圖(用射線法)。

小　结

一、本章主要內容是比例的性質、比例線段的有關定理，相似三角形與相似多邊形的概念、判定與性質，以及關於位似圖形的一些初步知識與應用。

二、一般比例中的各項都是實數，由於線段的長度是正數，兩條線段的比值一定是正數。

三、平行線分線段成比例定理是相似形中的基本定理，它把直線的平行性質與成比例線段聯繫起來，平行於三角形一邊的直線與三角形的另外兩邊或兩邊之延長線相交，所得的對應線段成比例是平行線分線段成比例定理的重要推論，它的逆命題是判定相似之重要依據。

四、在證明三角形內、外角平分線性質時，添加了平行線來轉移比例，證明比例線段時，常添加這種平行線作為輔助線。

五、全等三角形是相似比為 1 的特殊之相似三角形。兩個三角形相似的判定與性質及三角形全等的判定與性質相類似，後者是前者的特例。判定兩個三角形相似與研究相似三角形時，同樣要注意角、邊的對應關係。

判定三角形相似的條件有：

1. 一個角對應相等，夾這個角的兩邊對應成比例；
2. 兩個角對應相等；
3. 三邊對應成比例；
4. 兩個直角三角形的斜邊與一條直角邊對應成比例。

當相似比等於 1 時，上面判定三角形相似的定理，就成為相應判定三角形全等的定理：「*SAS*」;「*ASA*」(或「*AAS*」)；「*SSS*」；「*RHS*」。

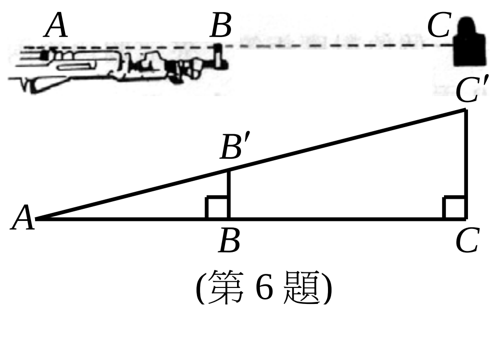
相似三角形的相似比是對應邊之比；對應的中線、高、角平分線及周長的比都等於相似比，面積比等於相似比的平方。

六、相似多邊形對應對角線的比與周長的比都等於相似比，面積比等於相似比的平方，以相似多邊形三個對應頂點為頂點的對應三角形相似。

*七、兩個圖形的對應點連線交於一點，並且對應點到這點的距離成比例時，這兩個圖形就是位似圖形。位似圖形一定是相似形，位似圖形是具有特殊相對位置的相似形。位似理論是測繪的基礎。

複習參考題六

1. $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$、AD 為 BC 邊上的高，AD 的中點為 M，CM 的延長線交 AB 於點 K。求證：$AB = 3AK$。
2. 已知：$\triangle ABC$ 中，$AB = 15$、$AC = 20$、高 $AD = 12$。求角平分線 AE 的長。
3. O 是四邊形 $ABCD$ 對角線 AC 的中點，OE、OF、OG、OH 分別是 $\angle AOB$、$\angle BOC$、$\angle COD$、$\angle DOA$ 的平分線，且分別與 AB、BC、CD、DA 交於點 E、F、G、H。求證：$EF // GH$。
4. $\triangle ABC$ 中，角平分線 AD、DE 交於點 I。求證：$\dfrac{AI}{ID} = \dfrac{AB + AC}{BC}$。
5. $\square ABCD$ 中，$\angle DAB$ 的平分線交 BD 於點 P、$\angle ADC$ 的平分線交 CA 於點 Q。求證：$PQ // DA$。
6. 射擊瞄準時，要求槍的標尺缺口上沿中央 A、準星尖 B 與瞄準點 C 在一條直線上(上圖)，這樣才能命中目標。已知某種衝鋒槍基線 AB 長 38.5 cm(下圖)，如果射擊距離 $AC = 100\,\text{m}$，當準星尖在缺口內偏差 BB' 為 1 mm 時，彈着偏差 CC' 是多少($BB' // CC'$)？



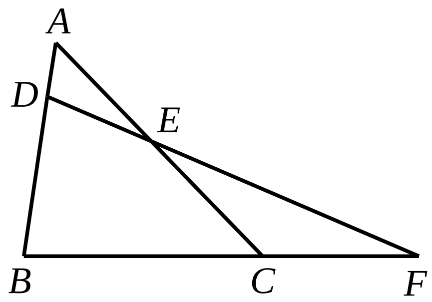
(第 6 題)

