第七章　　圓

一、圓的有關性質

7.1　點與圓的位置關係

在日常生活中，我們到處都會見到圓形的物體。如各種車輪、茶杯的杯口等都是圓形的。人們為什麼把它們做成圓形的呢？這是因為圓形具有許多有用的性質。在本章中，我們將詳細研究圓的性質及其應用。

如圖 7-1，線段 OA 繞它固定的一個端點 O 旋轉一周，另一個端點 A 所經過的封閉曲線叫做**圓**。固定的點 O 叫做**圓心**；線段 OA 叫做**半徑**。

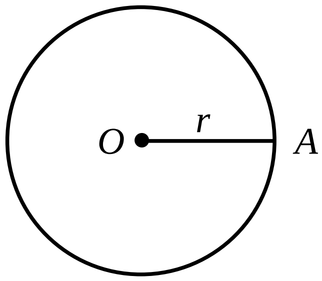


圖 7-1

從上面的定義可以知道：

(1)　圓上各點到定點(圓心 O)的距離都等於定長(半徑的長 r)；

(2)　到定點的距離等於定長的點都在圓上。

也就是說，圓是那些到定點的距離等於定長的所有點組成之圖形。

圓可以看作是到定點的距離等於定長的點之集合。定點就是圓心，定長就是半徑的長，通常也稱為半徑。

從畫圓的過程中，還可以知道：

圓內各點(如圖 7-2 中的點 P)到圓心的距離都小於半徑；到圓心的距離小於半徑的點都在圓內。也就是說，**圓的內部可以看作是到圓心的距離小於半徑的點之集合**。圓外各點(如圖 7-2 中的點 Q)到圓心的距離都大於半徑；到圓心的距離大於半徑的點都在圓外。也就是說，**圓的外部可以看作是到圓心的距離大於半徑的點之集合**。

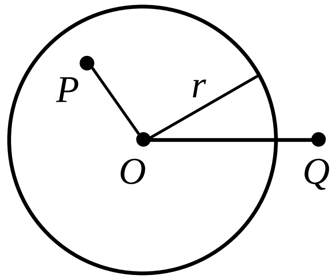


圖 7-2

以點 O 為圓心的圓，記作「$\odot O$」，讀作「圓 O」。

連結圓上任意兩點的線段(如圖 7-3 中的 CD)叫做**弦**，經過圓心的弦(如圖 7-3 中的 AB)叫做**直徑**。直徑等於半徑的 2 倍。

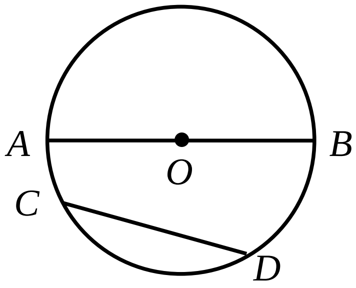


圖 7-3

圓上任意兩點間的部分叫做**圓弧**，簡稱弧。弧用符號「$\frown$」表示。以 A、B 為端點的弧記作 $\overset{\frown}{AB}$，讀作「圓弧 AB」，或「弧 AB」。圓的任意一條直徑之兩個端點分圓成兩條弧，每一條弧都叫做**半圓**。大於半圓的弧(用三個字母表示，如圖 7-4 中的 $\overset{\frown}{BAC}$)叫做**優弧**；小於半圓的弧(如圖 7-4 中的 $\overset{\frown}{BC}$)叫做**劣弧**。

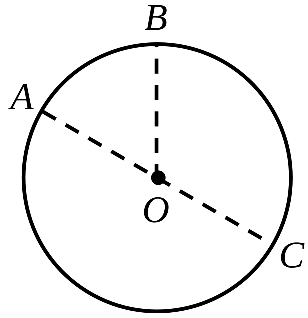


圖 7-4

圓心相同、半徑不等的兩個圓叫做**同心圓**。圖 7-5 中的兩個圓是以點 O 為圓心的同心圓。

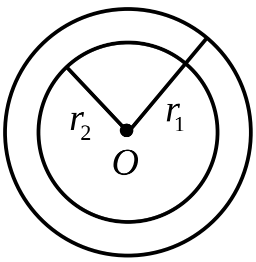


圖 7-5

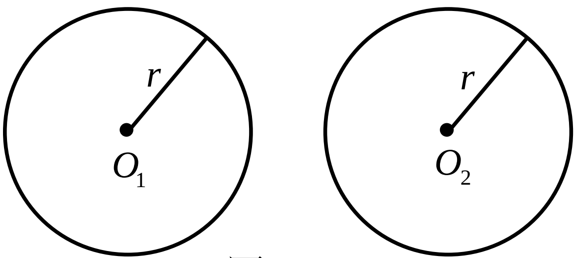


圖 7-6

能夠重合的兩個圓叫做**等圓**。半徑相等的兩個圓是等圓。如圖 7-6 中，$\odot O_1$與$\odot O_2$的半徑都等於 r，所以它們是兩個等圓。反過來，**同圓或等圓的半徑相等**。

在同圓或等圓中，能夠互相重合的弧叫做**等弧**。

練 習

1. 設 $AB = 3\,\text{cm}$，畫圖說明具有下列性質的點之集合是怎樣的圖形：
   (1) 與點 A 的距離等於 2 cm 的點之集合；
   (2) 與點 B 的距離等於 2 cm 的點之集合；
   (3) 與點 A、B 的距離都等於 2 cm 的點之集合；
   (4) 與點 A、B 的距離都小於 2 cm 的點之集合。

練　習

2. 下列各題中的兩句話都對嗎？如果不對，為什麼？
   (1) 「直徑是弦」、「弦是直徑」；
   (2) 「半圓是弧」、「弧是半圓」。

3. 適合下列條件的圓，各畫三個：
   (1) 以已知點 O 為圓心的圓；
   (2) 半徑等於 2.5 cm 的圓；
   (3) 經過已知點 A 的圓；
   (4) 經過已知點 A 與 B 的圓。

7.2　經過三點的圓

我們知道，經過一個點 A 作圓很容易，只要以點 A 以外的任意一點為圓心，以這一點與點 A 的距離為半徑就可以作出。這樣的圓有無數多個(圖 7-7)。如果要作通過兩個點 A、B 的圓，那就要找這樣一個點作圓心，使它與點 A、B 的距離都相等，這樣的點在線段 AB 的垂直平分線上。因此，以線段 AB 的垂直平分線上任意一點為圓心，以這一點與點 A 或點 B 的距離為半徑就可以作出。這樣的圓也有無數多個(圖 7-8)。

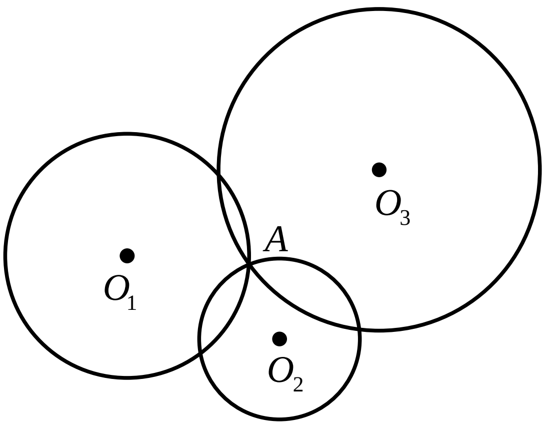


圖 7-7

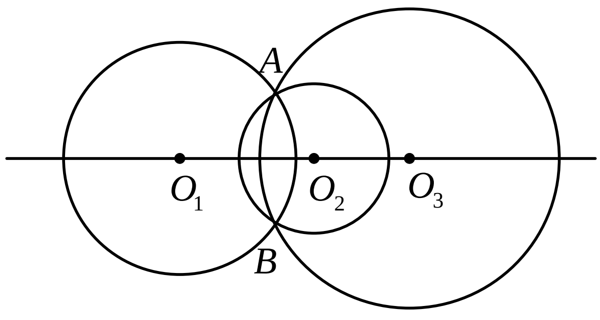


圖 7-8

現在來討論，經過三個已知點的圓。

作圖，使它經過不在同一直線上的三個已知點。

已知： 不在同一直線上的三點 A、B、C (圖 7-9)。

求作： $\odot O$，使它經過點 A、B、C。

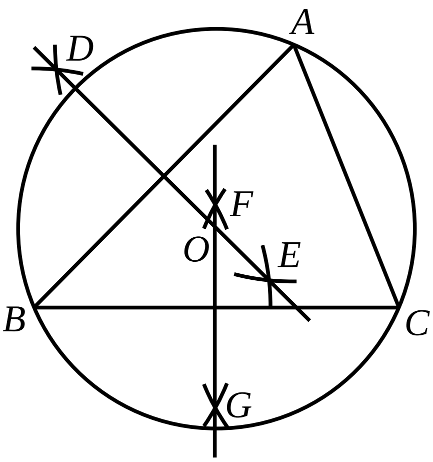


圖 7-9

分析： 要作一個圓經過三個已知點 A、B、C，就要確定一個點作圓心，使它到這三點的距離相等。以前我們學過，三角形三邊的垂直平分線相交於一點，這個點到三角形三個頂點的距離相等。因此可以把△ABC 三邊的垂直平分線之交點作為圓心。

作法：

1. 連結 AB，作線段 AB 的垂直平分線 DE。
2. 連結 BC，作線段 BC 的垂直平分線 FG，交 DE 於點 O。
3. 以 O 為圓心，OB 為半徑作圓。

$\odot O$ 就是所求作的圓。

證明： 因為 $\odot O$ 的半徑等於 OB，所以點 B 在 $\odot O$ 上，就是 $\odot O$ 經過點 B。

因為 O 在 AB 的垂直平分線上，所以 $OA = OB$，因此 $\odot O$ 經過點 A。同樣可證 $\odot O$ 經過點 C。

我們知道，過 A、B 兩點的圓與過 B、C 兩點的圓，它們的圓心分別在 AB 與 BC 的垂直平分線上。從上面的作法又可以知道：當已知點 A、B、C 不在同一直線上時，△ABC 三邊的垂直平分線有一個且恰只有一個交點，所以經過點 A、B、C 可以作一個且恰只可作一個圓，這就得到：

定理　不在同一直線上的三個點確定一個圓。

當點 A、B、C 在同一直線上時，不能作一個圓經過這三點。(為什麼？)

由定理可知，經過三角形三個頂點可以作一個圓。經過三角

形各頂點的圓叫做**三角形的外接圓**，外接圓的圓心叫做**三角形的外心**，這個三角形叫做這個**圓的內接三角形**。

一般地，如果一個圓經過多邊形的各頂點，這個圓叫做**多邊形的外接圓**，這個多邊形叫做這個**圓的內接多邊形**。

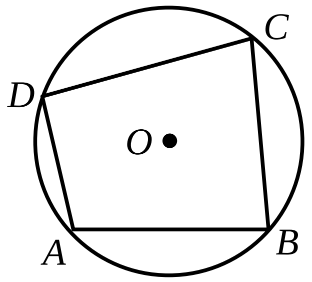


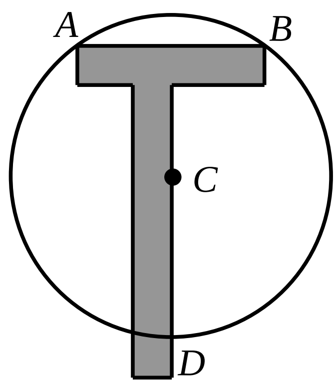
圖 7-10

圖 7-10 中，四邊形 $ABCD$ 是⊙O 的內接四邊形；⊙O 是四邊形 $ABCD$ 的外接圓。

注意：經過任意四點不一定能作一個圓。所以多於三邊的多邊形不一定有外接圓。

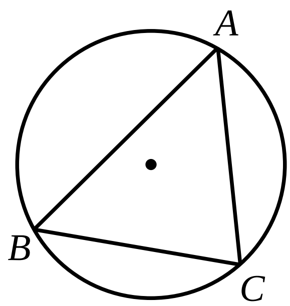
練　習

1. (口答) 如圖，CD 所在直線垂直平分線段 AB。為什麼使用這樣的工具可以找到圓形工件的圓心？



(第 1 題)

2. 作邊長分別為 2 cm、2.5 cm、3 cm 的三角形，再作出這個三角形的外接圓，量出這個圓的直徑(精確到 0.1 cm)。
3. 作一直角三角形，作它的外接圓；作一個鈍角三角形，作它的外接圓。這兩個三角形的外心之位置各是怎樣的？
4. 按圖填空：
   (1) △ABC 是⊙O 的____接三角形；
   (2) ⊙O 是△ABC____接圓。



(第 4 題)

7.3　垂直於弦的直徑

把一張圓形的紙片沿著一條直徑對摺，可以看到，直徑兩側的兩個半圓能夠互相重合。這說明圓是軸對稱圖形，而直徑所在的直線就是它的對稱軸。下面我們來證明這個結論。

如圖 7-11，設 CD 是 $\odot O$ 的任意一條直徑，A 為 $\odot O$ 上任意一點。過點 A 作 $AA' \perp CD$，交 $\odot O$ 於點 A'，垂足為 M。連結 OA、OA'。

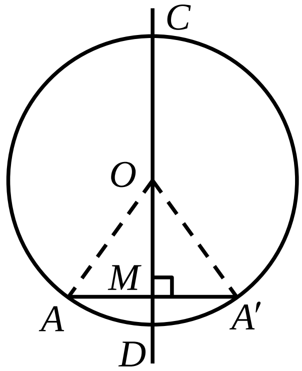


圖 7-11

在 $\triangle AOA'$ 中，

$\because \quad OA = OA'$ 、 $AA' \perp CD$

$\therefore \quad AM = MA'$

即 CD 是 AA' 的垂直平分線，這就是說，對於圓上任意一點 A，在圓上都有關於直線 CD 的對稱點 A'，因此 $\odot O$ 關於 CD 對稱。即

圓是軸對稱圖形，經過圓心的每一條直線都是對稱軸。

從上面的證明，我們知道，如果 $AA' \perp CD$，那麼點 A 與點 A' 是對稱點，所以 AM 與 $A'M$ 、 $\overset{\frown}{AD}$ 與 $\overset{\frown}{A'D}$ 能夠互相重合。於是有下面的定理：

垂徑定理　　**垂直於弦的直徑平分這條弦，並且平分弦所對的弧。**

由垂徑定理，可以推出下面的推論：

推論 1　**(1)**　**平分弦(**不是直徑**)的直徑垂直於弦，並且平分弦所對的弧；**

(2)　**平分弦所對的一條弧之直徑，垂直平分弦；**

(3)　**弦的垂直平分線經過圓心，並平分弦所對的弧**

推論 2　**圓的兩條平行弦所夾的弧相等。**

如圖 7-12 中， $AB // CD$ ，則 $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ 。

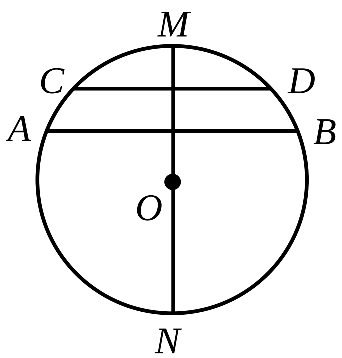


圖 7-12

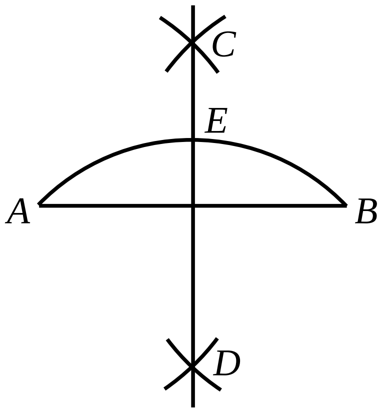


圖 7-13

【例 1】 平分已知 $\overset{\frown}{AB}$ 。

已知： $\overset{\frown}{AB}$ (圖 7-13)。

求作： $\overset{\frown}{AB}$ 的中點。

作法： 1. 連結 AB。

2. 作 AB 的垂直平分線 CD，交 $\overset{\frown}{AB}$ 於點 E。

點 E 就是所求 $\overset{\frown}{AB}$ 的中點。

證明： 略。

【例 2】 隋代建造的趙州石拱橋(圖 7-14，**安濟橋**，位於河北省趙縣，設計者是傑出的工匠李春，建造於公元 610 年）的橋拱是圓弧形，它的跨度(弧所對的弦之長)為 37.4 m，拱高(弧的中點到弦之距離，也叫弓形高)為 7.2 m，求橋拱的半徑(精確到 0.1 m)

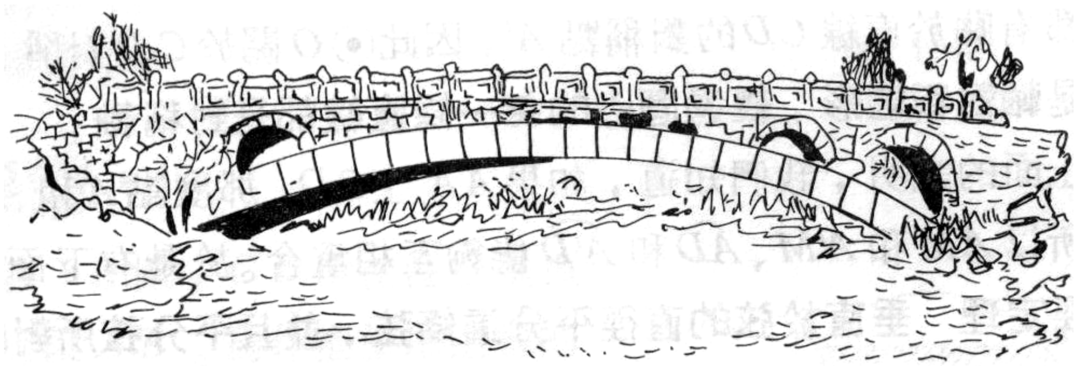


圖 3-14

解 如圖 7-15，橋拱 $\overset{\frown}{AB}$ 的圓心為 O、半徑為 R m。經過圓心 O 作弦 AB 的垂線 OD，D 為垂足，與 $\overset{\frown}{AB}$ 相交於點 C。根據垂徑定理，D 是 AB 的中點，C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中點，CD 就是拱高。

由題設

$AB = 37.4$ 、 $CD = 7.2$

$$AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 37.4 = 18.7$$

$$OD = OC - DC = R - 7.2$$

在 $Rt\triangle OAD$ 中，由勾股定理，得

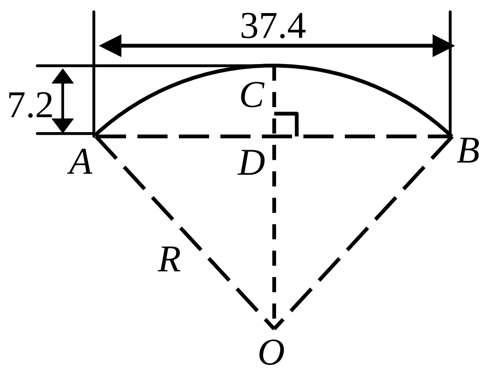


圖 7-15

$$OA^2 = AD^2 + OD^2$$

即 $$R^2 = 18.7^2 + (R - 7.2)^2$$

解這個方程，得 $R \approx 27.9\ \mathrm{m}$

答：趙州石拱橋的橋拱半徑約為 27.9 m。

練　習

1. (口答) (1) 平分一條弧的直徑有什麼性質？
   (2) 平分弦與它所對的一條弧之直線有什麼性質？
   (3) 垂直弦，並平分弦所對的一條弧之直線有什麼性質？
2. 在半徑為 50 mm 的 $\odot O$ 中，有長 50 mm 的弦 AB。計算：
   (1) 點 O 與 AB 的距離；
   (2) $\angle AOB$ 的度數。
3. 以點 O 為圓心的兩個同心圓中，大圓的弦 AB 與小圓相交於點 C 與 D。求證：$AC = BD$。

7.4　圓心角、弧、弦、弦心距之間的關係

如圖 7-16 甲，在 $\odot O$ 上任取一點 A，作直徑 AB，則 $OA = OB$。就是說，點 B 是點 A 關於點 O 的對稱點。因此，**圓是以圓心為對稱中心的中心對稱圖形**。

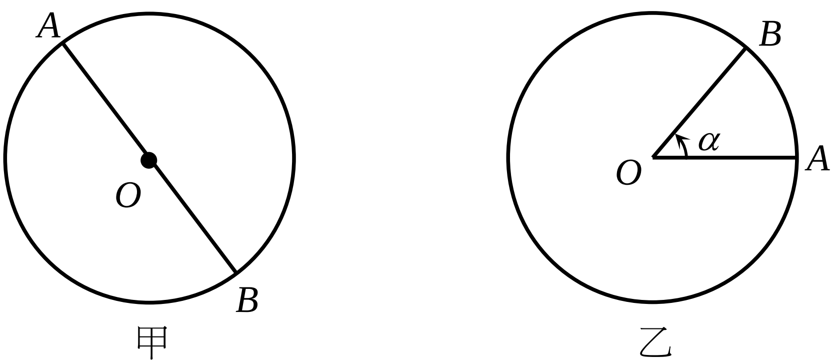


圖 7-16

圓不僅是中心對稱圖形：繞圓心旋轉 180° 後能夠與原來的圖形重合，並且它還有另外一個重要性質。如圖 7-16 乙中，讓圓繞

中心 O 旋轉任意一個角度 α，圓上任意一點 A 都能夠與圓上一點 B 重合。因此，圓繞圓心旋轉任意一個角度，都能與原來的圖形重合。利用這個性質，我們還可以推出圓的其它一些性質。

頂點在圓心的角叫做**圓心角**。從圓心到弦的距離叫做**弦心距**。現在用上面的性質來研究在同一個圓中，圓心角、圓心角所對的弦、弧、弦心距相互之間的關係。

如圖 7-17，在 $\odot O$ 中，當圓心角 $\angle AOB = \angle A'OB'$ 時，它們所對的弧 $\overset{\frown}{AB}$ 與 $\overset{\frown}{A'B'}$、弦 AB 與 $A'B'$ 弦心距 OM 與 OM' 是否也相等呢？

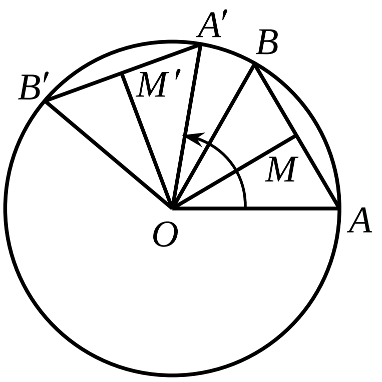


圖 7-17

我們把 $\angle AOB$ 連同 $\overset{\frown}{AB}$ 繞圓心 O 旋轉，使射線 OA 與 OA' 重合。

$\because\quad \angle AOB = \angle A'OB'$

$\therefore$　射線 OB 與 OB' 重合

又 $\because\quad OA = OA'$、$OB = OB'$

$\therefore$　點 A 與點 A' 重合、點 B 與點 B' 重合。

這樣，$\overset{\frown}{AB}$ 與 $\overset{\frown}{A'B'}$ 重合，AB 與 $A'B'$ 重合，從點 O 到 AB 的垂線段 OM 與點 O 到 $A'B'$ 的垂線段 OM' 也重合。即

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}\text{、}AB = A'B'\text{、}OM = OM'\text{。}$$

上面的結論，在兩個等圓中也成立。於是有下面的定理：

定理　　**在同圓或等圓中，相等的圓心角所對之弧相等，所對的弦相等，所對的弦之弦心距相等。**

由上面的定理，可以得到下面的推論：

推論　　**在同圓或等圓中，如果兩個圓心角、兩條弧、兩條弦或兩條弦的弦心距中有一組量相等，那麼它們所對應的其餘各組量都分別相等。**

我們知道，把頂點在圓心的周角等分成 360 份時，每一份的圓心角是 $1°$ 之角。因為同圓中相等的圓心角所對之弧相等，所以整個圓也被等分成 360 份。我們把每一份這樣的弧叫做 **$1°$ 之弧**。

由上述定義可知，$1°$ 的圓心角對著 $1°$ 的弧，$1°$ 的弧對著 $1°$ 的

圓心角。一般地，$n°$的圓心角對著$n°$的弧，$n°$的弧對著$n°$的圓心角(圖 7-18)。即圓心角的度數與它所對的弧之度數相等。

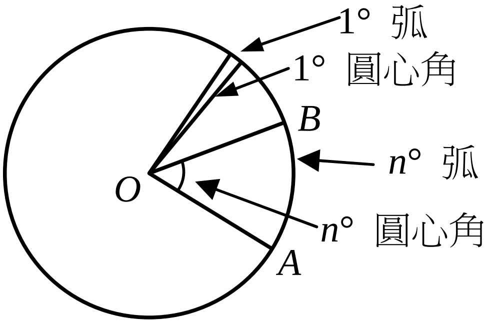


圖 7-18

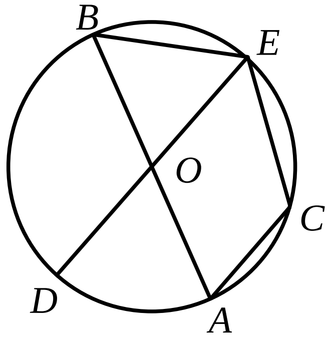


圖 7-19

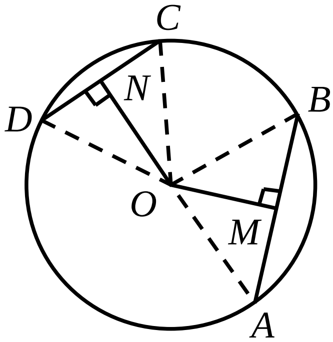
【例】 如圖 7-19，AB、DE 是$\odot O$的直徑，$AC \mathbin{/\!/} DE$，交$\odot O$於點 C。求證：$BE = EC$。

證明： 在$\odot O$中，

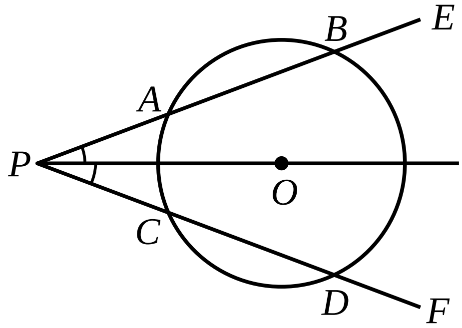
$$\left.\begin{aligned}\angle AOD = \angle BOE \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BE}\\ AC \mathbin{/\!/} DE \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{EC}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{EC} \Rightarrow BE = EC$$

練　習

1. 如圖，$\odot O$的弦 $AB > CD$，AB、CD 的弦心距分別為 OM 與 ON。求證：$OM < ON$。



(第 1 題)



(第 2 題)

2. 設 O 是$\angle EPF$ 的平分線上的一點，以 O 為圓心的圓與角的兩邊分別相交於 A、B 與 C、D。求證：$AB = CD$。
3. (口答) 在半徑不相等的$\odot O$與$\odot O'$中，$\overset{\frown}{AB}$與$\overset{\frown}{A'B'}$所對的圓心角都是$60°$。
   (1) $\overset{\frown}{AB}$與$\overset{\frown}{A'B'}$各是多少度？
   (2) $\overset{\frown}{AB}$與$\overset{\frown}{A'B'}$相等嗎？

7.5　圓周角

頂點在圓上並且兩邊都與圓相交的角，叫做圓周角。圖 7-20 各圓中的 $\angle BAC$ 都是圓周角。

定理　　一條弧所對的圓周角等於它所對的圓心角之一半。

已知：　$\odot O$ 中，$\overset{\frown}{BC}$ 所對的圓周角是 $\angle BAC$，圓心角是 $\angle BOC$　(圖 7-20)。

求證：　$\angle BAC = \dfrac{1}{2}\angle BOC$。

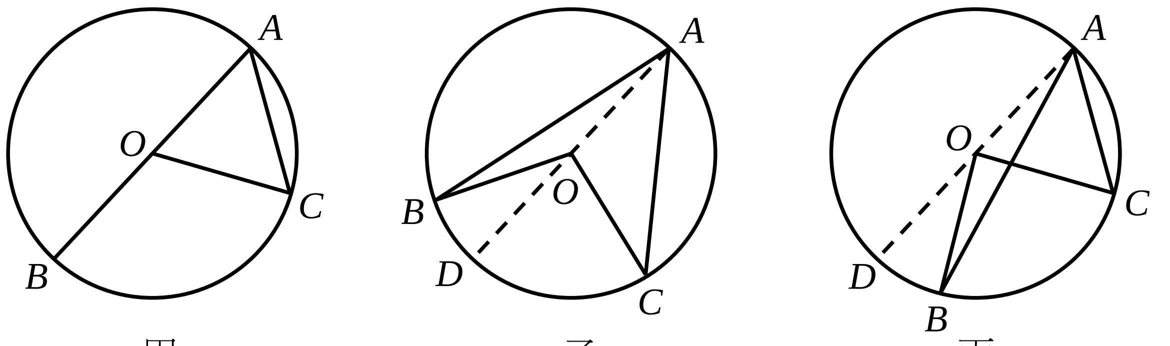


圖 7-20

證明：　分三種情況討論。

(1) 圖 7-20 甲中，圓心 O 在 $\angle BAC$ 的一條邊上。

$$\left.\begin{aligned} OA = OC \Rightarrow \angle C = \angle BAC \\ \angle BOC = \angle BAC + \angle C \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$$ 。

(2) 圖 7-20 乙中，圓心 O 在 $\angle BAC$ 的內部。

作直徑 AD，利用(1)的結果，有

$$\left.\begin{aligned} \angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD \\ \angle DAC = \frac{1}{2}\angle DOC \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \angle BAD + \angle DAC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle DOC)$$

$$\Rightarrow \angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$$

(3) 圖 7-20 丙中，圓心 O 在 $\angle BAC$ 的外部。

作直徑 AD，利用(1)的結果，有

$$\left.\begin{aligned}\angle DAB &= \frac{1}{2}\angle DOB\\ \angle DAC &= \frac{1}{2}\angle DOC\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \angle DAC - \angle DAB = \frac{1}{2}(\angle DOC - \angle DOB)$$

$$\Rightarrow \angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$$

由定理可推得下面一些推論：

推論 1　同弧或等弧所對的圓周角相等；同圓或等圓中，相等的圓周角所對的弧也相等(圖 7-21)。

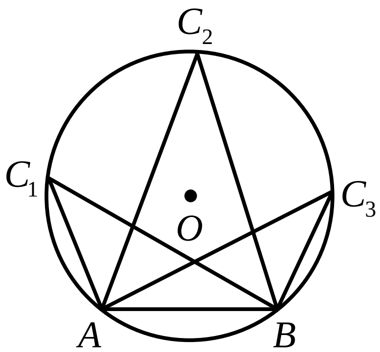


圖 7-21

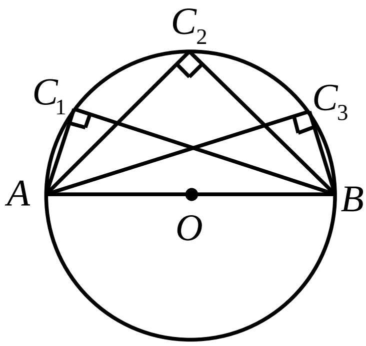


圖 7-22

推論 2　半圓(或直徑)所對的圓周角是直角；90° 的圓周角所對的弦是直徑(圖 7-22)。

如圖 7-23，在$\triangle ABC$ 中，如果中線 $CO = \frac{1}{2}AB$，以 AB 為直徑作$\odot O$，則點 C 在$\odot O$ 上。由推論 2 可知，$\angle ACB = Rt\angle$。由此得到：

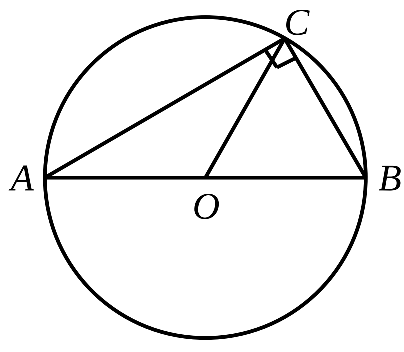


圖 7-23

推論 3　如果三角形一邊上的中線等於這邊的一半，那麼這個三角形是直角三角形。

由弦及其所對的弧組成之圖形叫做**弓形**。如圖 7-21，弦 AB 與$\overset{\frown}{AC_2B}$組成弓形AC_2B。圖中的$\angle AC_2B$也可以叫做$\overset{\frown}{AC_2B}$所含的圓周角，或$\overset{\frown}{AC_2B}$所含的**弓形角**。

【例 1】 如圖 7-24，AD 是$\triangle ABC$ 的高，AE 是$\triangle ABC$ 的外接圓直徑。

求證： $AB \bullet AC = AE \bullet AD$

證明： 連結 BE。

$\because$ $\angle ADC = \angle ABE = Rt\angle$

$\angle C = \angle E$

$\therefore$ $\triangle ADC \sim \triangle ABE$

$\therefore$ $\dfrac{AC}{AE} = \dfrac{AD}{AB}$

$\therefore$ $AB \bullet AC = AE \bullet AD$

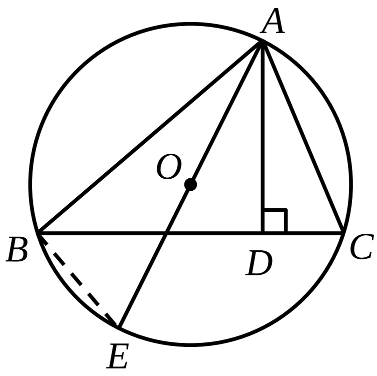


圖 7-24

【例 2】 已知： 如圖 7-25，P 是弓形 AMB 內任意一點，Q 是弓形外任意一點，並且與 P 在直線 AB 的同側。弓形角等於α 。

求證： (1) $\angle APB > \alpha$ ；

(2) $\angle AQB < \alpha$ 。

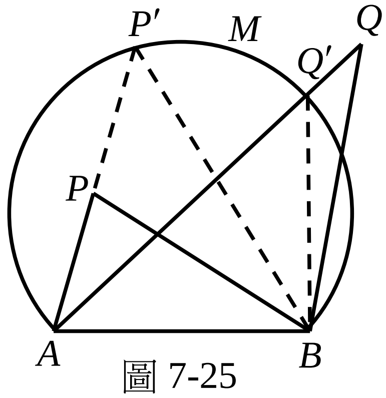


圖 7-25

證明： (1) 延長 AP 交 $\overset{\frown}{AMB}$ 於點 P' 。連結 BP' 。

$\because$ 點 P' 在弓形弧上

$\therefore$ $\angle AP'B = \alpha$

又 $\because$ $\angle APB$ 是$\triangle PP'B$ 的外角

$\therefore$ $\angle APB > \angle AP'B = \alpha$

(2) 設 AQ 與 $\overset{\frown}{AMB}$ 交於點 Q' 。連結 BQ' 。

$\because$ 點 Q' 在弓形弧上

$\therefore$ $\angle AQ'B = \alpha$

又 $\because$ $\angle AQ'B$ 是$\triangle BQ'Q$ 的外角

$\therefore$ $\angle AQB < \angle AQ'B = \alpha$

例 2 的結果，可以用來解決一些實際的問題。例如，臨近暗礁的海岸上，可以建兩個燈塔 A、B(圖 7-26)，使暗礁包圍在以 AB 為弦的弓形 AMB 內。那麼只要航船 S 能從所收到信號中知道弓形角 α 的大小，在航行中保持對兩個燈塔的視角 $\angle ASB < \alpha$，航行的船就不會觸礁。

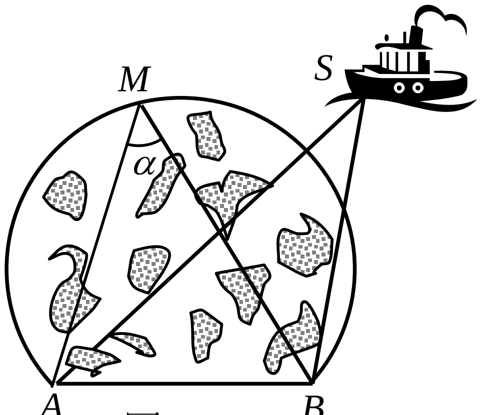
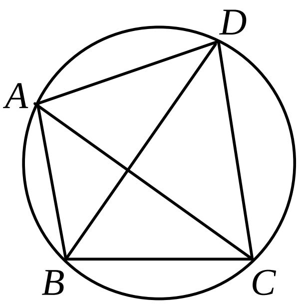


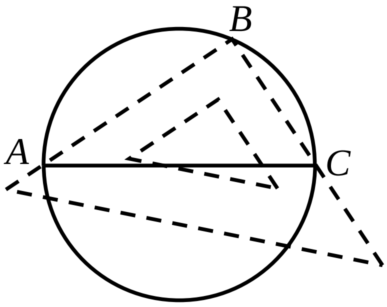
圖 7-26

練　習

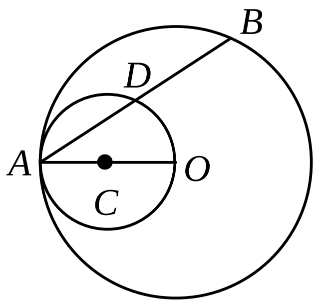
1. 找出圖中圓內接四邊形對角線把 4 個內角分成的 8 個角中，哪些是相等的角。
2. (口答)怎樣運用三角板(或曲尺)做出圓形工件表面上的直徑、定出圓心？說明理由。



(第 1 題)



(第 2 題)



(第 3 題)

3. OA 是⊙O 的半徑，以 OA 為直徑的⊙C 與⊙O 的弦 AB 相交於點 D。求證：D 是 AB 的中點。
4. 已知：CD 是△ABC 的中線，$AB = 2CD$，$\angle B = 60^\circ$。
求證：△ABC 外接圓的半徑等於 CB。

7.6　圓的內接四邊形

我們知道，圓的內接四邊形的四個頂點都在同一個圓上，所以它的四個內角都是圓周角。這樣，我們就可以利用圓周角定理，來研究圓的內接四邊形之角。

如圖 7-27，四邊形 $ABCD$ 是$\odot O$的內接四邊形。

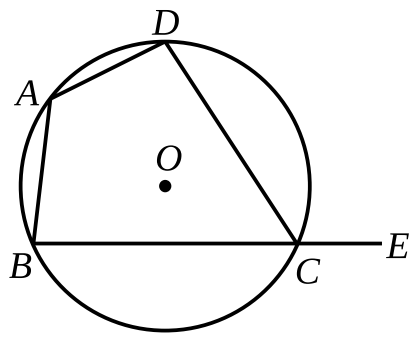


圖 7-27

∵ $\overset{\frown}{BAD}$ 與 $\overset{\frown}{BCD}$ 所對的圓心角之和是周角

∴ $\angle A+\angle BCD=180°$

同理 $\angle B+\angle D=180°$。

如果延長 BC 到 E，那麼

$\angle BCD+\angle DCE=180°$，所以

$$\angle A=\angle DCE$$

$\angle A$ 是與 $\angle DCE$ 相鄰的內角 $\angle DCB$ 之對角(簡稱為 $\angle DCE$ 的內對角)，於是我們得到圓的內接四邊形之性質定理。

定理　　圓內接四邊形的對角互補，並且任何一個外角都等於它的內對角。

【例 1】如圖 7-28，$\odot O_1$與$\odot O_2$ 相交於 A、B 兩點，經過點 A 的直線 CD 與$\odot O_1$交於點 C，與$\odot O_2$ 相交於點 D。經過點 B 的直線 EF，與$\odot O_1$交於點 E，與$\odot O_2$ 交於點 F。

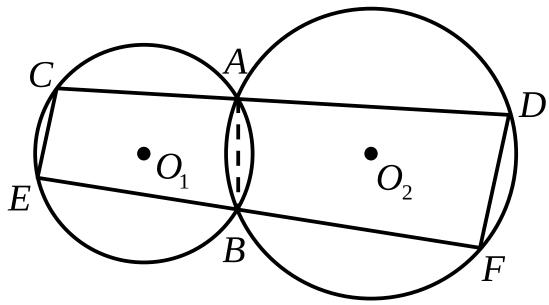


圖 7-28

求證：　$CE\,//\,DF$

證明：　連結 AB。

∵ $ABEC$ 是$\odot O_1$的內接四邊形

∴ $\angle BAD=\angle E$

又 ∵ $ADFB$ 是$\odot O_2$ 的內接四邊形

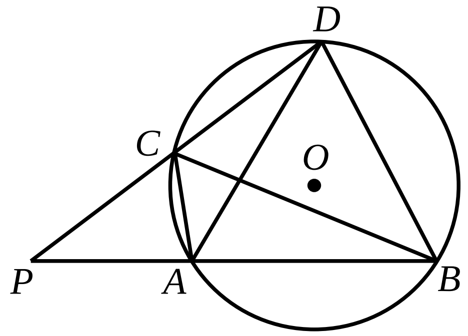
∴ $\angle BAD+\angle F=180°$

∴ $\angle E+\angle F=180°$

∴ $CE\,//\,DF$

練　習

1. 求證：圓內接平行四邊形是矩形。
2. 如圖，經過圓外一點 P 的兩條直線與 $\odot O$ 相交於 A、B 與 C、D 四點，在圖中有幾對相似三角形？為什麼？



(第 2 題)

圓內接四邊形的性質定理有下面的逆定理：

定理　　如果一個四邊形的一組對角互補，那麼這個四邊形內接於圓。

已知：　四邊形 $ABCD$ 中，$\angle B + \angle D = 180°$。

求證：　四邊形 $ABCD$ 內接於圓。

分析：　要證明四邊形 $ABCD$ 內接於圓，就是要證明 A、B、C、D 四點在同一個圓上。因為 A、B、C 三點不在同一直線上，可以確定一個圓，所以只要證明第四點 D 也在這個圓上就可以了。但直接證明點 D 在圓上比較困難。現在我們採用一種間接證明的方法，就是假設點 D 不在圓上，經過推理論證，得出錯誤的結論，這說明假設點 D 不在圓上是錯誤的，從而證明點 D 在圓上。

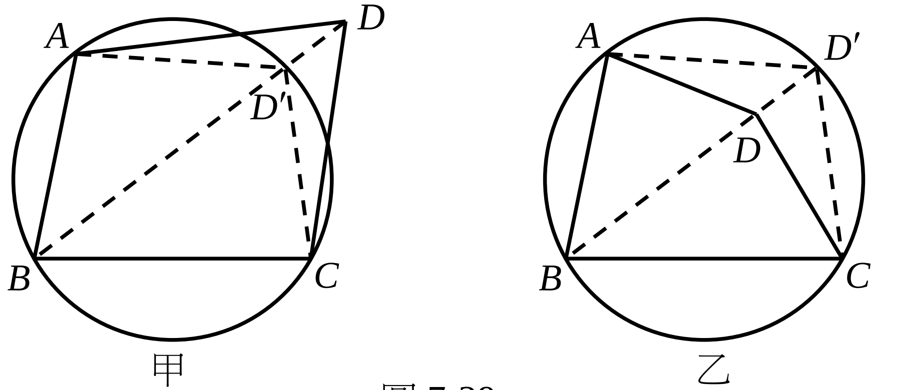


圖 7-29

證明：　經過四邊形三個頂點 A、B、C 作 $\odot O$。假設點 D 不在圓上，那麼只有兩種情況：(1) 點 D 在圓外；(2) 點 D 在圓內。

(1) 假設點 D 在圓外(圖 7-29 甲)。連結 BD 交 $\odot O$ 於點 D' 。連結 AD' 、 CD' 。

$\because$ $\angle AD'B$、$\angle BD'C$ 分別是 $\triangle AD'D$、$\triangle CD'D$ 的外角

$\therefore$ $\angle AD'B > \angle ADB$

$\angle BD'C > \angle BDC$

$\therefore$ $\angle AD'B + \angle BD'C > \angle ADB + \angle BDC$

即 $\angle AD'C > \angle ADC$

又 $\because$ $\angle ADC + \angle ABC = 180°$

$\therefore$ $\angle AD'C + \angle ABC > 180°$

這與圓內接四邊形性質定理矛盾。

所以點 D 不能在圓外。

(2) 同(1)類似可證明點 D 不能在圓內(圖 7-29 乙)。

$\therefore$ 點 D 在 $\odot O$ 上

即四邊形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的內接四邊形。

這個定理的證明，不是直接去證明命題的結論，而是先提出與結論相反(相排斥)的假設，然後推導出與已經證明的定理或公理、定義、題設等相矛盾的結果，這就證明了與結論相反的假設不能成立，從而肯定了原來的結論必定成立，這種間接證明命題的方法叫做**反證法**。

用反證法證明命題一般有下面三個步驟：

(1) 假設命題的結論不成立；

(2) 從這個假設出發，經過推理論證，得出矛盾；

(3) 由矛盾判定假設不正確，從而肯定命題的結論正確。

【例 2】 求證：圓的兩條相交弦(直徑除外)不能互相平分。

已知： 如圖 7-30，弦 AB、CD 相交於點 P。

求證： AB、CD 不能互相平分。

證明： 用反證法。

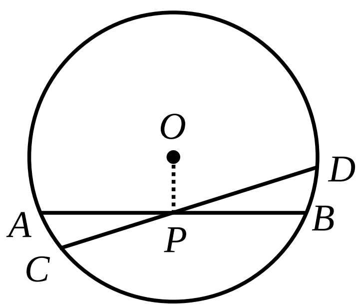


圖 7-30

假設 AB 與 CD 互相平分。

因為 AB、CD 不是直徑，所以點 P 與 O 不重合。連結 OP。

$\because \quad AP = PB$

$\therefore \quad OP \perp AB$

同理 $OP \perp CD$

這就是說點 P 有兩條直線 AB、CD 都垂直於 OP，這與過一點恰只有一條直線與已知直線垂直相矛盾。

所以 AB 與 CD 不能互相平分。

【例 3】 **如果兩個三角形有一條公共邊，這條邊所對的角相等，並且在公共邊的同側，那麼這兩個三角形有公共的外接圓。**

已知： 如圖 7-31，$\angle C$、$\angle D$ 在 AB 同側，$\angle C = \angle D$。

求證： $\triangle ABC$ 與 $\triangle ABD$ 有公共外接圓。

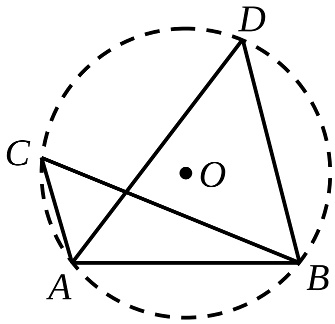


圖 7-31

證明： 用反證法。

假設 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ABD$ 沒有公共外接圓，即 A、B、C、D 四點不在同一個圓上。