7. 在$\triangle ABC$ ($AB > AC$)的邊 AB 上取一點 D，在邊 AC 上取一點 E，使 $AD = AE$，直線 DE 與 BC 的延長線交於點 P。求證：BC：$CP = BD$：CE。(提示：經過點 C 作 AB 的平行線。)

8. 已知：$\triangle ABC$ 中，中線 BE 與角平分線 AD 交於點 K，$BL \parallel KC$，交 AC 的延長線於點 L。求證：$LC = AB$。

9. 過$\triangle ABC$ 的頂點 C 作一直線，與邊 AB 及中線 AD 分別交於點 F 及 E。求證：$AE : ED = 2AF : FB$。

10. 如圖，$BD = CE$。
求證：$AC \bullet EF = AB \bullet DF$。

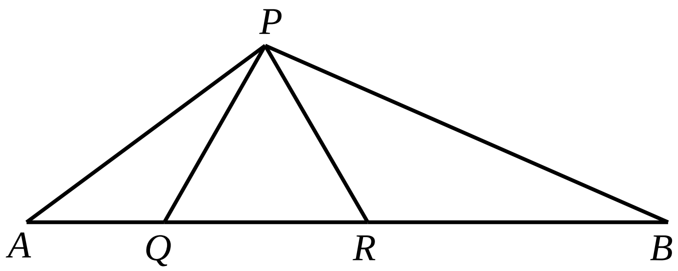


(第 10 題)

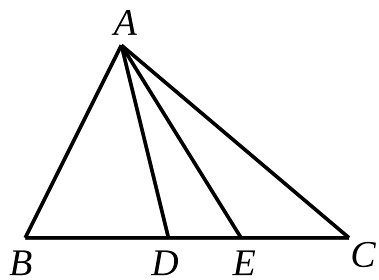
11. 一直線與梯形 $ABCD$ 的底 AD 平行，與 AB、BD、AC、CD 分別交於點 E、F、G、H。求證：$EF = GH$。

12. $Rt\triangle ABC$ 中有正方形 $DEFG$，點 D、G 分別在 AB、AC 上，EF 在斜邊 BC 上。求證：$EF^2 = BE \bullet FC$。

13. 已知：如圖，$\triangle PQR$ 是等邊三角形，$\angle APB = 120°$。求證：
(1) $\triangle PAQ \sim \triangle BPR$；
(2) $AQ \bullet RB = QR^2$。



(第 13 題)



(第 14 題)

14. 已知：D、E 是$\triangle ABC$ 邊 BC 上的兩點，且 $\angle BAD = \angle C$、$\angle DAE = \angle EAC$。求證：$\dfrac{BD}{BA} = \dfrac{DE}{EC}$。

15. AD 為$\triangle ABC$ ($AB > AC$)的角平分線，AD 的垂直平分線與 BC 的延長線交於點 E。求證：$DE^2 = BE \bullet CE$。

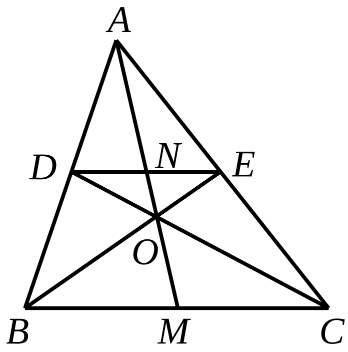
16. 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 是直角，CD 是高，AE 是角平分線。
求證：$\dfrac{CE}{EB} = \dfrac{CD}{CB}$。

17. 已知：$\triangle ABC$，AD 是高，且 $AD^2 = BD \bullet CD$。求證：$\angle BAC = 90°$

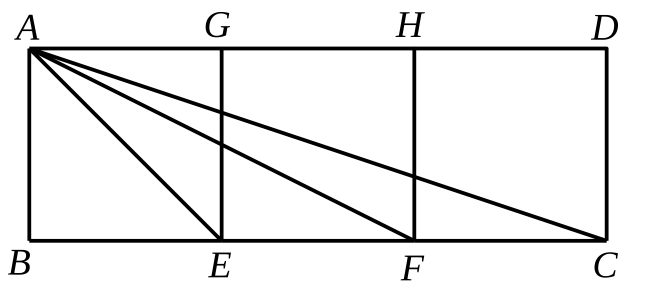
18. AH、$A'H'$ 分別是兩銳角三角形 ABC 與 $A'B'C'$ 的高，並且 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AH}{A'H'}$。求證：$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$。