過 A、B、C 三點作 $\odot O$，則點 D 不在 $\odot O$ 上。同 7.5 節例 2 的證明一樣可得，

$$\angle ADB \neq \angle ACB$$

這與題設相矛盾。

$\therefore \quad \triangle ABC$ 與 $\triangle ABD$ 有公共外接圓。

練 習

1. 按照圖 7-29 乙，證明定理。
2. 否定下列各結論，並寫出由此可能出現的情況：

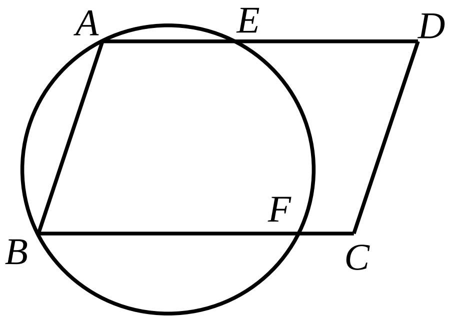
(1) $a = b$； (2) $\angle A > 60°$； (3) $AB /\!/ CD$；

(4) 點 A 在 $\odot O$ 上； (5) 點 A 在直線 a 上。

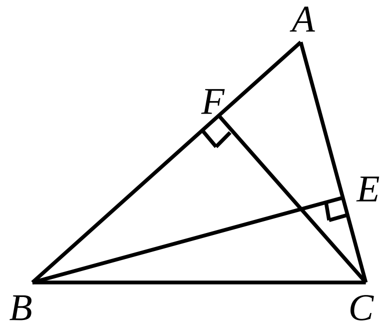
練　習

3.　已知：如圖，$\square ABCD$ 中，過點 A、B 的圓與 AD、BC 分別交於點 E、F。

求證：C、D、E、F 四點在同一個圓上。



(第 3 題)



(第 4 題)

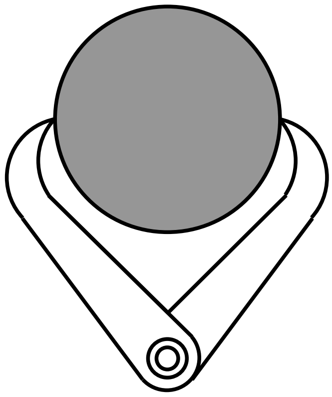
4.　已知：如圖，BE 與 CF 是 $\triangle ABC$ 的高。

求證：F、B、C、E 四點在同一個圓上。

習　題　二　十　四

1.　(1)　求證：直徑是圓中最長的弦；

(2)　如圖，將卡鉗的兩腳張開，使兩腳尖的距離等於規定之尺寸。當工件恰好通過兩腳尖的張口時，表示它的直徑符合規定；當工件不能通過或留有空隙時，它的直徑不符合規定。為什麼？


(第 1 題)

2.　$\odot O$ 的半徑 $r = 5\,\text{cm}$，圓心 O 到直線 l 的距離 $d = OD = 3\,\text{cm}$。在直線 l 上有 P、Q、R 三點，且有 $PD = 4\ \text{cm}$；$QD > 4\ \text{cm}$；$RD < 4\,\text{cm}$。它們對於 $\odot O$ 的位置各是怎樣的？

3.　求證：菱形各邊上的中點在同一個圓上。

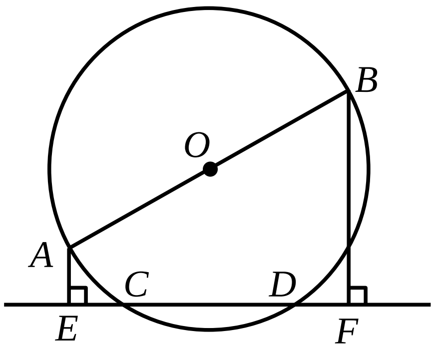
4. 已知：$AB = 4\,\text{cm}$。以 3 cm 為半徑作圓，使它經過點 A 與 B。

5. 作一個圓，使它經過已知點 A 與 B，且圓心在已知直線 l 上。
   (1) 當直線 l 與 AB 斜交時，可作出幾個？
   (2) 當直線 l 與 AB 垂直但不經過 AB 的中點時，可作出幾個？
   (3) 當直線 l 是線段 AB 的垂直平分線時，怎樣呢？

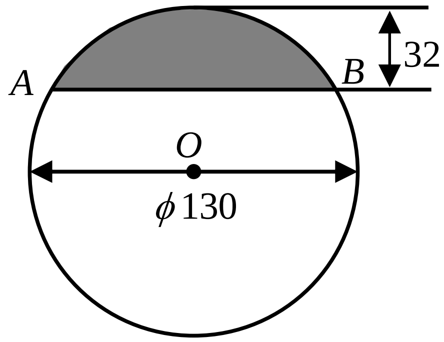
6. $\odot O$ 的半徑 $r = 5\,\text{cm}$，弦 $AB // CD$，$AB = 6\,\text{cm}$、$CD = 8\,\text{cm}$。求 AB 與 CD 的距離(有兩解)。

7. 經過已知 $\odot O$ 內的已知點 A 作弦，使它以點 A 為中點。

8. 如圖，AB 是 $\odot O$ 的直徑，CD 是弦，$AE \perp CD$，垂足為 E；$BF \perp CD$，垂足為 F。求證：$EC = FD$。



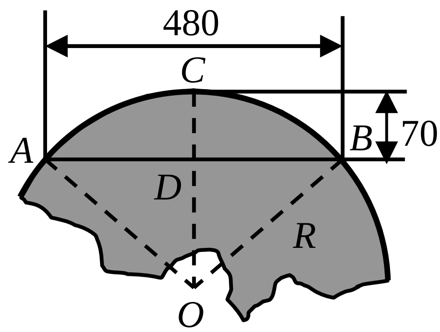
(第 8 題)



(第 9 題)

9. 在直徑為 130 mm 的圓鐵片上切去一塊高為 32 mm 的弓形鐵片(如圖)。求弓形的弦 AB 之長。

10. 破殘的輪片上，弓形的弦 AB 長 480 mm，高 CD 為 70 mm(如圖)。求圓輪片的直徑。



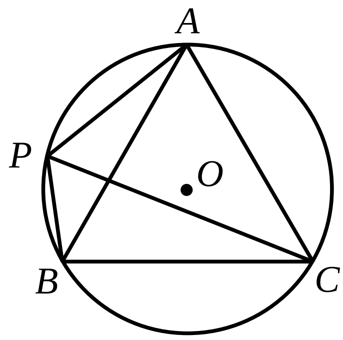
(第 10 題)

11. 弦 AB 與 CD 相交於圓內的點 P，並且與經過點 P 的直徑成等角。求證：$AB = CD$。

12. (1) 求證：經過 $\odot O$ 內一點 P 的所有弦中，與 OP 垂直的弦最短；
    (2) 已知 $\odot O$ 的半徑為 6 cm，$OP = 3.6\,\text{cm}$。求經過點 P 最短的弦長。

13. 圓內接六邊形 $ABCDEF$ 的各邊相等，求各邊所對的圓心角之度數。

14. 已知：如圖，$\angle APC = \angle CPB = 60°$。
求證：$\triangle ABC$ 是等邊三角形。



(第 14 題)

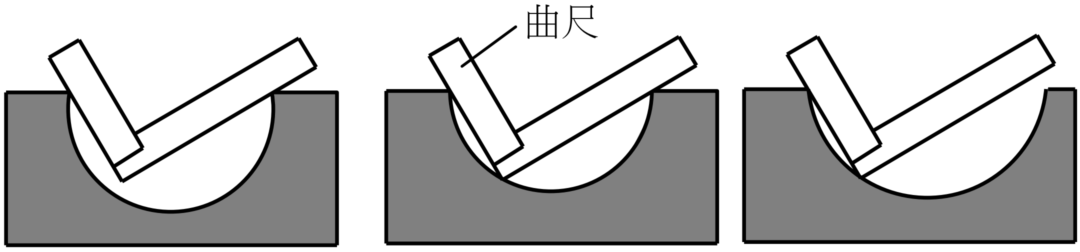
15. 圓上一點 P 到直徑 AB 的垂線之垂足為 D。求證：$\triangle BPD \sim \triangle PAD$。

16. $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC$ 的平分線與邊 BC 與外接圓分別相交於點 D 與 E。求證：$\triangle ABD \sim \triangle AEC$。

17. 求證：以等腰三角形的一腰為直徑之圓，平分底邊。

18. 圓內接三角形 ABC 中，$AB = AC$，經過點 A 的弦與 BC、$\overset{\frown}{BC}$ 分別相交於點 D 與 E。求證：$\triangle ABD \sim \triangle AEB$。

19. 使用曲尺檢驗工件的凹面，成半圓形時為合格。如圖所示的三種情況中，哪種是合格的？哪種是不合格的？為什麼？

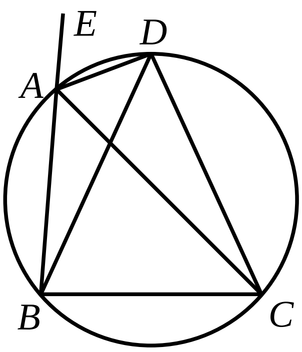


(第 19 題)

20. 已知線段 AB，怎樣作出幾個點 C_1、C_2、⋯，使它們對 AB 所張的角 $\angle AC_1B$、$\angle AC_2B$、⋯都是直角？

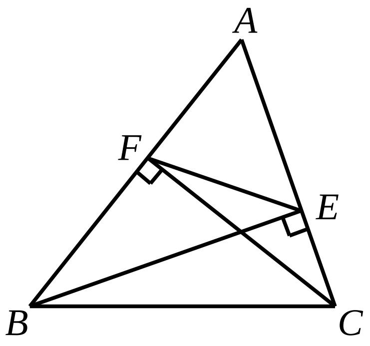
21. 圓內接四邊形 $ABCD$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的度數之比是 2∶3∶6。求四邊形各內角的度數。

22. 如圖，AD 是 $\triangle ABC$ 外角 $\angle EAC$ 的平分線，與三角形的外接圓交於點 D。求證：$DB = DC$。



(第 22 題)

23. 已知：BE、CF 是△ABC 的兩條高。
求證：$\angle AEF = \angle ABC$。



(第 23 題)

24. 用反證法證明：
(1) 一個三角形的內角中，不能有兩個鈍角或直角；
(2) 在同圓內，如果兩條弦不等，那它們的弦心距也不等；
(3) 在同一平面內，一條直線與兩條平行線中的一條相交，必定與另一條也相交。

二、直線與圓的位置關係

7.7 直線與圓的位置關係

在黑板上畫一個圓，把直尺當作一條直線在黑版面上移動。我們可以看到，直線與圓的位置關係有下面三種：

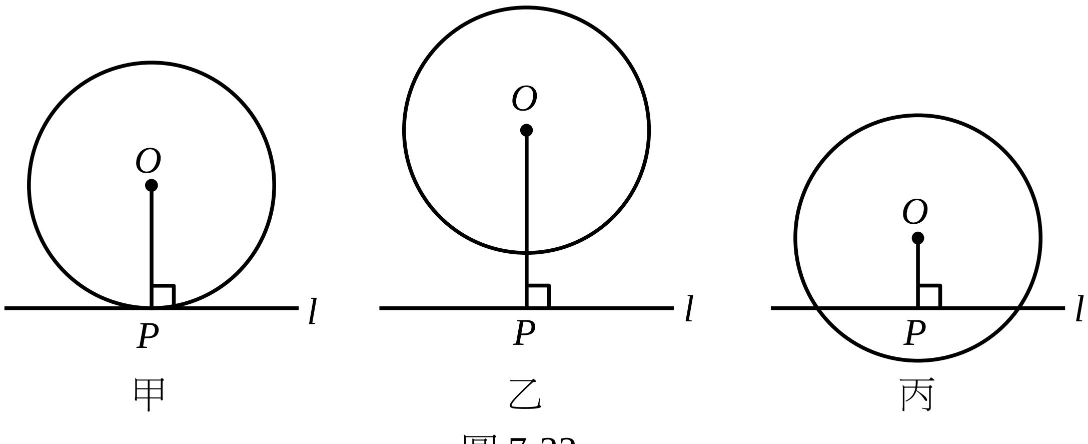


圖 7-32

(1) 直線與圓沒有公共點時,叫做直線與圓**相離**(圖 7-32 乙)。

(2) 直線與圓有唯一公共點時，叫做直線與圓**相切**(圖 7-32 甲)。這時直線叫做圓的**切線**，唯一的公共點叫做**切點**。

(3) 直線與圓有兩個公共點時，叫做直線與圓**相交**(圖 7-32 丙)。這時直線叫做圓的**割線**。

根據直線與圓相離、相切、相交的定義，容易看出：

如果⊙O的半徑為 r，圓心 O 到直線 l 的距離為 d，那麼

(1) 直線 l 與⊙O 相離 $\Leftrightarrow d > r$；

(2) 直線 l 與⊙O 相切 $\Leftrightarrow d = r$；

(1) 直線 l 與⊙O 相交 $\Leftrightarrow d < r$；

練 習

已知 $Rt\triangle ABC$ 的斜邊 $AB = 6\,\text{cm}$，直角邊 $AC = 3\,\text{cm}$。圓心為 C，半徑為 2 cm、4 cm 的兩個圓與 AB 有怎樣的位置關係？半徑多長時。AB 與圓相切？

7.8 切線的判定與性質

如圖 7-33，在⊙O中，經過半徑 OA 的外端點 A，作直線$l \perp OA$，則圓心 O 與直線 l 的距離就是半徑 r。由上一節我們知道，這樣的直線與圓一定相切。因此有下面的定理：

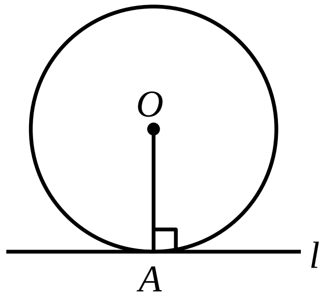


圖 7-33

切線的判定定理：

經過半徑的外端並且垂直於這條半徑之直線是圓的切線。

【例 1】 已知： 直線 AB 經過⊙O上的點 C，並且$OA = OB$、$CA = CB$ (圖 7-34)。

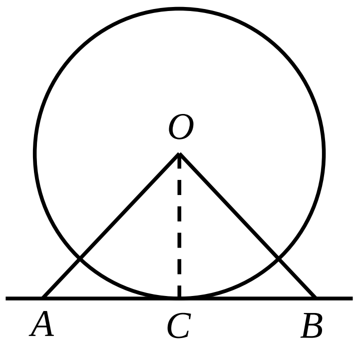


圖 7-34

求證： 直線 AB 是⊙O的切線。

證明： 連結 OC。

$\because$ $OA = OB$、$CA = CB$

$\therefore$ OC是等腰三角形OAB底邊 AB 上的中線

$\therefore$ $AB \perp OC$

因此，直線 AB 經過半徑 OC 的外端 C，並且垂直於半徑 OC，所以 AB 是⊙O的切線。

切線的性質定理　圓的切線垂直於經過切點的半徑。

已知：　如圖 7-35，直線 AT 是⊙O 的切線，A 為切點。

求證：　$AT \perp OA$。

證明：　假設 AT 與 OA 不垂直。

過圓心 O 作 $OM \perp AT$，交 AT 於點 M。由垂線段最短，得 $OM < OA$。

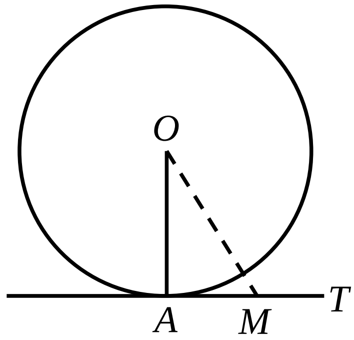


圖 7-35

因為圓心到直線 AT 的距離小於半徑，所以 AT 與⊙O 相交。這與已知矛盾。

$\therefore \quad AT \perp OA$

由於過已知點恰只有一條直線與已知直線垂直，所以經過圓心垂直於切線的直線一定過切點；反過來，過切點垂直於切線的直線也一定經過圓心。由此得到：

推論 1　經過圓心且垂直於切線的直線必經過切點。

推論 2　經過切點且垂直於切線的直線必經過圓心。

【例 2】 已知：　AB 是⊙O 的直徑，BC 是⊙O 的切線，切點為 B，OC 平行於弦 AD 。(圖 7-36)。

求證：　DC 是⊙O 的切線。

證明：　連結 OD。

$$\left.\begin{array}{l} OA = OD \Rightarrow \angle 1 = \angle 2 \\ AD // OC \Rightarrow \begin{cases} \angle 1 = \angle 3 \\ \angle 2 = \angle 4 \end{cases} \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \angle 3 = \angle 4$

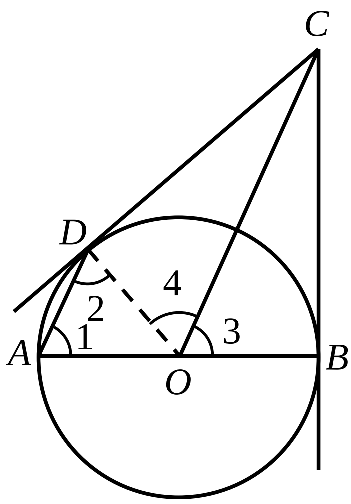


圖 7-36

$$\left.\begin{array}{r} OB = OD \\ \angle 3 = \angle 4 \\ OC = OC \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle OBC \cong \triangle ODC \Rightarrow \angle OBC = \angle ODC$$

$\because$　BC 是 $\odot O$ 的切線

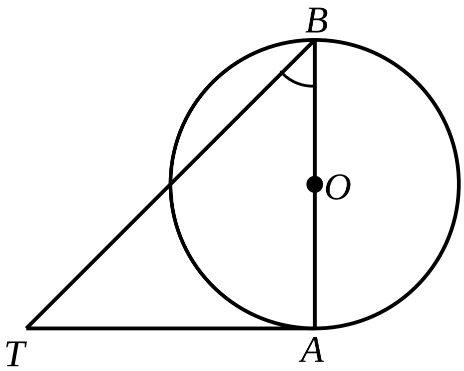
$\therefore$　$\angle OBC = 90°$

$\therefore$　$\angle ODC = 90°$

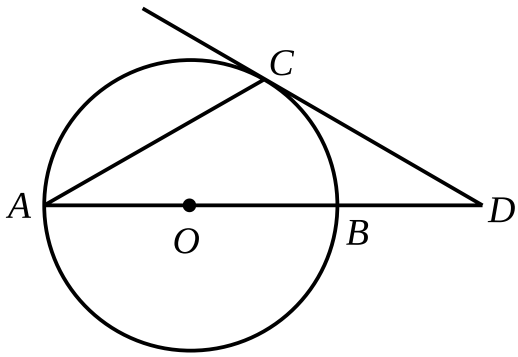
$\therefore$　DC 是 $\odot O$ 的切線。

練　習

1. 如圖，AB 是 $\odot O$ 的直徑，$\angle ABT = 45°$，$AT = AB$。求證：AT 是 $\odot O$ 的切線。



(第 1 題)



(第 2 題)

2. AB 是 $\odot O$ 的直徑，點 D 在 AB 的延長線上，$BD = OB$，點 C 在圓上，$\angle CAB = 30°$。求證：DC 是 $\odot O$ 的切線。

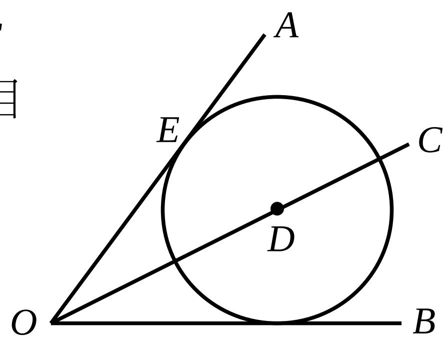
3. 求證：

   (1)　經過圓的直徑兩端點之切線互相平行；

   (2)　圓的兩條切線互相平行，則連結兩個切點的線段是直徑

4. 已知：　OC 平分 $\angle AOB$，D 是 OC 上任意一點，$\odot D$ 與 OA 相切於點 E。

   求證：　OB 與 $\odot D$ 相切。



(第 4 題)

7.9　圓的切線之作法，切線長定理

根據切線的判定定理，可以得到經過一個已知點作已知圓的切線之方法。分已知點在圓上與圓外兩種情況。說明如下：

(1)

已知：　$\odot O$ 及 $\odot O$ 上的一點 P (圖 7-37)

求作：　經過點 P 的 $\odot O$ 的切線。

作法：　1.　連結 OP。

2.　經過點 P 作 $BC \perp OP$。

直線 BC 就是所求的切線。

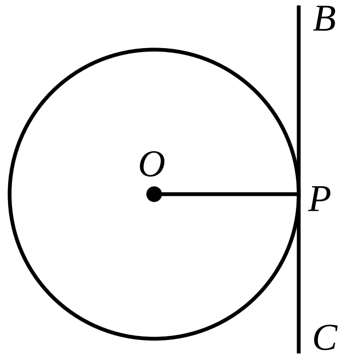


圖 7-37

由作法可以知道，經過 $\odot O$ 上的一點 P，可以作出並且恰只可以作出一條 $\odot O$ 的切線。

(2)

已知：　$\odot C$ 及 $\odot O$ 外的一點 P (圖 7-38)

求作：　經過點 P 的 $\odot O$ 之切線。

分析：　設 PA 是經過點 P 與 $\odot O$ 相切於點 A 的直線，由切線的性質定理，可知 $OA \perp AP$，點 A 必在以 OP 為直徑的圓上。

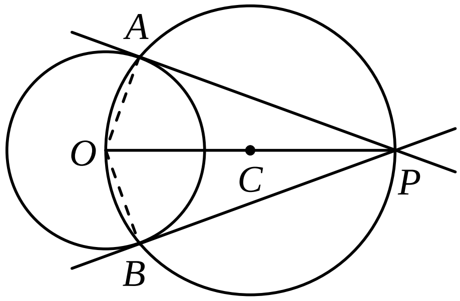


圖 7-38

作法：　1.　連結 OP。

2.　以 OP 為直徑作 $\odot C$，

$\odot C$ 與 $\odot O$ 相交於兩點 A、B。

3.　作直線 PA、PB。

直線 PA、PB 就是所求的切線。

證明：　連結 OA、OB。

$\because$　OP 是 $\odot C$ 的直徑

$\therefore$　$\angle OAP$、$\angle OBP$ 都是直角

因此，PA、PB 是 $\odot O$ 的切線。

由作法可以知道，經過 $\odot O$ 外的一點 P，可以作出 $\odot O$ 的兩條切線。

經過圓外一點的切線上，這一點與切點之間的線段之長叫做這點到圓的**切線長**。

在圖 7-38 中，

$\because$　$OA = OB$ 、 $OP = OP$

$\therefore$　$Rt\triangle AOP \cong Rt\triangle BOP$

$\therefore$　$PA = PB$ 、 $\angle OPA = \angle OPB$

由此得到下面的定理：

切線長定理　從圓外一點引圓的兩條切線，它們的切線長相等，圓心與這一點的連線平分兩條切線之夾角

練　習

1. 作已知圓的切線，使它：
   (1)　與一條已知直線平行；
   (2)　與一條已知直線垂直。
2. 已知：$\odot O$ 的半徑為 3 cm，點 P 與圓心 O 的距離為 6 cm。
   (1)　經過點 P 作 $\odot O$ 的切線；
   (2)　求兩條切線的夾角及切線長。。
3. PA 與 PB 是 $\odot O$ 的切線，A 與 B 為切點。求證：OP 垂直平分弦 AB。

7.10　三角形的內切圓

從一塊三角形的材料上裁下一塊圓的用料，怎樣才能使圓的半徑盡可能大呢？這實際是下面的問題。

作圓，使它與已知三角形的各邊都相切。

已知：　$\triangle ABC$ (圖 7-39)。

求作：　與$\triangle ABC$ 各邊都相切的圓。

分析：　要作一個圓與$\triangle ABC$ 三邊都相切，就是要求出一點作為圓心，使它到三邊的距離相等。以前我們學過三角形三個內角的平分線交於一點，這一點到三邊的距離相等。由此可得三角形內切圓的作法。

作法： 1. 作 $\angle B$、$\angle C$ 的平分線 BM 與 CN，交點為 I。

2. 過點 I 作 $ID \perp BC$，垂足為 D。

3. 以 I 為圓心，ID 為半徑作 $\odot I$。

$\odot I$ 就是所求的圓。

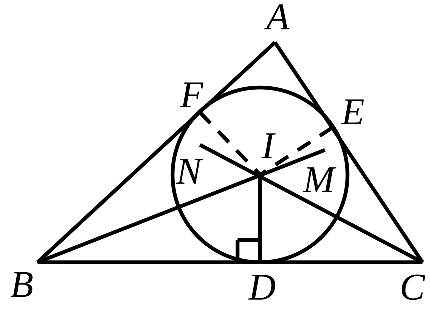


圖 7-39

證明： 過點 I 分別作 CA、AB 的垂線，垂足為 E、F。

$\because$ I 在 $\angle ABC$、$\angle ACB$ 的平分線上

$\therefore$ $IF = ID$、$IE = ID$

$\therefore$ D、E、F 都在 $\odot I$ 上。

又因為 BC、CA、AB 經過點 D、E、F，且 $BC \perp ID$、$CA \perp IE$、$AB \perp IF$，所以 $\triangle ABC$ 的三邊 BC、CA、AB 都與 $\odot I$ 相切。

因為三角形的三條角平分線有一個且恰只有一個交點。所以與三角形的各邊都相切之圓可以作出一個且恰只可作出一個。

與三角形各邊都相切的圓叫做**三角形的內切圓**，內切圓的圓心叫做三角形的**內心**，這個三角形叫做**圓的外切三角形**。

一般地，與多邊形的各邊都相切之圓叫做**多邊形的內切圓**，這個多邊形叫做**圓的外切多邊形**。

圖 7-40 中，$\odot O$ 是四邊形 $ABCD$ 的內切圓，四邊形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的外切四邊形。

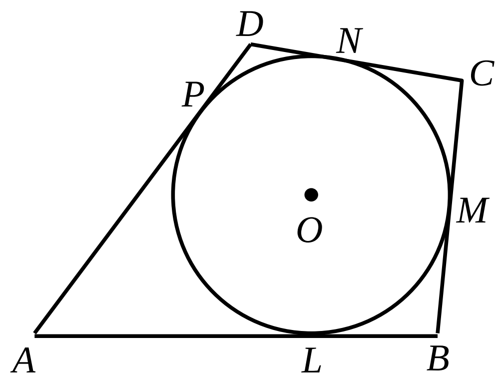


圖 7-40

【例】 **圓的外切四邊形的兩組對邊之和相等。**

已知： 四邊形 $ABCD$ 的邊 AB、BC、CD、DA 與 $\odot O$ 分別相切於點 L、M、N、P (圖 7-40)。

求證： $AB + CD = AD + BC$。

證明： 因為 AB、BC、CD、DA 都與 $\odot O$ 相切，L、M、N、P 是切點，

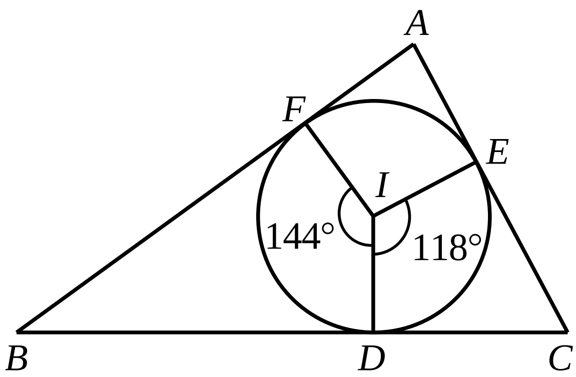
$\therefore \quad AL = AP$、$LB = MB$、$DN = DP$、$NC = MC$

$$\therefore \quad AL + LB + DN + NC = AP + MB + DP + MC = AP + DP + MB + MC$$

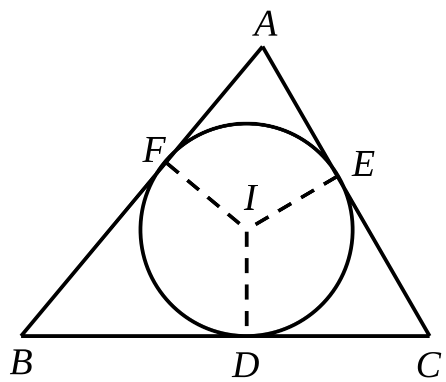
即 $\quad AB + CD = AD + BC$

練　習

1. 設 $\triangle ABC$ 的內切圓 I 與各邊分別相切於點 D、E、F，$\angle DIE = 118°$，$\angle FID = 144°$，求 $\triangle ABC$ 各內角的度數。



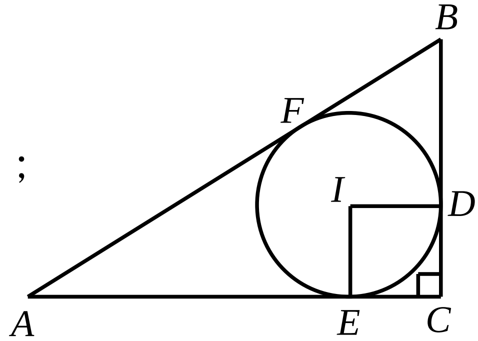
(第 1 題)



(第 2 題)

2. 設 $\triangle ABC$ 的邊 $BC = a$、$CA = b$、$AB = c$，$s = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$，內切圓 I 與 BC、AC、AB 分別相切於點 D、E、F。求證：$AE = AF = s - a$、$BF = BD = s - b$、$CD = CE = s - c$。

3. $\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 是直角，內切圓 I 與邊 BC、CA、AB 分別相切於點 D、E、F。
   (1) 求證：四邊形 $CDIE$ 是正方形；
   (2) 設 $BC = a$、$CA = b$。用 a、b 表示內切圓半徑 r。



(第 3 題)

7.11　**弦切角**

頂點在圓上，一邊與圓相交、另一邊與圓相切的角叫做**弦切角**。圖 7-41 甲、乙、丙中，$\angle BAC$ 是弦切角。弦切角也可看作圓周角的一邊繞頂點旋轉到與圓相切時所成的角。

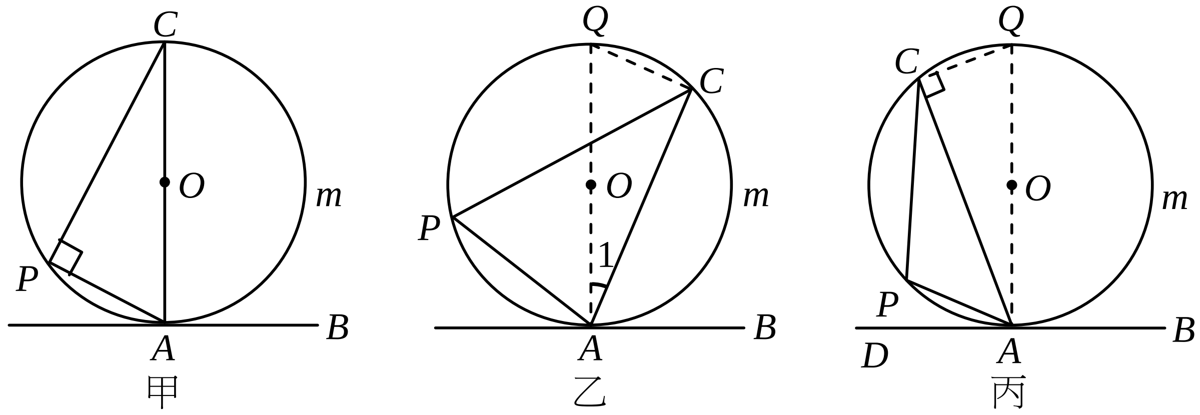


圖 7-41

弦切角定理　弦切角等於它所夾的弧所對之圓周角。

已知：　AC 是 $\odot O$ 的弦，AB 是 $\odot O$ 的切線，$\overset{\frown}{AmC}$ 是弦切角 $\angle BAC$ 所夾的弧，$\angle P$ 是 $\overset{\frown}{AmC}$ 所對的圓周角。(圖 7-41)。

求證：　$\angle BAC = \angle APC$ 。

證明：　分三種情況討論。

(1)　圓心 O 在 $\angle BAC$ 的邊 AC 上(圖 7-41 甲)。

$\because$　AB 是 $\odot O$ 的切線

$\therefore$　$\angle BAC = 90^\circ$

又　$\because$　$\overset{\frown}{AmC}$ 是半圓

$\therefore$　$\angle P = 90^\circ$

$\therefore$　$\angle BAC = \angle P$

(2)　圓心 O 在 $\angle BAC$ 的外部(圖 7-41 乙)。

作 $\odot O$ 的直徑 AQ，連結 CQ。

$\because$　$\angle BAQ = \angle ACQ = 90^\circ$

$\therefore$　$\angle BAC = 90^\circ - \angle 1$ 、 $\angle Q = 90^\circ - \angle 1$

$\therefore$　$\angle BAC = \angle Q$

又　$\because$　$\angle Q = \angle P$

$\therefore \quad \angle BAC = \angle P$

(3) 圓心 O 在 $\angle BAC$ 的內部(圖 7-41 丙)。

作 $\odot O$ 的直徑 AQ，連結 CQ。

$\because \quad \angle BAC = 180° - \angle DAC$

$\angle P = 180° - \angle Q$

又由(2)可知，$\angle DAC = \angle Q$

$\therefore \quad \angle BAC = \angle P$

推論　　兩個弦切角所夾的弧相等，這兩個弦切角也相等。

【例 1】 **已知：** 如圖 7-42，$\odot O$ 與 $\odot O'$ 相交於 A、B 兩點，AC 是 $\odot O'$ 的切線，交 $\odot O$ 於點 C，AD 是 $\odot O$ 的切線，交 $\odot O'$ 於點 D。

求證： $AB^2 = BC \bullet BD$。

證明： $\because \quad \angle C = \angle 1$、

$\angle 2 = \angle D$

$\therefore \quad \triangle ACB \sim \triangle DAB$

$\therefore \quad \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{AB}{BD}$

$\therefore \quad AB^2 = BC \bullet BD$

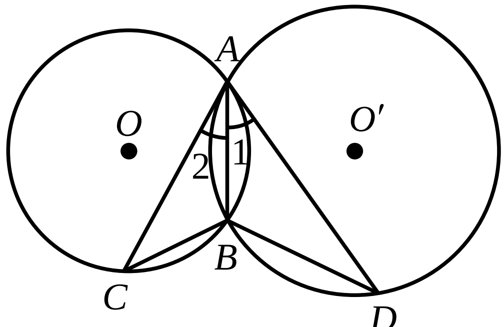
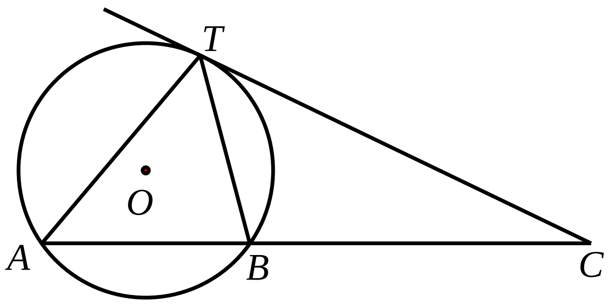


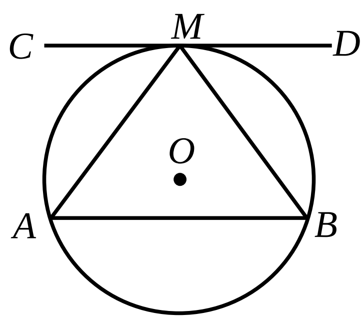
圖 7-42

練　習

1. 如圖，經過 $\odot O$ 上的點 T 之切線與弦 AB 的延長線相交於點 C。
   求證：$\angle ATC = \angle TBC$。



(第 1 題)



(第 2 題)

2. 如圖，AB 是 $\odot O$ 的弦，CD 是經過 $\odot O$ 上一點 M 的切線。
   求證： (1) $AB // CD$ 時，$AM = MB$；
   (2) $AM = MB$ 時，$AB // CD$。

因為弦切角與它夾的弧所對之圓周角相等，所以我們可以利用這個關係作所含圓周角等於已知角的弧。

【例 2】 **在已知線段上作弧，使它所含的圓周角等於已知角**

已知： 線段 AB、$\angle\alpha$ (圖 7-43)。

求作： 以 AB 為弦的圓弧，使弧所含的圓周角等於 $\angle\alpha$。

分析： 作弧的關鍵在於確定它的圓心之位置。

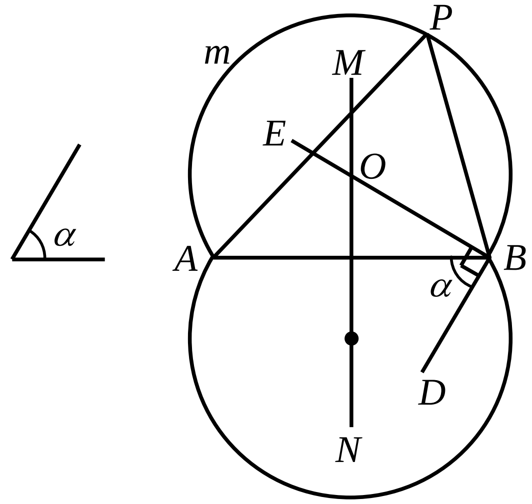


圖 7-43

如圖，因為 AB 是 $\overset{\frown}{AmB}$ 所對的弦，弧要經過 A、B 兩點，所以圓心 O 必在線段 AB 的垂直平分線 MN 上。設 BD 是經過點 B 的 $\odot O$ 之切線。因為弦切角 $\angle ABD$ 等於 $\overset{\frown}{AmB}$ 所含的圓周角 $\angle APB$，所以 $\angle ABD$ 必須等於 $\angle\alpha$，而圓心 O 必在經過點 B 並且垂直於 BD 的直線 BE 上。因此，圓心就是這兩條直線的交點。

作法：
1. 作線段 AB 的垂直平分線 MN。
2. 過點 B 作射線 BD，使 $\angle ABD = \angle\alpha$。
3. 過點 B 作 BD 的垂線 BE 交 MN 於點 O。
4. 以 O 為圓心，OA 為半徑，在 $\angle ABD$ 的外部作 $\overset{\frown}{AmB}$。

$\overset{\frown}{AmB}$ 就是所求的弧。

證明： 略。

因為，過點 B 與 BA 成 $\angle\alpha$ 的射線可以作出兩條，所以，所求的弧可以作出兩條(分別在直線 AB 的兩旁)。

練 習

1. 取線段 $AB = 3\,\text{cm}$。在 AB 上作弧，使它所含的圓周角等於 $45°$
2. 在線段 AB 上作含 $90°$ 的圓周角之弧得到什麼圖形？

7.12　與圓有關的比例線段

相交弦定理　圓內的兩條相交弦，被交點分成的兩條線段長之積相等。

已知：　弦 AB 與 CD 相交於 $\odot O$ 內一點 P (圖 7-44)。

求證：　$PA \bullet PB = PC \bullet PD$ 。

證明：　連結 AC、BD。由圓周角定理，得

$$\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle D \\ \angle C = \angle B\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle PAC \sim \triangle PDB$$

$$\Rightarrow PA : PD = PC : PB$$

$$\Rightarrow PA \bullet PB = PC \bullet PD$$

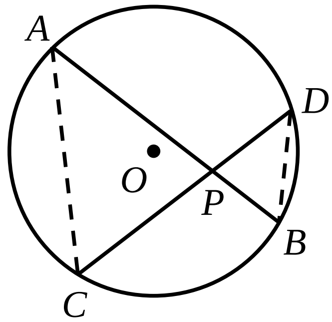


圖 7-44

由相交弦定理，可以得出下面的推論：

推論　　如果弦與直徑垂直相交，那麼弦的一半是它分直徑所成的兩條線段之比例中項。

如圖 7-45，CD 是弦，AB 是直徑，$CD \perp AB$ ，垂足是 P，則

$$PC^2 = PA \bullet PB$$

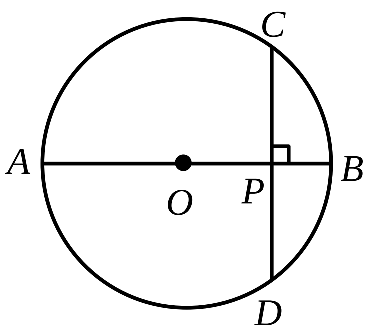


圖 7-45

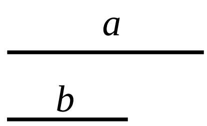
【例 1】 已知：　線段 a、b。

求作：　線段 c，使 $c^2 = ab$ 。

作法：
1. 作線段 $AP = a$ (圖 7-46)。
2. 延長 AP 到點 B，使 $PB = b$ 。
3. 以 AB 為直徑作半圓
4. 過點 P 作 $PC \perp AB$ 交半圓於點 C。

PC 就是 a、b 的比例中項

證明：　略。



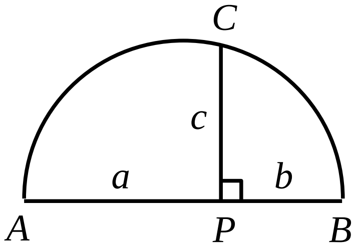
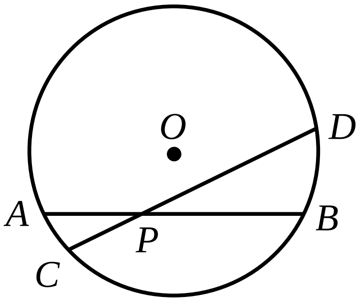


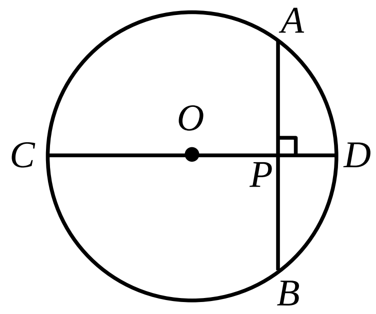
圖 7-46

練 習

1. 如圖，$AP=3\,\text{cm}$，$PB=5\,\text{cm}$，$CP=2.5\,\text{cm}$。求 CD。



(第 1 題)



(第 2 題)

2. 如圖，O 是圓心，$OP \perp AB$，$AP=4\,\text{cm}$，$PD=2\,\text{cm}$。求 OP。

切割線定理　從圓外一點引圓的切線與割線，切線長是這點到割線與圓交點的兩條線段長之比例中項。

已知：　點 P 是⊙O 外一點，PT 是切線，T 是切點，PA 是割線，點 A、B 是它與⊙O 的交點(圖 7-47)。

求證：　$PT^2=PA\bullet PB$。

證明：　連結 TA、TB。

$$\left.\begin{array}{r}\angle BPT=\angle TPA\\ \angle 1=\angle A\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \triangle BPT \sim \triangle TPA$

$\Rightarrow PB：PT=PT：PA$

$\Rightarrow PT^2=PA\bullet PB$

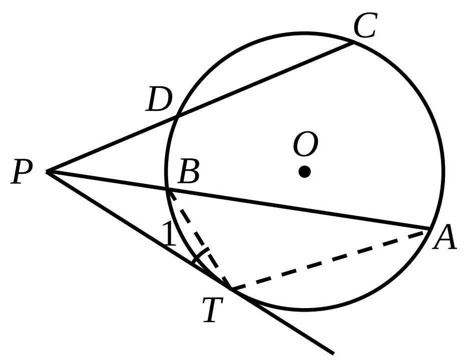


圖 7-47

推論　　從圓外一點引圓的兩條割線，這一點到每條割線與圓的交點之兩條線段長之積相等。

如圖 7-47 中，$PA\bullet PB=PC\bullet PD$。

【例 2】 $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$、…都經過點 A 與 B。求證：從線段 AB 的延長線上任意一點向各圓引切線，切點在同一圓上。

已知：　如圖 7-48，$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$、⋯都經過點 A 與 B。點 P 是線段 AB 的延長線上任意一點，且 PC、PD、PE、⋯分別與 $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$、⋯相切於點 C、D、E、⋯。

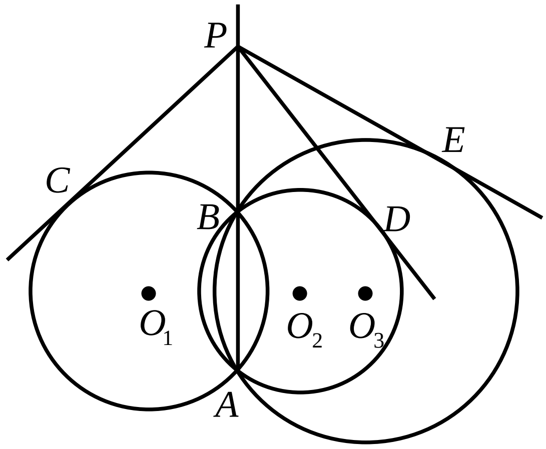


圖 7-48

求證：　C、D、E、⋯在同一個圓上。

證明：　$\because$　PC 是 $\odot O_1$ 的切線，PA 是 $\odot O_1$ 的割線

$\therefore$　$PC^2 = PA \bullet PB$

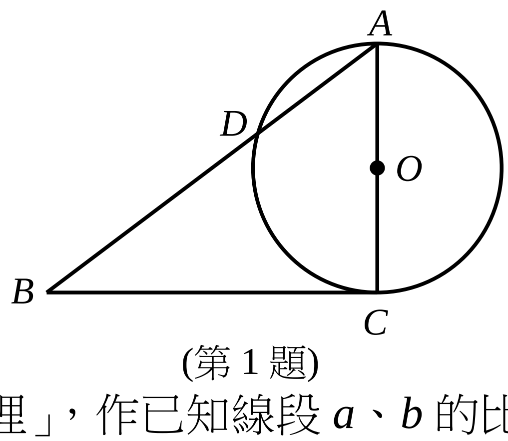
同理 $PD^2 = PA \bullet PB$、$PE^2 = PA \bullet PB$、⋯