19. AD、$A'D'$ 分別是 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 的角平分線，並且 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BD}{B'D'}=\dfrac{AD}{A'D'}$。求證：$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$。

20. 已知，如圖，$\triangle ABC$ 中，$DE \parallel BC$，BE 與 CD 交於點 O，AO 與 DE、BC 分別交於點 N、M。求證：$\dfrac{AN}{AM}=\dfrac{ON}{OM}$。



(第 20 題)



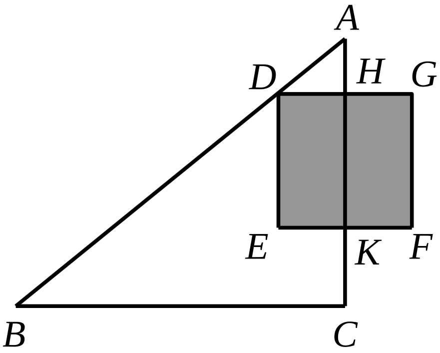
(第 21 題)

21. 如圖，四邊形 $ABEG$、$GEFH$、$HFCD$ 都是邊長為 a 的正方形。
    (1) 計算 AE、AF、AC 的長；
    (2) 求證：$\triangle AEF \sim \triangle CEA$；
    (3) 求證：$\angle AFB + \angle ACB = 45^\circ$。

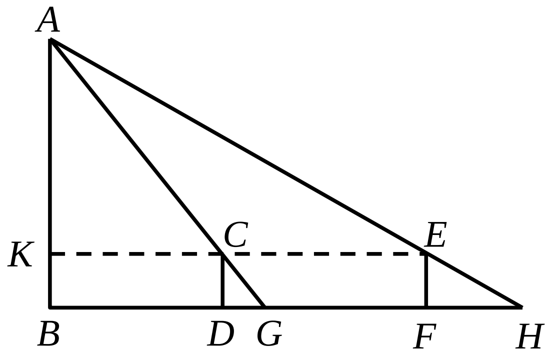
22. $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，$\angle A=\angle D$、$\angle B=\angle E$、$AB=EF$、$BC=DF$。這兩個三角形相似嗎？全等嗎？設 $AB=1$、$BC=1.1$，找出符合條件的兩個三角形之邊長。

23. *如圖，正方形城邑 $DEFG$ 的四面正中各有城門，出北門 20 步的 A 處($HA=20$ 步)有一樹木，出南門 14 步到 C 處($KC=14$ 步)，再向西行 1775 步到 B 處($CB=1775$ 步)，正好看到 A 處的樹木(點 D 在直線 AB 上)。求城邑的邊長 x ($FG=x$)。

* 本題是古代數學書《九章算經》中「勾股」章的第二十題。原文是：「今有邑不知大小，各中開門，出北門二十步有木，出南門十四步折而西行一千七百五十五步見木，問邑方幾何。」



(第 23 題)



(第 24 題)

24. [*]為了求出海島上的山峰 *AB* 之高度，在 *D* 與 *F* 處豎立標桿 *DC* 與 *FE*，標桿的高都是 3 丈，相隔 1000 步(1 步等於 5 尺)，並且 *AB*、*CD* 與 *EF* 在同一平面內，從標桿 *DC* 後退 123 步的 *G* 處，可看到山峰 *A* 與標桿頂端 *C* 在一直線上；從標桿 *FE* 後退 127 步的 *H* 處，可看到山峰 *A* 與標桿頂端 *E* 在一直線上。求山峰的高度 *AB* 及它與標桿 *CD* 的水平距離 *BD* 各是多少？(提示：連結 *EC* 並延長交 *AB* 於點 *K*，用 *AK* 表示 *KC* 及 *KE*。)

25. 已知：正方形 *ABCD*，*E* 是 *AB* 的中點，*F* 是 *AD* 上的一點，且 $AF=\dfrac{1}{4}AD$、$EG\perp CF$，垂足為 *G*。求證：$EG^2=CG\bullet FG$。

*26. 作一個等邊三角形，使它的三個頂點分別在△*ABC* 的三邊上，並且有一邊與 *BC* 平行。

---

[*] 本題是魏晉時數學家劉徽所著《海島算經》中九個代表性數學問題的第一題。原文是：「今有望海島，立兩表齊高三丈，前後相去千步，今後表與前表參相直，從前表却行一百二十三步，人目着地取望島峰與表末參合，從後表却行一百二十七步，人目着地取望島峰亦與表末參合。問島高及去表各幾何。」