$\therefore$　$PC = PC = PE = \cdots$

$\therefore$　C、D、E、⋯都在以點 P 為圓心，PC 為半徑的圓上。

練　習

1. 已知：$Rt\triangle ABC$ 的兩條直角邊 AC、BC 的長分別為 3 cm、4 cm。以 AC 為直徑作圓與斜邊 AB 交於點 D。求 BD 的長。



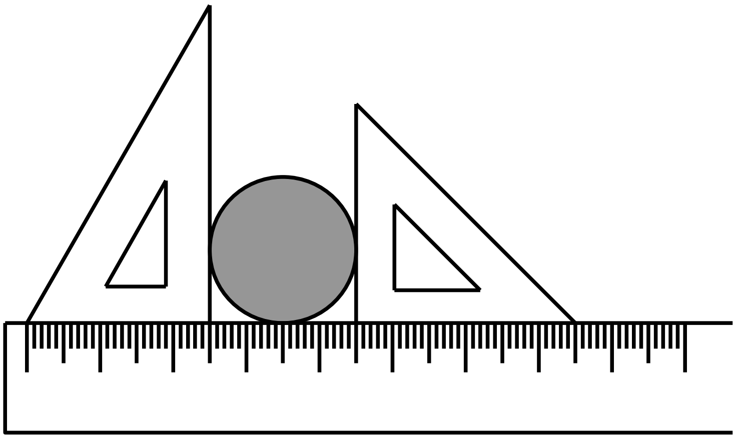
(第 1 題)

2. 運用「切割線定理」，作已知線段 a、b 的比例中項。

習 題 二 十 五

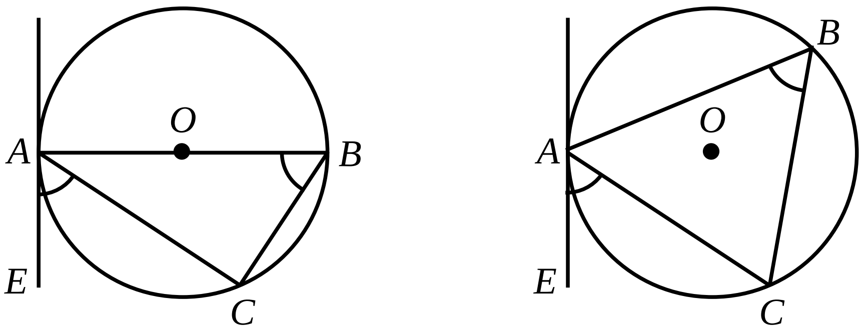
1. 已知圓的半徑等於 5 cm，圓心到直線 l 的距離是：(1) 3 cm；(2) 5 cm；(3) 7 cm。直線 l 與圓有幾個交點？為什麼？

2. 如圖，可以利用刻度尺與三角板測量圓形工具的直徑。說明測量的道理。



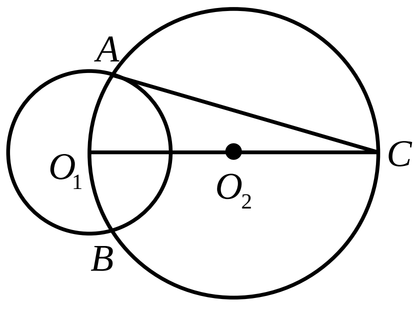
(第 2 題)

3. 已知：如圖，$\triangle ABC$ 內接於$\odot O$，$\angle CAE = \angle B$。如果(1) AB 是直徑；(2) AB 為非直徑的弦，求證：AE 與$\odot O$ 相切於點 A。



(第 3 題)

4. $\odot O_2$ 經過$\odot O_1$ 的圓心，與$\odot O_1$ 相交於 A、B 兩點。直線 O_1O_2 交$\odot O_2$ 於點 C。求證：AC 是$\odot O_1$ 的切線。



(第 4 題)

5. 兩個同心圓中，大圓的弦 AB 與 AC 分別與小圓相切於點 D 與 E。

求證：$DE \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2} BC$。

6. MN 是⊙O 的切線，AB 是⊙O 的直徑。求證：點 A、B 與 MN 的距離之和等於⊙O 的直徑。

7. 設 AB 為⊙O 的直徑，C 是⊙O 上一點，AD 與⊙O 在點 C 的切線相垂直，垂足為 D。求證：AC 平分 $\angle DAB$。

8. 求證：以等腰三角形底邊的中點為圓心，並且與一腰相切的圓，也與另一腰相切。

9. (1) 作一個半徑為 3 cm 的圓，使它與已知直線 l 相切於 l 上一點 A；
   (2) 以直線 l 外一點 A 為圓心，作圓與直線 l 相切。

10. 已知：等腰梯形各邊都與⊙O 相切，⊙O 的直徑為 6 cm，等腰梯形的腰等於 8 cm。求梯形的面積。

11. PA、PB 是⊙O 的切線，A、B 是切點，延長半徑 OB 到 C，使 $BC = OB$。求證：$\angle APC = 3\angle BPC$。

12. AB、CD 是⊙O 的切線，$AB // CD$；EF 也是⊙O 的切線，它與 AB、CD 分別相交於點 E 與 F。求證：$\angle EOF = 90°$。

13. PA、PB 為⊙O 的切線，AC 為經過切點 A 的直徑。求證：切點 B 與點 C 的連線平行於 PO。

14. 過⊙O 外一點 P 的直線 PA 與 PB 與⊙O 相切於點 A 與 B。點 D 是 $\overset{\frown}{AB}$ 上任意一點，過 D 的切線與 PA、PB 分別相交於點 E 與 F。已知 $\angle P = \alpha$，用 α 表示 $\angle EOF$。

15. 求證：
   (1) 等邊三角形的內心也是它的外心；
   (2) 等邊三角形的外接圓半徑 R 是內切圓半徑 r 的 2 倍。

16. $\triangle ABC$ 中，內切圓 I 與邊 BC、CA、AB 分別相切於點 D、E、F。求證：$\angle FDE = 90° - \frac{1}{2}\angle A$。

17. $\triangle ABC$ 中，E 是內心，$\angle A$ 的平分線與 $\triangle ABC$ 的外接圓相交於點 D。求證：$DE = DB = DC$。

18. 圓外切四邊形的周長為 48 cm，相鄰三條邊的比為 5：4：7，求四邊形各邊的長。

19. $ABCDEF$ 是⊙O 的外切六邊形。求證：

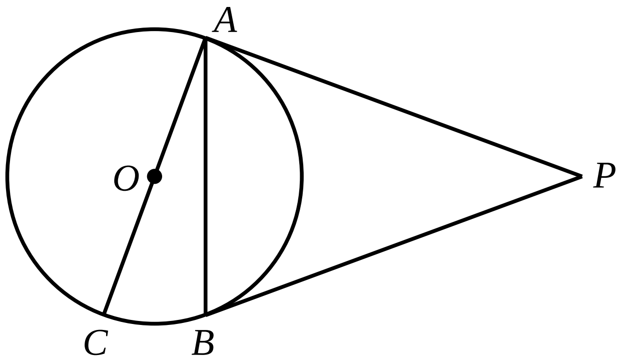
$$AB+CD+EF=BC+DE+FA$$ 。

20. 已知：△ABC 的 $\angle A$ 之平分線與外接圓相交於點 D，BE 是⊙O 的切線。求證：點 D 到 BC 與到 BE 的距離相等。

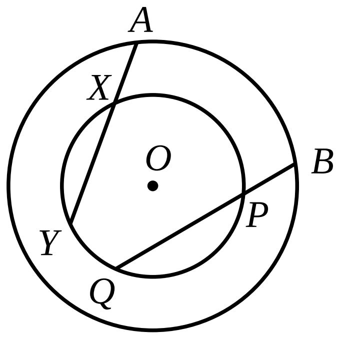
21. ⊙O 的弦 AB 之延長線與切線 EP 相交於點 P，E 為切點。$\angle APE$ 的平分線與 AE、BE 分別相交於點 C、D。

求證：△CDE 是等腰三角形。

22. 已知：PA、PB 與⊙O 相切於點 A、B，AC 是⊙O 的直徑。求證：$\angle APB=2\angle BAC$ 。



(第 22 題)



(第 24 題)

23. 圓內相交兩弦中，一弦被交點所分成的兩條線段之長為 4 cm 與 7 cm，另一弦全長為 11.5 cm。求這弦被分成的兩條線段之長。

24. 兩個同心圓中，A、B 為大圓上的任意兩點，過 A、B 作小圓的割線 AXY 與 BPQ。求證：$AX\bullet AY=BP\bullet BQ$ 。

25. 作一個正方形，使它的面積等於已知矩形的面積。

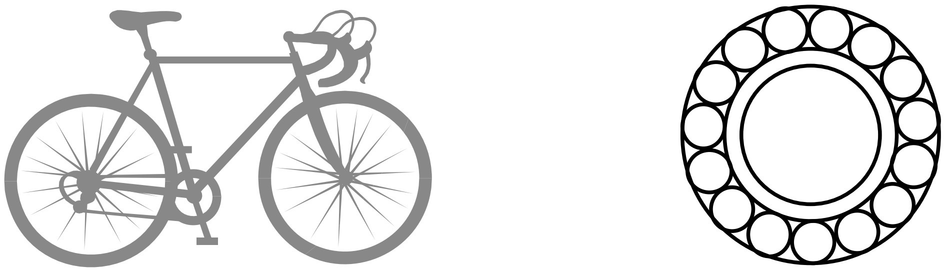
26. 設 C 為線段 AB 的中點，$BCDE$ 是以 BC 為邊的正方形。以 B 為圓心，BD 為半徑的圓與 AB 即其延長線段相交於點 H 及 K。求證：

(1) $HC\bullet CK=AC^2$ ；　　(2) $AH\bullet AK=2AC^2$ 。

三、圓與圓的位置關係

7.13　圓與圓的位置關係

從圖 7-49 的一些圓形部件之間的相互位置關係中可以看出，同一平面的兩個圓，可能有下面幾種位置關係：



自行車　　圖 7-49　　滾珠軸承

(1)　兩個圓沒有公共點，並且每一個圓上的點都在另一個圓的外部時，叫做這兩個圓**外離**(圖 7-50 甲)。

(2)　兩個圓有唯一的公共點，並且除了這個公共點以外，每個圓上的點都在另一個圓的外部時，叫做這兩個圓**外切**(圖 7-50 乙)。這個唯一個公共點叫做**切點**。

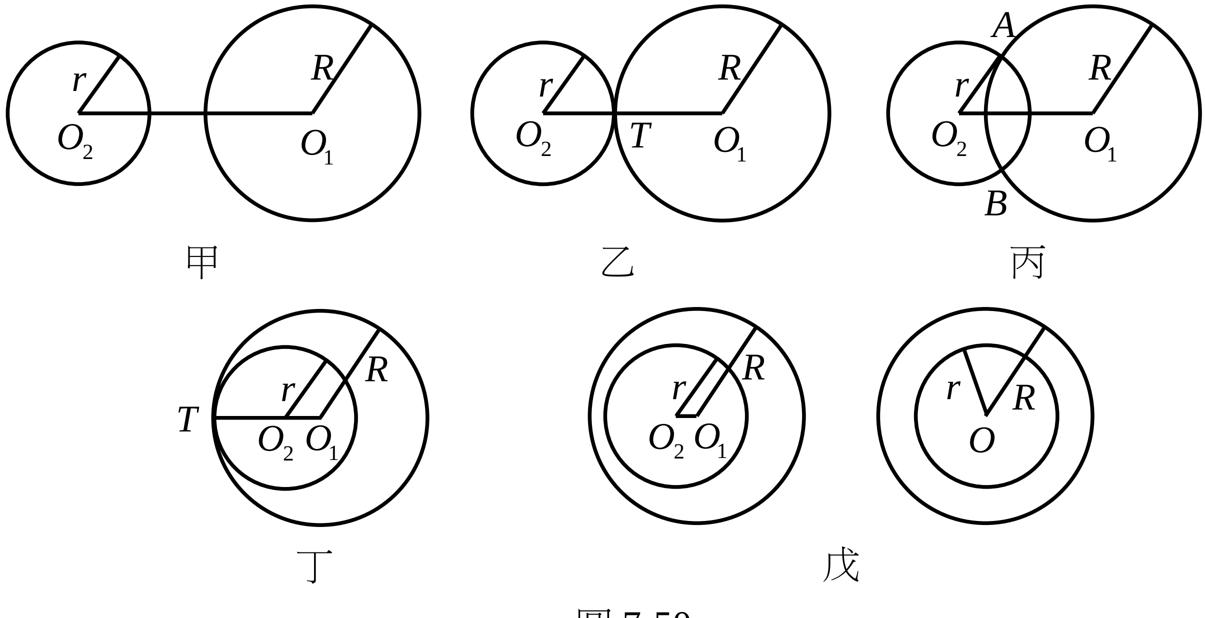


圖 7-50

(3)　兩個圓有兩個公共點時，叫做這兩個圓**相交**(圖 7-50 丙)。

(4) 兩個圓有唯一的公共點，並且除了這個公共點以外，一個圓上的點都在另一個圓的內部時，叫做這兩個圓**內切**(圖 7-50 丁)。這個唯一個公共點叫做**切點**。

(5) 兩個圓沒有公共點，並且一個圓上的點都在另一個圓的內部時，叫做這兩個圓**內含**(圖 7-50 戊)。兩個同心圓是兩圓內含的一種特例。

從圖 7-50 可以看出，兩圓的位置關係與兩圓半徑、圓心距的大小有關。如果兩圓的半徑分別為 R 與 r，圓心距為 d，那麼

(1) $\boldsymbol{d > R + r \Leftrightarrow}$ **兩圓外離**；

(2) $\boldsymbol{d = R + r \Leftrightarrow}$ **兩圓外切**；

(3) $\boldsymbol{R - r < d < R + r \ (R \geq r) \Leftrightarrow}$ **兩圓相交**；

(4) $\boldsymbol{d = R - r \ (R > r) \Leftrightarrow}$ **兩圓內切**；

(5) $\boldsymbol{d < R - r \ (R > r) \Leftrightarrow}$ **兩圓內含**。

在圖 7-50 中，設想$\odot O_1$固定不動，$\odot O_2$從一方移近並進入$\odot O_1$，直到圓心O_2與O_1重合，就可以看到上面所說的各種情況。

關於相交的兩圓，有下面的定理：

定理 **相交兩圓的連心線(**經過兩個圓心的直線**)，垂直平分兩圓的公共弦。**

已知：$\odot O_1$與$\odot O_2$相交於點 A 與 B (圖 7-51)。

求證：直線O_1O_2垂直平分線段 AB。

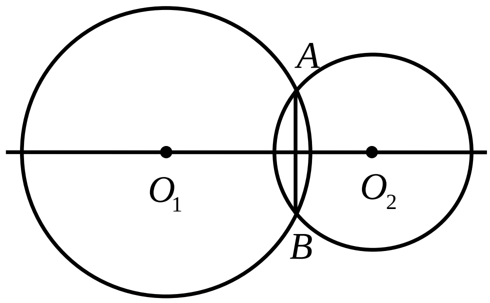


圖 7-51

證明：因為經過圓心O_1與O_2的直線是$\odot O_1$的對稱軸，又是$\odot O_2$的對稱軸，所以，$\odot O_1$與$\odot O_2$的公共點 A 的對稱點在$\odot O_1$上，又在$\odot O_2$上。這個對稱點只能是兩圓的另一個交點 B。這樣，連心線O_1O_2就是連結對稱點 A、B 的線段之垂直平分線。

關於相切的兩圓，有下面的定理：

定理　　相切兩圓的連心線，經過切點。

已知：　$\odot O_1$與$\odot O_2$相切於點 T (圖 7-52)。

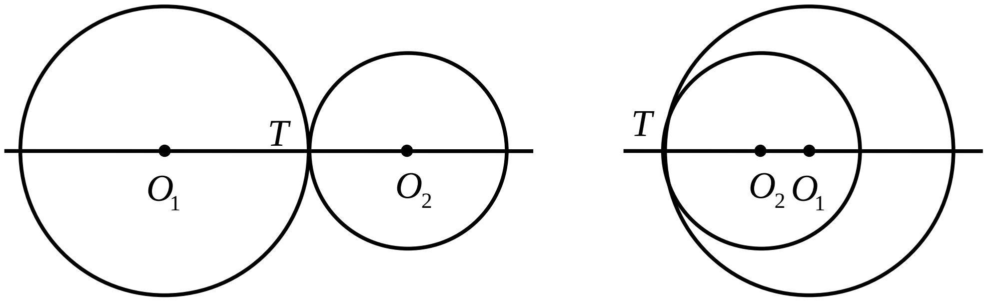


圖 7-52

求證：　連心線O_1O_2經過切點 T。

證明：　用反證法。

假設O_1O_2不經過$\odot O_1$與$\odot O_2$的切點 T (即點 T 不在O_1O_2上)，那麼，點 T 關於O_1O_2的對稱點T'也不在O_1O_2上。由於直線O_1O_2是$\odot O_1$的對稱軸，又是$\odot O_2$的對稱軸，並且點 T 是$\odot O_1$與$\odot O_2$的公共點，所以點 T 的對稱點T'也是$\odot O_1$與$\odot O_2$的公共點。這與題設$\odot O_1$與$\odot O_2$相切相矛盾，因此假設不能成立。連心線O_1O_2經過切點 T。

【例】　已知：兩個等圓$\odot O_1$與$\odot O_2$相交於 A、B 兩點，$\odot O_1$經過點O_2 (圖 7-53)。求$\angle O_1AB$的度數。

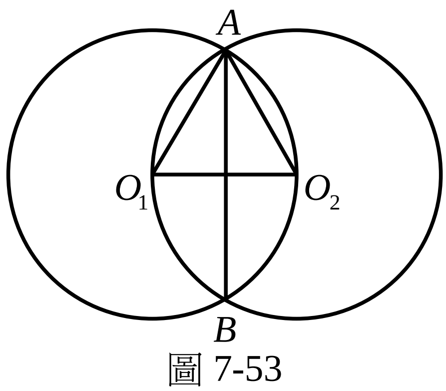


圖 7-53

解　$\because$　$\odot O_1$經過點O_2、$\odot O_1$、$\odot O_2$是等圓

$\therefore$　$O_1A = O_1O_2 = O_2A$

$\therefore$　$\angle O_1AO_2 = 60°$

又 $\because$　$AB \perp O_1O_2$

$\therefore$　$\angle O_1AB = 30°$

練　習

1. $\odot O_1$與$\odot O_2$的半徑分別為 3 cm 與 4 cm，設

   (1) $O_1O_2 = 8\,\text{cm}$　　(2) $O_1O_2 = 7\,\text{cm}$　　(3) $O_1O_2 = 5\,\text{cm}$

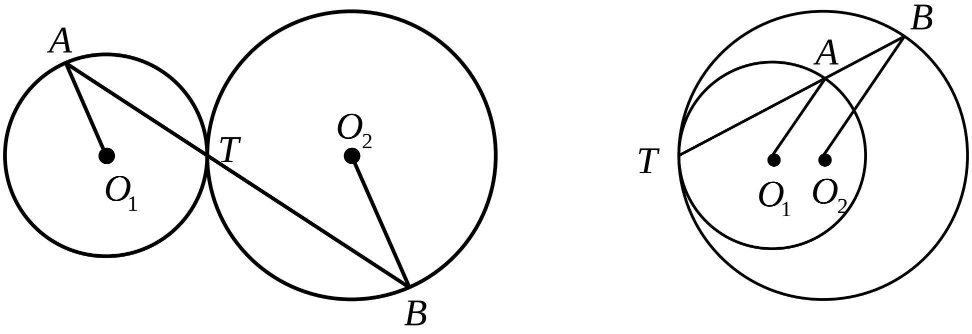
   (4) $O_1O_2 = 1\,\text{cm}$　　(5) $O_1O_2 = 0.5\,\text{cm}$　　(6) O_1與O_2重合

   $\odot O_1$與$\odot O_2$的位置關係怎樣？

2. 三角形的三邊長分別為 4 cm、5 cm、6 cm，以各頂點為圓心的三個圓兩兩外切。求各圓的半徑。如果三邊長分別為 a、b、c 呢？

3. 已知：$\odot O_1$與$\odot O_2$相交於點 C 與 D，O_1O_2的延長線與$\odot O_1$相交於點 A，AC、AD 分別與$\odot O_2$相交於點 E、F。求證：$CE = DF$

4. 已知：$\odot O_1$與$\odot O_2$相切於點 T，經過切點 T 的直線與$\odot O_1$與$\odot O_2$分別相交於另一點 A 與 B。求證：$O_1A // O_2B$。

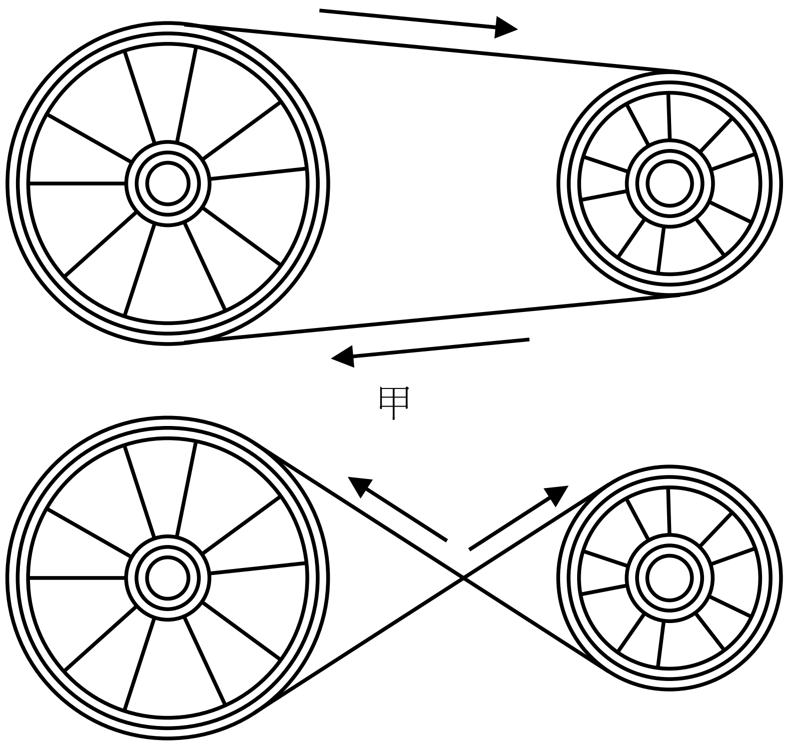


(第 4 題)

7.14　兩圓的公切線

很多機器上的傳動帶與主動輪、從動輪之間的位置關係，給我們以一條直線與兩個圓同時相切的形象(圖 7-54)。

與兩個圓都相切的直線，叫做**兩圓的公切線**。兩個圓的圓心在公切線同旁時，這樣的公切線叫做**外公切線**(如圖 7-54 甲)。兩個圓的圓心在公切線兩旁時，這樣的公切線叫做**內公切線**(如圖 7-54 乙)。公切線上的兩個切點之距離叫做**公切線的長**。



甲

乙

圖 7-54

下面我們說明兩圓公切線的作法。

兩圓外離、外切或相交時，外公切線的作法如下。

已知： $\odot O_1$與$\odot O_2$的半徑分別為R與$r\,(R>r)$，$O_1O_2>R+r$ (圖 7-55)。

求作： $\odot O_1$與$\odot O_2$的外公切線。

分析： 前面已經學過經過一點作一圓的切線，這啟發我們想辦法把作兩個圓公切線的問題，化為過一個點作一個圓切線的問題來解決。假設把$\odot O_1$與$\odot O_2$的半徑同時縮短r，那麼$\odot O_1$變為與它同心，半徑是$R-r$的圓，而$\odot O_2$變為一個點O_2。因為過點O_2能夠作直線與半徑為$R-r$的圓相切，那麼只要把切線平行移動r，就可以得到$\odot O_1$與$\odot O_2$的公切線(圖 7-55)。

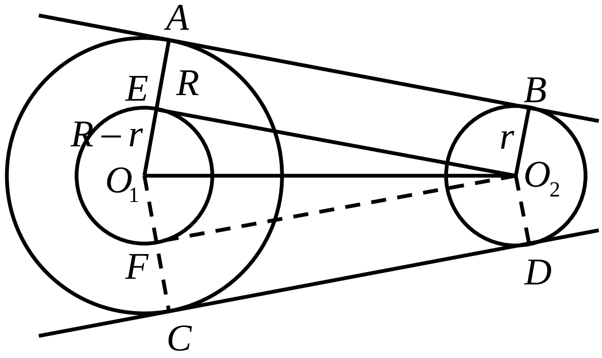


圖 7-55

作法：　1.　以O_1為圓心，$R-r$為半徑作圓，從O_2作這個圓的切線O_2E，E為切點。

2.　連結O_1E，並延長交$\odot O_1$於點A。

3.　經過圓心O_2作$O_2B // O_1A$，並交$\odot O_2$於點B。

4.　作直線AB。

AB就是所求的一條公切線。

證明：　由作法，$O_2E \perp O_1A$，$O_2B // O_1A$，$EA = O_1A - O_1E = R-(R-r) = r = O_2B$，所以四邊形$EO_2BA$是矩形，於是，$O_1A \perp AB$、$O_2B \perp AB$。因此，$AB$是$\odot O_1$的切線，又是$\odot O_2$的切線，即$AB$是$\odot O_1$與$\odot O_2$的外公切線。

由作法，還可以知道，從O_2向以O_1為圓心，$R-r$為半徑的圓，可以作出兩條切線(O_2E與O_2F)，因此，可以作出$\odot O_1$與$\odot O_2$的兩條外公切線(AB與CD)。

仿照上面的分析，可以得出兩圓外離($O_1O_2 > R+r$)時的內公切線之作法(圖 7-56)。

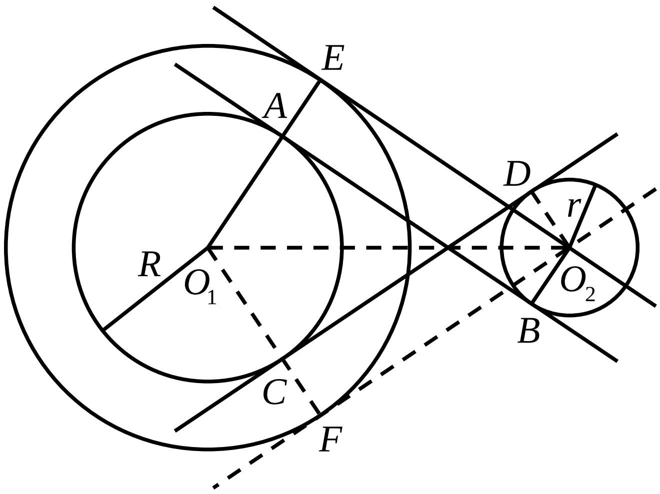


圖 7-56

兩圓外切(或內切)時，經過切點作直線垂直於它們的連心線，就得到它們的內公切線(或外公切線)。

從公切線的作法可知，如果兩個圓有兩條外公切線或內公切線，那麼它們的長相等。

定理　　兩圓的兩條外公切線之長相等；兩圓的兩條內公切線之長也相等。

【例】　如圖 7-57，$\odot O_1$與$\odot O_2$外切於點 A，BC 是$\odot O_1$與$\odot O_2$的公切線，B、C 為切點。

求證：　$AB \perp AC$ 。

證明：　過點 A 作$\odot O_1$與$\odot O_2$的內公切線交 BC 於點 O。

因為 OB、OA 是$\odot O_1$的兩條切線，

$\therefore \quad OB = OA$

同理 $OC = OA$

$\therefore \quad OB = OA = OC$

$\therefore \quad AB \perp AC$

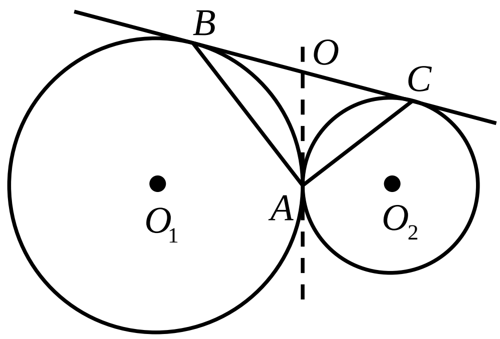


圖 7-57

練　習

1. 已知$\odot O_1$與$\odot O_2$的半徑分別為 $R = 4$ cm、$r = 1.5$ cm、$O_1O_2 = 6.5\,\text{cm}$。
   (1)　作$\odot O_1$與$\odot O_2$的外公切線，量出外公切線的長(精確到 0.1 mm)及外公切線與連心線所成的角度(精確到$1°$)；
   (2)　計算出(1)中的長度與角度。
2. 已知$\odot O_1$與$\odot O_2$的半徑分別為 $R = 2.5$ cm、$r = 1.5$ cm、$O_1O_2 = 6\,\text{cm}$，作$\odot O_1$與$\odot O_2$的內公切線。

7.15　相切在作圖中的應用

運動場上的跑道與有些凸輪的輪廓線(圖 7-58)等，是由線段與圓弧或幾段圓弧平滑的連接起來的。

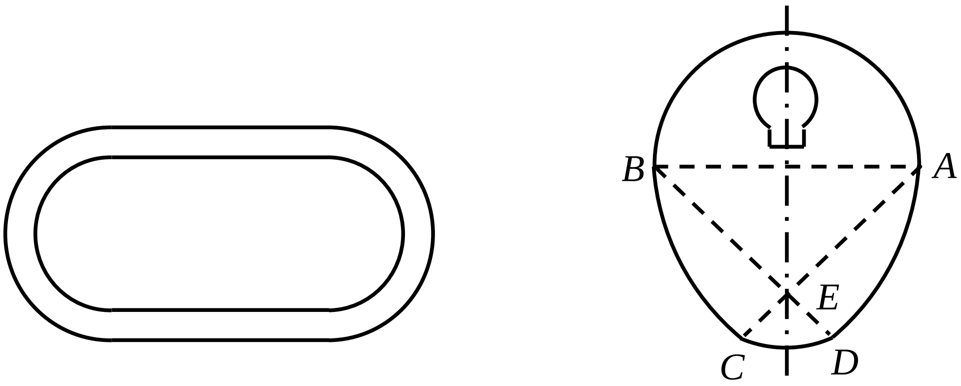


圖 7-58

線段所在的直線(圓弧所在的圓)與圓弧所在的圓相切於某一點，並且在切點的兩側，就說線段(圓弧)與圓弧在這一點**連接**。如圖 7-59 中，線段 AB 與弧 $\overset{\frown}{AC}$ 在點 A 連接，圖 7-60 中，$\overset{\frown}{AB}$ 與 $\overset{\frown}{AC}$ 在點 A 連接。

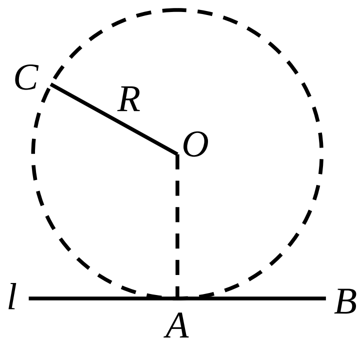


圖 7-59

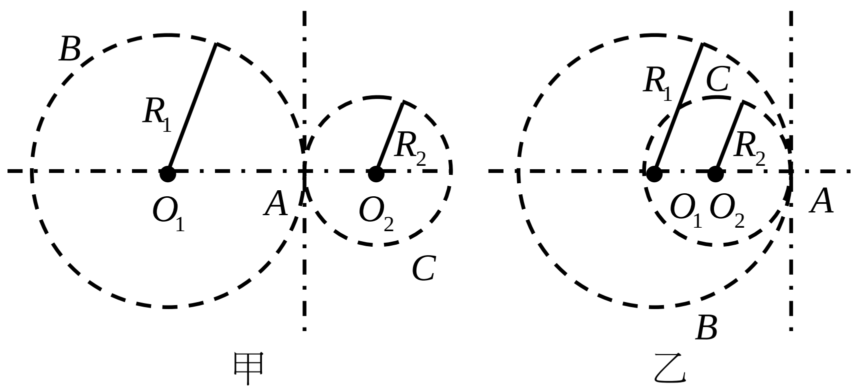


圖 7-60

圖 7-60 甲中，$\odot O_1$ 與 $\odot O_2$ 外切於點 A，我們稱在連心線 O_1O_2 兩旁的 $\overset{\frown}{AB}$ 與 $\overset{\frown}{AC}$ 在點 A **外連接**。圖 7-60 乙中，$\odot O_1$ 與 $\odot O_2$ 內切於點 A，我們稱在連心線 O_1O_2 兩旁的 $\overset{\frown}{AB}$ 與 $\overset{\frown}{AC}$ 在點 A **內連接**。

由連接的定義可知，在圖 7-60 中，$\overset{\frown}{AB}$ 與 $\overset{\frown}{AC}$ 在點 A 連接，就是 $\odot O_1$ 與 $\odot O_2$ 在點 A 相切，因此點 A 一定在連心線 O_1O_2 上。利用這個關係，可畫圓弧與圓弧在某一點連接。

【例 1】 已知： 如圖 7-61，$\overset{\frown}{AB}$ 的半徑為 R_1，圓心為 O_1，線段 R_2。

求作： 半徑為 R_2 的 $\overset{\frown}{AC}$，使 $\overset{\frown}{AC}$ 與 $\overset{\frown}{AB}$ 在點 A 外連接。

分析：　要作 $\overset{\frown}{AC}$ 與 $\overset{\frown}{AB}$ 外連接，就是要作 $\overset{\frown}{AC}$ 與 $\overset{\frown}{AB}$ 所在的圓在點 A 外切。因此 $\overset{\frown}{AC}$ 所在的圓之圓心 O_2 一定在 O_1A 的延長線上，並且 $O_1O_2 = R_1 + R_2$ 。

作法：　1.　連結 O_1A，並延長到 O_2，使 $O_1O_2 = R_1 + R_2$。

2.　以 O_2 為圓心，R_2 為半徑作 $\overset{\frown}{AC}$ ，使 $\overset{\frown}{AC}$ 與 $\overset{\frown}{AB}$ 在 O_1O_2 的兩側。

$\overset{\frown}{AC}$ 就是所求的弧。

證明：　略。

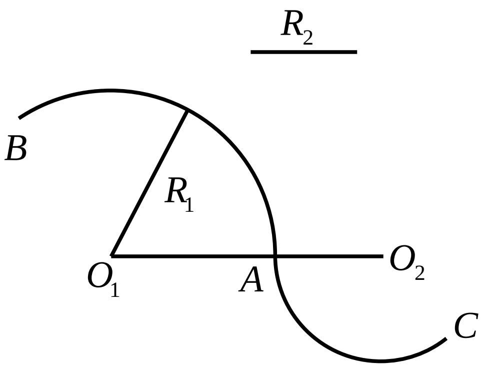


圖 7-61

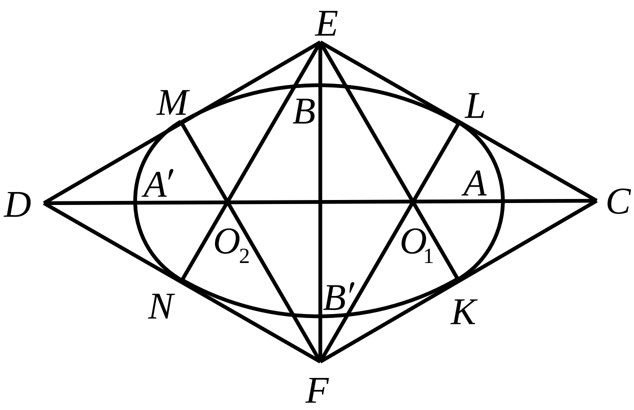


圖 7-62

【例 2】 用圓弧連接，畫橢圓的近似圖形。

作法：　1.　任作一線段 EF。以 EF 為公共邊作等邊三角形 CEF 與 DEF(圖 7-62)。

2.　作△CEF 的中線 EK、FL，相交於點 O_1 。

3.　作△DEF 的中線 EN、FM，相交於點 O_2 。

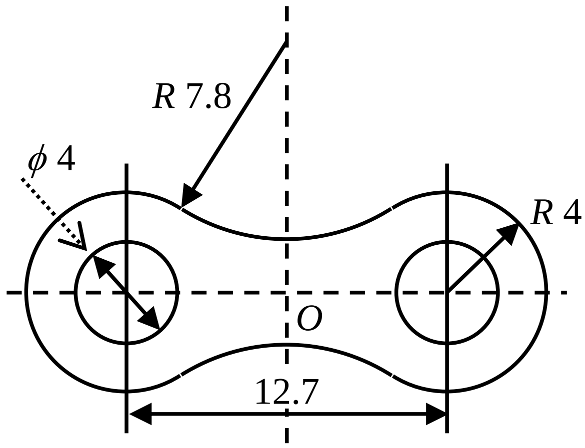
4.　分別以 O_1 、 O_2 為圓心，以 O_1K 為半徑作 $\overset{\frown}{KAL}$ 、 $\overset{\frown}{MA'N}$ 。

5.　分別以 E、F 為圓心，以 EK 為半徑作 $\overset{\frown}{NB'K}$ 、 $\overset{\frown}{MBL}$ 。

四條弧連接組成的圖形就是橢圓的近似圖形。

練　習

1. 說明近似橢圓的四條弧為什麼是連接的。
2. 按 4：1 的比例尺，作出下面的圖樣：



(第 2 題)

習　題　二　十　六

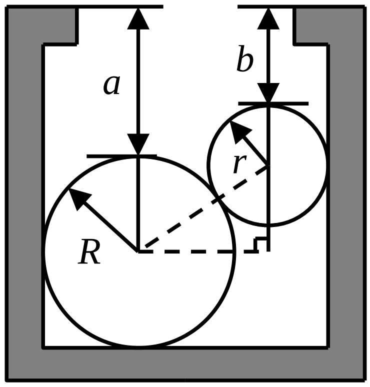
1. 定圓 O 的半徑是 4 cm，動圓 P 的半徑是 1 cm。
   (1)　設 $\odot P$ 與 $\odot O$ 相外切。那麼點 P 與點 O 的距離是多少？點 P 可以在什麼樣的線上移動呢？
   (2)　設 $\odot P$ 與 $\odot O$ 相內切呢？
2. 分別以 2 cm、2.5 cm、4 cm 為半徑作圓，使它們兩兩外切。
3. 經過相交兩圓的一個交點，作兩圓的公共弦之垂線。求證：這條直線上被兩圓所截得的線段等於圓心距的二倍。
4. 已知：$\odot O_1$ 與 $\odot O_2$ 相交於點 A 與 B，經過點 A 的直線分別交兩圓於點 C 與 D，經過點 B 的直線分別交兩圓於點 E 與 F，且 $CD // EF$。求證：
   (1)　$CD = EF$；　　(2)　$CE = DF$。
5. 已知：$\odot O$ 與 $\odot O'$ 外切於點 A，經過點 A 作直線 BC 與 DE，BC 交 $\odot O$ 於點 B、$\odot O'$ 於點 C，DE 交 $\odot O$ 於點 D、$\odot O'$ 於點 E。求證：$BD // CE$。

6. 經過相內切的兩圓之切點 A 作大圓的弦 AD、AE，設 AD、AE 分別與小圓相交於點 B、C。求證： $DE // BC$ ；AB：$AC = AD$：AE。

7. 已知兩個圓相外切，它們的兩條外公切線互相垂直，其中大圓的半徑等於 5 cm。求小圓半徑及外公切線長。

8. $\odot O_1$ 與 $\odot O_2$ 相交於點 B 與 C，A 是 $\odot O_1$ 上另一點，AT 是 $\odot O_1$ 的切線，又直線 AB 與 AC 分別交 $\odot O_2$ 於點 D 與 E。求證：$AT // DE$ 。

9. 用半徑 $R = 8\,\text{mm}$、 $r = 5\,\text{mm}$ 的鋼球測量口小內大的內孔之直徑 D。測得鋼球頂點與孔口平面的距離分別為 $a = 12.5\,\text{mm}$、 $b = 8.3\,\text{mm}$(如圖)，計算出內孔直徑 D 的大小(精確到 0.1 mm)。

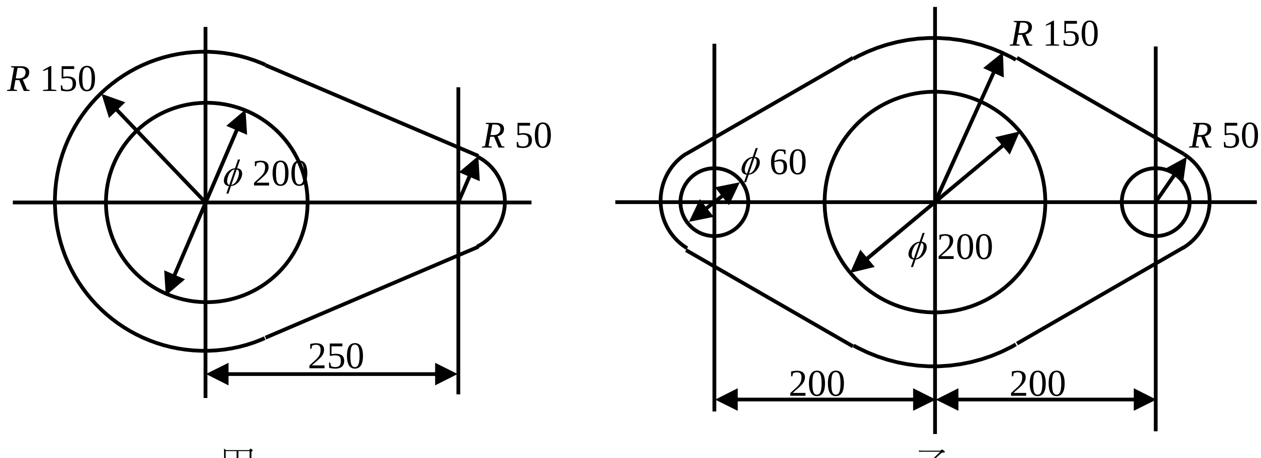


(第 9 題)

10. 兩圓半徑為 38 mm 與 22 mm，圓心距為 65 mm。求
    (1) 內公切線長；
    (2) 內公切線與連心線的夾角。

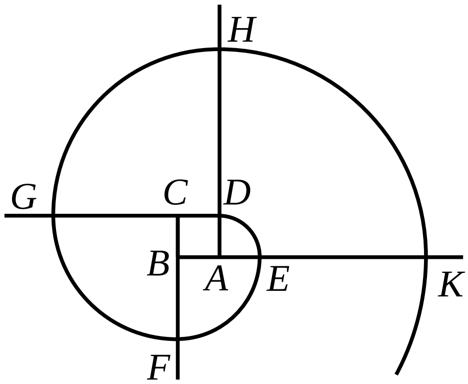
11. 求證：
    (1) 兩圓的外公切線之四個切點在同一個圓上；
    (2) 兩圓的內公切線之四個切點在同一個圓上。

12. 按 1：5 的比例尺，作出下列圖樣。

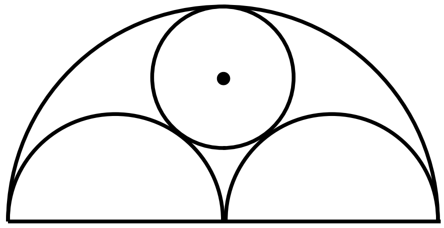


(第 12 題)

13. 如圖，$ABCD$ 是正方形，曲線 $DEFG\cdots$叫做「正方形的漸開線」，其中 $\overset{\frown}{DE}$、$\overset{\frown}{EF}$、$\overset{\frown}{FG}$、$\overset{\frown}{GH}$、…的圓心依次按 A、B、C、D 循環，它們依次相連接。取 $AB=10\,\text{mm}$，作圖。



(第 13 題)



(第 14 題)

14. 已知圖中各圓兩兩相切，大圓半徑為 R。求各小圓的半徑，並畫出圖形。

四、正多邊形與圓

7.16 正多邊形與圓

各邊相等、各角也相等的多邊形叫做正多邊形。例如等邊三角形是正三角形，正方形是正四邊形。在工程與實用圖案等方面，常常要用到正多邊形(圖 7-63)。其中正三角形、正方形、正五邊形、正六邊形、正八邊形等應用較多。

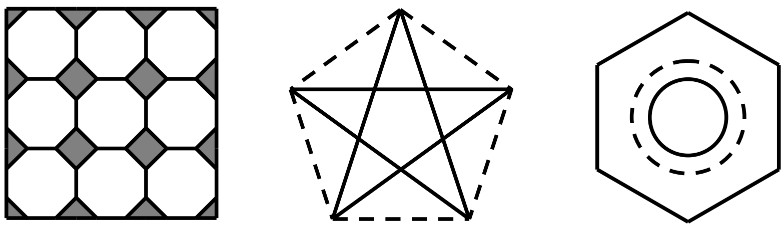


圖 7-63

正多邊形與圓有非常密切的關係。我們只要把一個圓分成幾條相等的弧，就可以作出這個圓的內接或外切正 n 邊形。下面我們來研究這個問題。

定理　　**把圓分成 $n\,(n\geq 3)$ 等份。**

(1)　依次連結各分點所得的多邊形是這個圓的內接正 n 邊形；

(2)　經過各分點作圓的切線，以相鄰切線的交點為頂點之多邊形是這個圓的外切正 n 邊形。

我們以 $n=5$ 的情況為例來進行證明。

已知：　$\odot O$ 中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EA}$，$TP$、$PQ$、$QR$、$RS$、$ST$ 分別是經過分點 A、B、C、D、E 的 $\odot O$ 的切線(圖 7-64)。

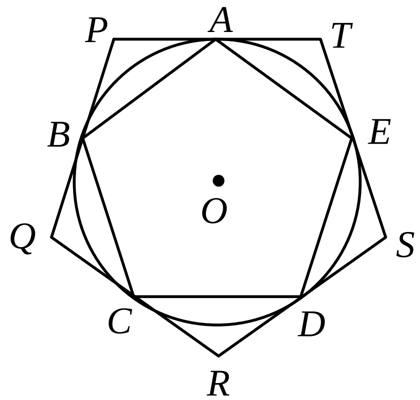


圖 7-64

求證：(1)　五邊形 $ABCDE$ 是 $\odot O$ 的內接正五邊形；

(2)　五邊形 $PQRST$ 是 $\odot O$ 的外切正五邊形。

證明：(1)　$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EA}$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow\begin{cases}AB=BC=CD=DE=EA\\ \overset{\frown}{BCE}=\overset{\frown}{CDA}=\overset{\frown}{DEB}=\overset{\frown}{EAC}=\overset{\frown}{ABD}\end{cases}\\ \quad\Rightarrow \angle EAB=\angle ABC=\angle BCD=\angle CDE=\angle DEA\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ 五邊形 $ABCDE$ 是 $\odot O$ 的內接正五邊形。

(2)　$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EA}$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow\begin{cases}AB=BC=CD=DE=EA\\ \angle PAB=\angle PBA=\angle QBC=\angle QCB=\angle RCD\end{cases}\\ \quad=\angle RDC=\angle SDE=\angle SED=\angle TEA=\angle TAE\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ $\triangle PAB$、$\triangle QBC$、$\triangle RCD$、$\triangle SDE$、$\triangle TEA$ 是全等的等腰三角形

$\Rightarrow$ 五邊形 $PQRST$ 的各邊相等、各角相等

$\Rightarrow$ 五邊形 $PQRST$ 是 $\odot O$ 的外切正五邊形。

反過來，是不是每一個正多邊形都有一個外接圓與一個內切圓呢？我們仍以正五邊形 *ABCDE* 為例來研究這個問題。

經過頂點 *A*、*B*、*C* 作 ⊙*O*，連結 *OA*、*OB*、*OC*、*OD*(圖 7-65)。

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r} OB=OC\Rightarrow\angle 1=\angle 2\\ \angle ABC=\angle BCD\end{array}\right\}\Rightarrow\angle 4=\angle 3\\ OC=OB\\ CD=BA\end{array}\right\}$$

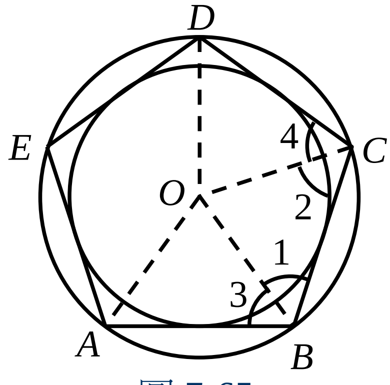


圖 7-65

$\Rightarrow\triangle ODC\cong\triangle OAB$

$\Rightarrow OD=OA$

$\Rightarrow$點 *D* 在⊙*O* 上

同理，點 *E* 在⊙*O* 上。

所以正五邊形 *ABCDE* 有一個外接圓⊙*O* 。

因為正多邊形 *ABCDE* 的各邊都相等，所以它的外接圓之圓心 *O* 到各邊的距離都相等。以 *O* 為圓心，以這個距離為半徑的圓與各邊都相切。所以，正五邊形 *ABCDE* 有一個內切圓，它的圓心就是外接圓的圓心。於是得到：

定理　　**任何正多邊形都有一個外接圓與一個內切圓，這兩個圓是同心圓。**

正多邊形的外接圓(或內切圓)之圓心叫做**正多邊形的中心**，外接圓的半徑叫做**正多邊形的半徑**，內切圓的半徑叫做**正多邊形的邊心距**。正多邊形各邊所對的外接圓之圓心角都相等。正多邊形每一邊所對的外接圓之圓心角叫做**正多邊形的中心角**。

正多邊形都是軸對稱圖形，一個正 *n* 邊形共有 *n* 條對稱軸，(為什麼？)每條對稱軸都通過正 *n* 邊形的中心(圖 7-66)。如果正多邊形有偶數條邊，那麼它又是中心對稱圖形，它的中心就是對稱中心(圖 7-67)。

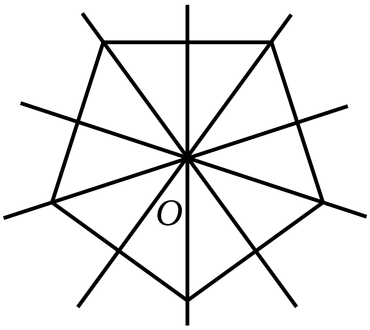


圖 7-66

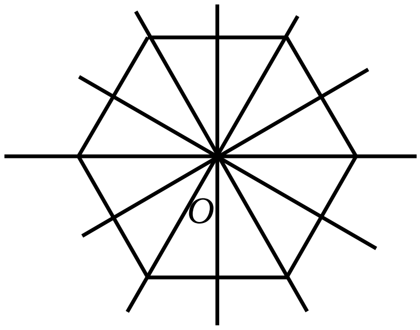


圖 7-67

邊數相同的正多邊形相似，所以它們的周長之比等於它們的邊長(或半徑、邊心距)之比，它們的面積之比等於它們的邊長(或半徑、邊心距)平方之比。

練　習

1. (口答)矩形是正多邊形嗎？菱形是正多邊形嗎？為什麼？
2. 求證：(1) 各邊相等的圓內接多邊形是正多邊形；
   (2) 各角相等的圓外切多邊形是正多邊形。
3. 證明：在正 n 邊形中，
   (1) 中心角等於 $\dfrac{360^\circ}{n}$；　　(2) 中心角與外角相等。
4. (口答)一個正五邊形，要繞它的中心至少轉多少度，才能與原來的正五邊形重合？在不超過 360° 的範圍內，這樣的角度有幾個？正 n 邊形呢？

7.17　正多邊形的有關計算

我們知道，多邊形的內角和等於 $(n-2)\bullet180^\circ$。因為正多邊形的各角都相等，所以它的每一個內角都等於

$$\frac{(n-2)\bullet180^\circ}{n}$$

下面研究正多邊形的其它計算問題。

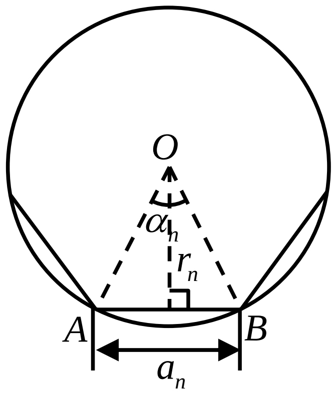


圖 7-68

正 n 邊形的 n 條中心與各頂點的連線(稱做正 n 邊形的半徑)把它分成了 n 個等腰三角形，如圖 7-68，這些等腰三角形底邊上的高，又把

它們分成 $2n$ 個直角三角形，而這些直角三角形的斜邊恰好都是正 n 邊形的外接圓之半徑，一條直角邊是正 n 邊形的邊心距，另一條直角邊是正 n 邊形邊長的一半，顯然這些直角三角形是全等的。因而得到：

定理　正 n 邊形的半徑與邊心距把正 n 邊形分成 $2n$ 個全等的直角三角形。

由於正 n 邊形的中心角 $\alpha_n = \dfrac{360^\circ}{n}$，我們應用上面定理，就可以把正 n 邊形的邊長 a_n 、邊心距 r_n 、周長 p_n 與面積 S_n 等的計算問題歸結為有關直角三角形的計算問題。

【例】　已知正六邊形 $ABCDEF$ 的半徑為 R，求這個正六邊形的邊長 a_6 、周長 p_6 與面積 S_6

$\boxed{\text{解}}$　連結半徑 OA、OB，作△OAB 的高 OG，得 Rt△OGB (圖 7-69)。

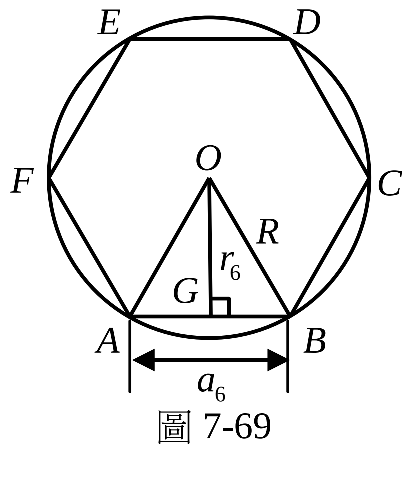


圖 7-69

$\because \quad \angle GOB = \dfrac{360^\circ}{2n} = 30^\circ$

$\therefore \quad a_6 = 2R\sin 30^\circ = 2 \bullet \dfrac{R}{2} = R$

$\therefore \quad p_6 = 6 \bullet a_6 = 6R$

$\because \quad r_6 = R\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R$

$\therefore \quad S_6 = 6 \bullet \dfrac{1}{2} \bullet r_6 \bullet a_6 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}R^2$

練　習

1. 已知圓的半徑為 R，求它的內接正三角形、正方形的邊長、邊心距及面積。
2. 在半徑為 20 cm 的圓中，利用三角函數表，計算內接正九邊形的邊長、邊心距、周長及面積(保留四個有效數字)。
3. 設正三角形的邊長為 a，求它的邊心距、半徑與高。並證明：邊心距：半徑：高 ＝1：2：3。

7.18 正多邊形作圖

半徑為 R 的正多邊形之作圖問題，實際上就是它的外接圓之等分問題。把圓 n 等分後，順次連結各分點，就得到正 n 邊形。

由於正 n 邊形的中心角 $\alpha_n = \dfrac{360^\circ}{n}$，使用量角器，作出中心角 α_n，就可以把圓 n 等份，從而作出半徑為 R 的正 n 邊形。

又因為正 n 邊形的邊長 $a_n = 2R\sin\dfrac{180^\circ}{n}$，使用正弦函數表，可以算出半徑為 R 的正 n 邊形之邊長 a_n，用刻度尺與圓規也可以把圓分成 n 等份，再作出半徑為 R 的正 n 邊形。《數學用表》上還有「等分圓周表」，給出了半徑為 1 的圓之內接正三角形至內接正一百邊形的邊長，即給出了 $2R=1$ 時，n 為 3～100 的 a_n 之值。實際上，這些值就是 $\sin\dfrac{180^\circ}{n}$ 的值。

用上面方法作出的正 n 邊形，都是近似的，但對於一些特殊的正 n 邊形，還可以使用直尺與圓規來作準確的圖形。

(1) 正四、八、…邊形的作法。

如圖 7-70，在⊙O 中，用直尺與圓規作兩條互相垂直的直徑，就可以作出正四邊形。再逐次作所成的中心角之平分線，還可以作出正八、十六、…邊形。

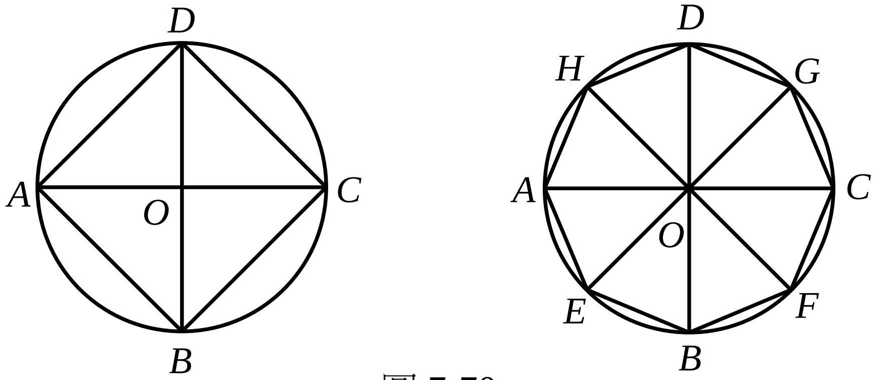


圖 7-70

(2) 作正三、六、十二、…邊形。

正六邊形的邊長 $a_6 = R$，從圖 7-71 中容易看出，用直尺圓規可以作出正三、六、十二、…邊形。

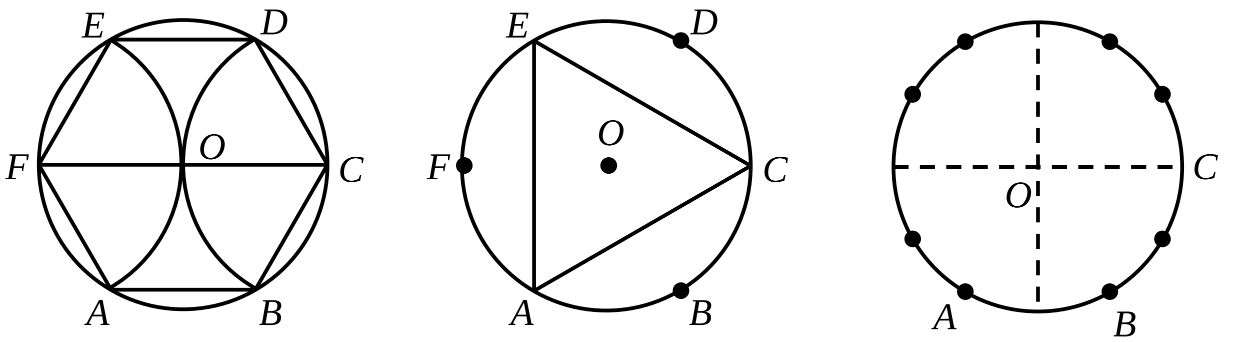


圖 7-71

(3) 作正十、五邊形

假設正十邊形已經作出，如圖 7-22，AB 是 $\odot O$ 內接正十邊形的一邊，連結 OA、OB 得到頂角 $a_{10}=36°$，底角為 $\dfrac{180°-36°}{2}=72°$ 的等腰三角形 OAB，作底角的平分線 BM 交 OA 於 M，可得到 $\angle ABM=\angle MBO=\angle AOB=36°$，所以 $OM=MB$。由 $\angle AMB=\angle MAB=72°$，得 $OM=AB$。因為$\triangle OAB\sim\triangle BAM$，得到 $OA:AB=BA:AM$，即

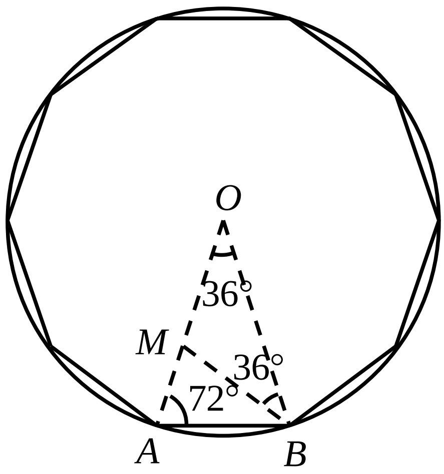


圖 7-72

$$OA:OM=OM:AM$$

所以 M 是半徑 OA 的黃金分割點，OM 等於正十邊形的邊長。

把圓的半徑 OA 作黃金分割，如圖 7-73，OM 就等於正十邊形的邊長。以 OM 為半徑作弧等分圓周，順次連結各分點，就得到正十邊形 $ABCDEFGHIJ$。

圖 7-73 中，分點 A、C、E、G、I 把 $\odot O$ 分成 5 等份。順次連結各點，就得正五邊形 $ACEGI$。

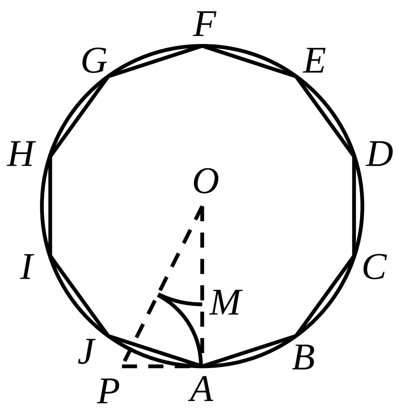


圖 7-73

把圓分成五等份，還可以用下面作法：

如圖 7-74 甲，作已知圓 O 互相垂直的直徑 XY 與 AZ；取半徑 OX 的中點 M；以 M 為圓心，MA 為半徑作弧 $\overset{\frown}{AN}$，與半徑 OY

相交於 N；在⊙O 上連續截取等弧，使弦 $AB = BC = CD = DE = AN$；則 A、B、C、D、E 就是所求的分點。

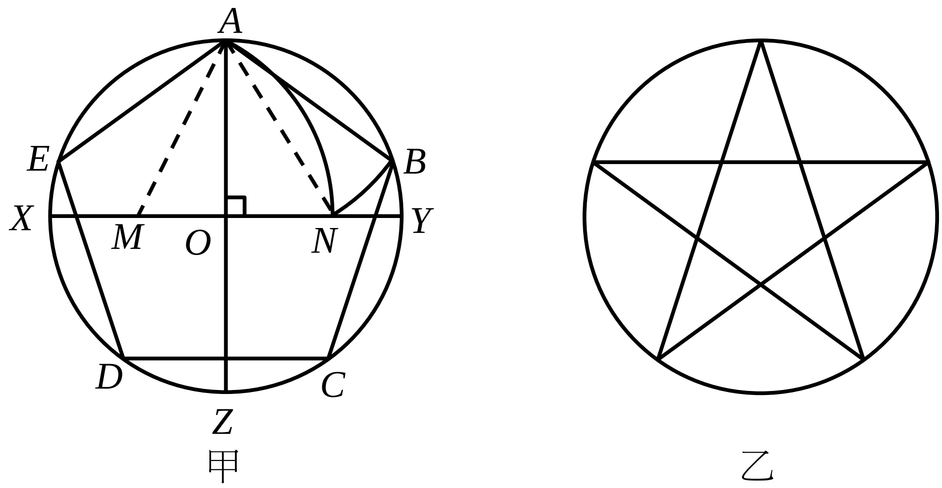
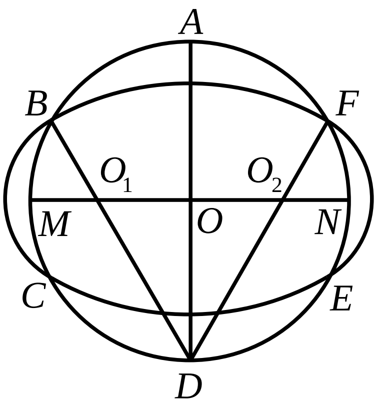


圖 7-74

把圓分成了五等份，還可以作出如圖 7-74 乙所示的正五角星形。

練　習

1. 運用量角器作半徑 $R = 4\,\text{cm}$ 的正七邊形與正九邊形。再運用三角函數表計算出它們的邊長，進行檢驗。
2. 按照圖 7-74 甲所示的作法，在半徑為 3 cm 的圓中作出如 7-74 乙所示的正五角星形。
3. 如圖畫近似橢圓。先將⊙O 六等分，分點為 A、B、C、D、E、F，作互相垂直的直徑 AD、MN，連結 DB、DF 與 MN 分別相交於 O_1 、 O_2 。分別以 O_1 、 O_2 為圓心，以 O_1B 為半徑作 $\overset{\frown}{BC}$ 、 $\overset{\frown}{EF}$ ；分別以 A、D 為圓心，以 DB 為半徑作 $\overset{\frown}{CE}$ 、 $\overset{\frown}{BF}$ 。四條弧連接成一個橢圓。



(第 3 題)

7.19　圓周長、弧長

1.　圓周長

我們知道，圓周長 C 與半徑 R 之間有下面的關係。

$$\boxed{\boldsymbol{C=2\pi R}}$$

這裡 $\pi = 3.14159\cdots$，這個無限不循環小數叫做**圓周率**(詳見附錄)。

2.　弧長

因為 360° 的圓心角所對的弧常就是圓周長 $C=2\pi R$，所以 1° 的圓心角所對的弧長是 $\dfrac{2\pi R}{360}$，即 $\dfrac{\pi R}{180}$。這樣，我們就得到，半徑為 R 的圓中，n° 的圓心角所對之弧長 l 的計算公式：

$$\boldsymbol{l=\frac{n\pi R}{180}}$$

【例 1】 彎製管道時，先按中心線計算「展直長度」，再下料。試計算圖 7-75 所示管道的展直長度 L(單位：mm)。

解　由弧長公式，得

$$l=\frac{100\times 90\times \pi}{180}$$

$$=50\pi \approx 157\ (\text{mm})$$

所要求的展直長度

$$L=2\times 70+157$$

$$=297\ (\text{mm})$$

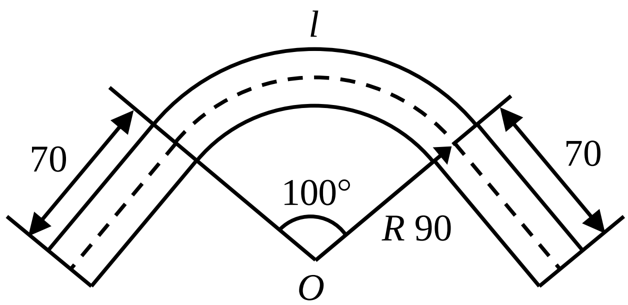


圖 7-75

答：管道的展直長度為 297 mm。

【例 2】 如圖 7-76，兩個皮帶輪的中心距離為 2.1 m，直徑分別為 0.65 m 與 0.24 m。

(1)　求皮帶長；

(2)　如果小輪每分鐘轉 750 轉，求大輪每分鐘轉多少轉。

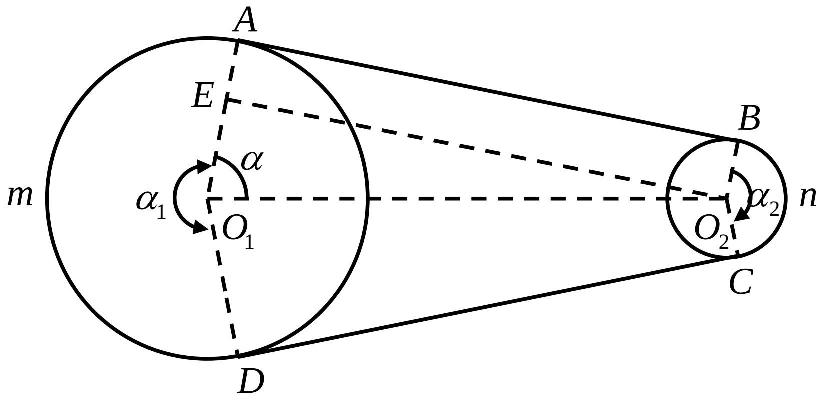


圖 7-76

$\boxed{解}$ (1)

作過切點的半徑 O_1A、O_1D、O_2B、O_2C，作 $O_2E \perp O_1A$，垂足為 E。

$\because \quad O_1A = \dfrac{1}{2} \times 0.65 = 0.325$、$AE = O_2B = \dfrac{1}{2} \times 0.24 = 0.12$、

$O_1O_2 = 2.1$

$\therefore \quad O_1E = O_1A - AE = 0.325 - 0.12 = 0.205$

$\therefore \quad AB = O_2E = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1E^2} \approx 2.090\,(\text{m})$

$\because \quad \cos\alpha = \dfrac{O_1E}{O_1O_2} \approx 0.0976$，$\angle\alpha \approx 84.4°$

$\therefore \quad \angle\alpha_1 = 360° - 2\angle\alpha = 191.2°$

$\therefore \quad \overset{\frown}{AmD}$ 的長 $l_1 = \dfrac{191.2 \times \pi \times 0.325}{180} \approx 1.085\,(\text{m})$

$\because \quad \angle\alpha_2 = 360° - \angle\alpha_1 = 168.8°$

$\therefore \quad \overset{\frown}{BnC}$ 的長 $l_2 = \dfrac{168.8 \times \pi \times 0.12}{180} \approx 0.354\,(\text{m})$

$\therefore \quad$ 皮帶長 $l = l_1 + l_2 + 2AB = 5.62\,(\text{m})$

(2)

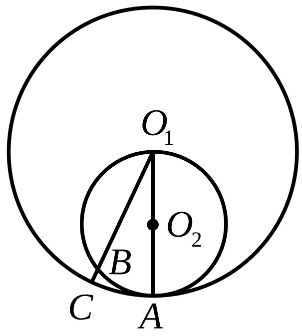
大輪每分鐘的轉數為

$$n = \frac{0.12 \times 750}{0.325} \approx 277\,(轉)$$

答：皮帶長 5.62 m，大輪每分鐘轉 277 轉。

練　習

1. 求半徑為 46.0 cm 的$18°30'$之弧長 l (保留 3 個有效數字)。
2. 如圖，大圓 O_1 的半徑 O_1A 是小圓 O_2 的直徑，$\odot O_1$的半徑O_1C 交$\odot O_2$ 於點 B。求證：$\overset{\frown}{AB}$與$\overset{\frown}{AC}$的長相等。



(第 2 題)

7.20　圓、扇形、弓形的面積

1. 圓面積

我們知道，圓面積 S 與半徑 R 之間有下面的關係(詳見附錄)。

$$\boxed{S = \pi R^2}$$

2. 扇形面積

一條弧與經過這條弧的端點之兩條半徑所組成的圖形叫做**扇形**。

在半徑為 R 的圓中，因為圓心角是$360°$的扇形面積就是圓面積$S = \pi R^2$，所以圓心角是$1°$的扇形面積是$\dfrac{\pi R^2}{360}$。這樣，在半徑為 R 的圓中(圖 7-77)，圓心角為$n°$的扇形面積之計算公式是

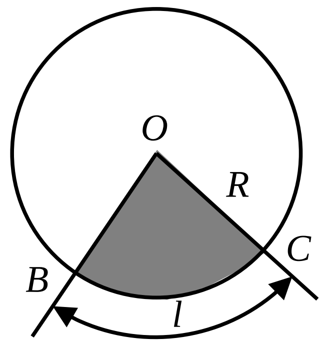


圖 7-77

$$S_{\text{扇形}} = \frac{n}{360}\pi R^2$$

又因為，扇形的弧長$l = \dfrac{n\pi R}{180}$，扇形面積$\dfrac{n\pi R^2}{360}$可以寫成$\dfrac{1}{2}\bullet\dfrac{n\pi R}{180}\bullet R$，所以，又得到

$$S_{扇形}=\frac{1}{2}lR$$

3. 弓形面積

從圖 7-78 中可以看出，把扇形 *OAmB* 的面積以及△*OAB* 的面積計算出來，就可以得到弓形 *AmB* 的面積。

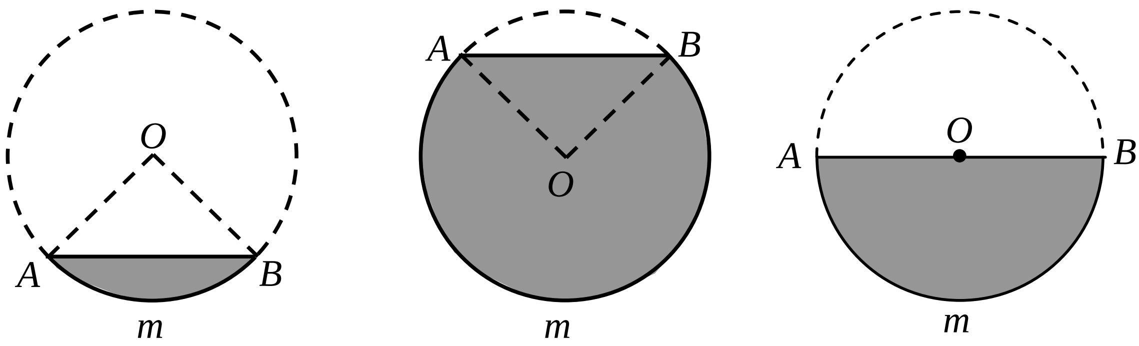


圖 7-78

【例】 水平放著的圓柱形排水管之截面半徑是 12 cm，其中水面高為 6 cm，求截面上有水的弓形面積(精確到 1 cm^2)

解 如圖 7-79，連結 *OA*、*OB*，作弦 *AB* 的垂直平分線 *OD*，垂足為 *D*，交 $\overset{\frown}{AB}$ 於點 *C*。

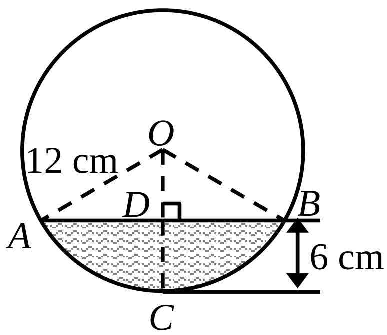


圖 7-79

已知半徑 $OA=12\,\text{cm}$，$DC=6\,\text{cm}$

那麼

$OD=OC-DC=12-6=6\,\text{cm}$，

$AD=\sqrt{OA^2-OD^2}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}\,(\text{cm})$

$\angle AOD=60°$

$S_{弓形ACB}=S_{扇形OACB}-S_{\triangle OAB}$

$$=\frac{120}{360}\times\pi\times12^2-\frac{1}{2}\times12\sqrt{3}\times6$$

$$=48\pi-36\sqrt{3}\approx88\,(\text{cm}^2)$$

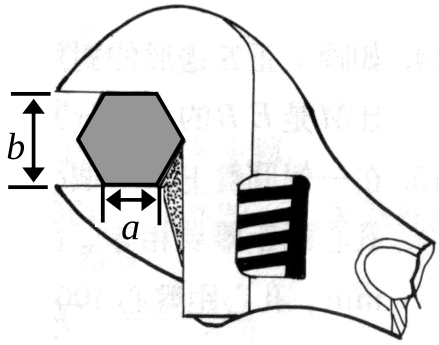
答：截面上有水的弓形面積約為 88 cm^2。

練　習

1. 設圓周長為 C，圓面積為 S。求證：$S=\dfrac{C^2}{4\pi}$。
2. 已知扇形的圓心角為$150°$，弧長為20π cm。求扇形的面積。
3. 在本節的例中，設水面高為 7 cm，其它條件不變，利用三角函數解同樣的問題。

習　題　二　十　七

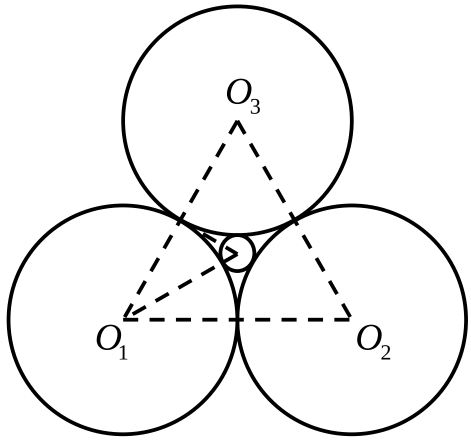
1. 求證：順次連結正多邊形各邊中點所得的多邊形是正多邊形。
2. 求證：正五邊形的對角線相等。
3. 如果一個多邊形有一個外接圓與一個內切圓，並且這兩個圓是同心圓，那麼這個多邊形是正多邊形。
4. 已知：$\overset{\frown}{AB}$是$\odot O$的內接正六邊形之一邊，AD 是$\odot O$的內接正十邊形之一邊，點 D 在 AB 上。求證：DB 是$\odot O$的內接正十五邊形。
5. 求證：兩個同邊數的正多邊形周長之比等於它們的外接圓直徑之比。
6. 在某個圓形蓋板上鑽 16 個等距離的小圓孔，使孔心與蓋板中心的距離為 240 mm。求相鄰兩孔中心的距離(精確到 0.1 mm)
7. 要用圓形鐵片截出邊長為 a 的正方形鐵片，選用的圓鐵片之直徑最小要多長？
8. 如圖，正六邊形的螺帽之邊長 $a=12$ mm，這個扳手的開口 b 最小應是多少？
9. 已知圓內接正 n 邊形的邊長為 a。求同圓外切正 n 邊形的邊長(用三角函數表示)。



(第 8 題)

10. 求證：同一個圓的內接正六邊形與外切正六邊形的周長之比等於$\sqrt{3}$：2，面積之比等於 3：4。

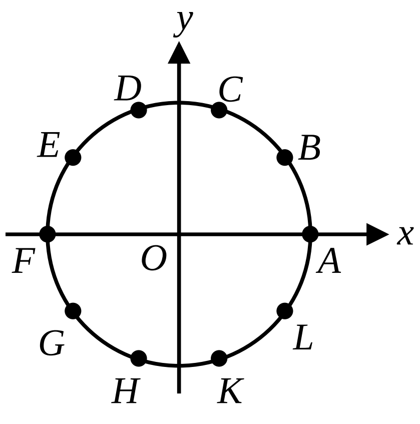
11. 設計三個直徑相等的軋軸，使它們能夠把直徑為 0.4 mm 的滾軸軋緊(如圖)。求軋軸直徑(精確到 0.01 mm)。



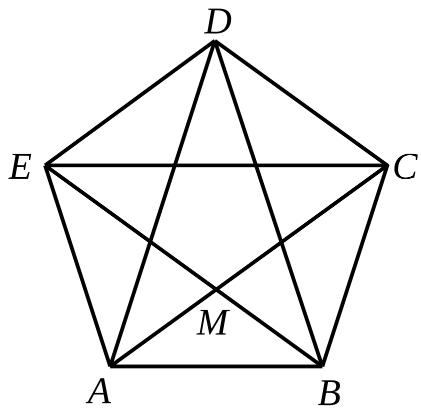
(第 11 題)

12. 已知：半徑為 R 的圓內接正 n 邊形之邊長為a_n。求證：同圓內接正 $2n$ 邊形的面積等於$\frac{1}{2}nRa_n$。利用這個結果，求半徑為 R 的圓內接正八邊形之面積(用代數式表示)。

13. 半徑為 5 cm 的圓上有 10 個點，相鄰兩點的距離相等。採用如圖所示的直角座標系，求各點的座標(精確到 0.01 mm)。

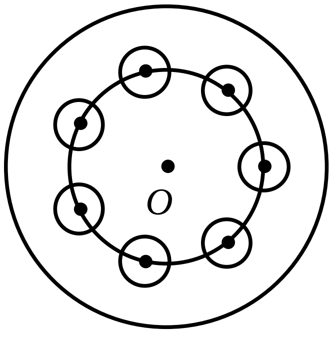


(第 13 題)

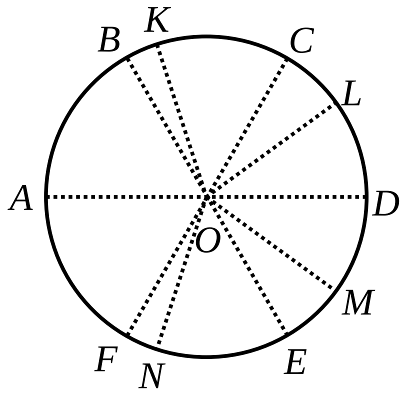


(第 14 題)

14. 如圖，正五邊形的對角線 AC 與 BE 相交於點 M。求證：$ME = AB$，且 M 是 EB 的黃金分割點，即$ME^2 = BE \bullet BM$。



(第 15 題)



(第 17 題)

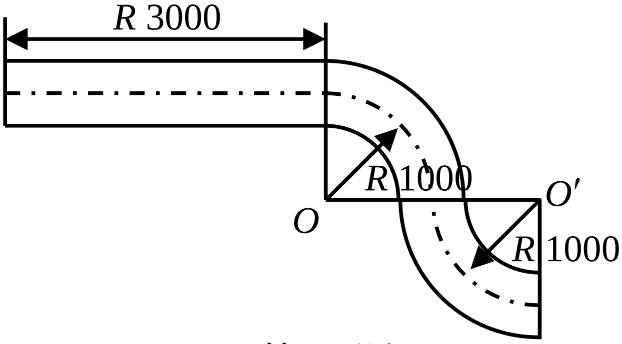
15. 在一個圓盤上鑽 7 個小孔，孔心要在同一個圓上，且相鄰兩個孔心的距離要相等。已知直盤的直徑為 330 mm，小孔直徑為 50 mm，孔心距盤心 100 mm。用 1∶5 的比例尺畫出圖樣。

16. 使用圓規與直尺作已知圓的內接正八邊形與正十二邊形。

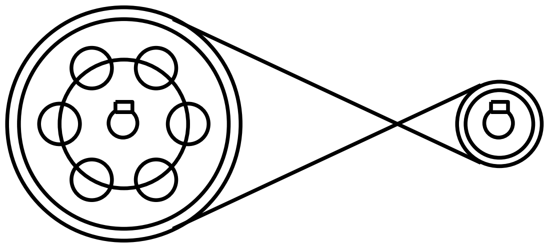
17. 如圖，A、B、C、D、E、F 是⊙O 的六等分點，A、K、L、M、N 是⊙O 的五等分點。求 $\angle COL$ 的度數。根據這個結果，在半徑為 4 cm 的圓內，用直尺與圓規作內接正十五邊形。

18. 火車機車上的主動輪直徑為 1.2 m，主動輪每分鐘轉 400 轉，火車每小時行駛多少 km？

19. 如圖，已知 $\angle O = \angle O' = 90°$，中心線的圓弧半徑為 1000 mm。求圖中管道的展直長度。



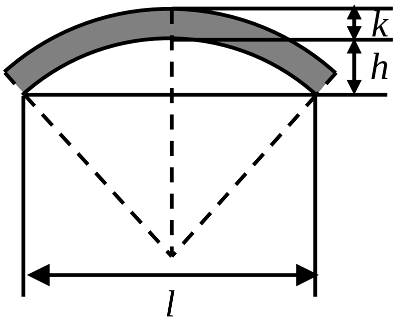
(第 19 題)



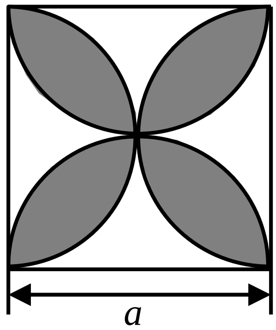
(第 20 題)

20. 如圖，兩個皮帶輪的中心距離為 2.1 m，直徑分別為 0.65 m 與 0.24 m。
   (1) 求皮帶長；
   (2) 如果小輪每分鐘轉 750 轉，求大輪每分鐘轉多少轉。

21. 圖中的弦 $l = 188$ cm，裡層弓形高 $h = 36$ cm，$k = 20$ cm。求裡外兩條弧的長。



(第 21 題)



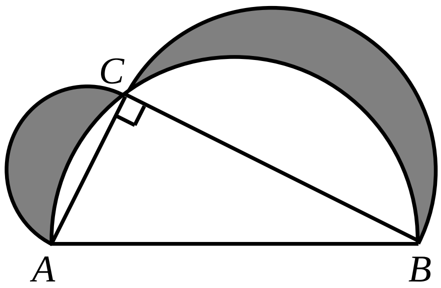
(第 22 題)

22. 正方形的邊長為 a，以各邊為直徑在正方形內畫半圓。求所圍成的圖形(陰影部分)之面積。

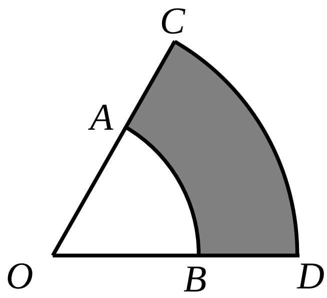
23. 一個扇形的半徑等於一個圓的半徑之二倍，且面積相等。求這個扇形的圓心角。

24. (1) 圓心角為$n°$、面積為 S 的扇形之半徑等於什麼？
(2) 半徑為 R、面積為 S 的扇形的圓心角等於多少度？

25. 求證：如圖，以直角三角形各邊為直徑的三個半圓圍成之兩個新月形(陰影部分)的面積和，等於直角三角形的面積。



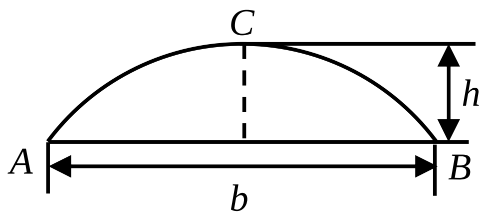
(第 25 題)



(第 26 題)

26. 如圖，兩個同心圓被兩條半徑截得 $\overset{\frown}{AB}=6\pi$ cm、$\overset{\frown}{CD}=10\pi$ cm，又 $AC=12$ cm，求陰影部分 $ABDC$ 的面積。

27. 已知如圖，$b=4.8$ cm、$h=1.2$ cm。求弓形 ACB 的面積(保留兩個有效數字)。



(第 27 題)

五、點的軌跡

7.21 四種命題的關係

我們知道，判斷一件事情的語句叫做命題。一個命題是由題設與結論兩個部分組成的。命題有真有假，正確的命題是真命題，錯誤的命題是假命題。

另外，我們還研究過命題之間的關係。例如，交換一個命題的題設與結論得到的新命題，與原命題是互逆命題。下面，我們再進一步研究命題之間的另外幾種關係。先看如下兩組命題。

1. 設 a、b 為實數，
   (1) 如果 $a=0$，那麼 $ab=0$；
   (2) 如果 $ab=0$，那麼 $a=0$；
   (3) 如果 $a\neq 0$，那麼 $ab\neq 0$；
   (4) 如果 $ab\neq 0$，那麼 $a\neq 0$。
2. (1) 內接於圓的四邊形之對角互補；
   (2) 對角互補的四邊形內接於圓；
   (3) 不內接於圓的四邊形之對角不互補；
   (4) 對角不互補的四邊形不內接於圓。

以上各組的四個命題的題設與結論之間有下面的相互關係：

在(1)與(2)兩個命題中，一個命題的題設與結論分別是另一個命題的結論與題設。我們已知，這樣的兩個命題叫做**互逆命題**。把其中的一個叫做**原命題**時，另一個就叫做它的**逆命題**。

在(1)與(3)兩個命題中，一個命題的題設與結論分別是另一個命題的題設之否定與結論之否定。這樣的兩個命題叫做**互否命題**。把其中的一個叫做原命題時，另一個就叫做它的**否命題**。

在(1)與(4)兩個命題中，一個命題的題設與結論分別是另一個命題的結論之否定與題設之否定。這樣的兩個命題叫做**互為逆否命題**。把其中的一個叫做原命題時，另一個就叫做它的**逆否命題**。

用 A 與 B 分別表示原命題的題設與結論，用 $\overline{A}$ 與 $\overline{B}$ 分別是 A 與 B 的否定時，四種命題的形式就是：

原命題　　若 A 成立則 B 就成立，或「$A\Rightarrow B$」；
逆命題　　若 B 成立則 A 就成立，或「$B\Rightarrow A$」；
否命題　　若 A 不成立則 B 不成立，或「$\overline{A}\Rightarrow\overline{B}$」；
逆否命題　若 B 不成立則 A 不成立，或「$\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$」；

互逆命題、互否命題、互為逆否命題都是說兩個命題之間的關係，把其中一個命題叫做作原命題時，另一個就是它的逆命題、否命題、逆否命題。因此，同一個命題的否命題與逆命題也

是互逆的；同一個命題的逆命題與否命題也是互否的；同一個命題的逆命題與否命題也是互為逆否的。

四種命題之間的這些形式上之相互關係，如圖 7-80。

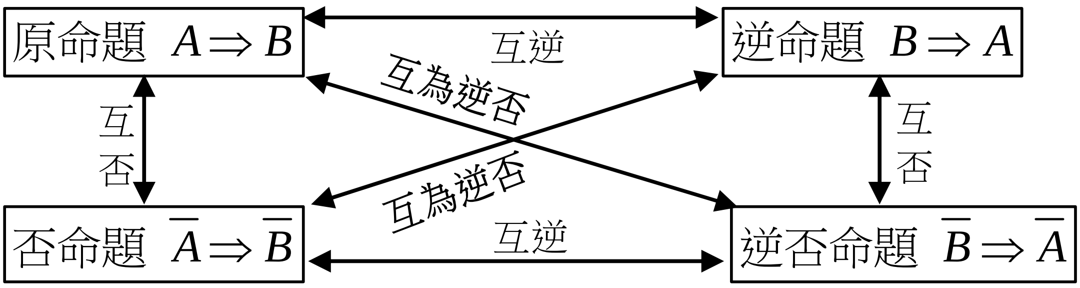


圖 7-80

現在來研究一個命題的真假與其它三種命題的真假之關係。

我們知道，**原命題正確，它的逆命題不一定同時正確**。例如，雖然上面第 2 組中，(1)、(2)同時正確；但是上面第 1 組中，(1)正確，(2)不正確。同樣，可以看到第 2 組中，(1)、(3)同時正確；而第 1 組中，(1)正確，(3)不正確。可見，**原命題正確，它的否命題也不一定同時正確**。因此，除非經過了另外的證明，我們不能夠根據某一個證明是正確的命題，去斷定這個命題的逆命題或否命題是否正確。

但是，一個命題的真假與它的逆否命題之真假卻有特殊的關係。上面第 1 組的(1)與(4)同時正確；第 2 組的(1)與(4)也同時正確。這裡有必然的聯繫。

如果原命題「若 A 成立，則 B 就成立」正確，那麼 B 不成立時，試想 A 成立不成立呢？當然 A 不能成立。因為，假定 A 成立，那麼根據正確的原命題，B 就應成立，這與這裡的題設 B 不成立相矛盾。因此，「若 B 不成立，則 A 不成立」。這就證明了：

原命題正確，那麼它的逆否命題一定正確。

如果有兩個命題，從第一個命題正確(或錯誤)，可以得到第二個命題正確(或錯誤)，從第二個命題正確(或錯誤)，也可以得出第一個命題正確(或錯誤)，那麼這樣的兩個命題叫做**等價命題**。如果兩個命題互為逆否，那麼從其中一個命題正確(或錯誤)，都可以得出另一個命題也正確(或錯誤)。因此，**兩個互為逆否的命題是等價命題**。這個關係可以寫成

原命題$\Leftrightarrow$逆否命題

由於兩個互為逆否的命題具有等價關係，當我們證明某個命題有困難時，可以用它的逆否命題之證明來代替原命題的證明。例如，我們在前面證明「對角互補的四邊形，內接於圓」時，實際是證明了它的逆否命題「不內接於圓的四邊形之對角不互補」。

練　習

1. (口答)下列各命題看作原命題時，它的逆命題、否命題、逆否命題各是什麼？那些正確？那些不正確？
   (1) 末位是 0 的整數，可以被 5 整除；
   (2) 當 $x=2$ 時，$x^2-3x+2=0$；
   (3) 對頂角相等；
   (4) 線段的垂直平分線上之點與這條線段兩個端點的距離相等；
   (5) 到圓心的距離不等於半徑之直徑不是圓的切線。
2. 下列各對命題的相互關係怎樣？它們是否等價？
   (1) $A\Rightarrow B$ 與 $\overline{A}\Rightarrow\overline{B}$；　(2) $B\Rightarrow A$ 與 $\overline{A}\Rightarrow\overline{B}$；
   (3) $\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$ 與 $\overline{A}\Rightarrow\overline{B}$。

7.22　點的軌跡

重物沿著直線自由下落，懸掛着的小錘沿著圓弧往復擺動，在一定的條件之下，物體沿著一定的軌道運動，這些重物、小錘、物體等運動的軌道，都給我們點的軌跡之形象。

什麼是點的軌跡呢？簡單的說，點的軌跡就是按照某個條件運動形成的圖形。符合某個條件之點的軌跡，就是符合某個條件之所有的點之集合。例如，把長度為 r 的線段之一個端點固定，另一個端點繞這個定點旋轉一周就得到一個圓。這個圓上的每一個點，到定點的距離都等於 r，同時，到定點的距離等於 r 之所有點，都在這個圓上。這個圓就叫做到定點的距離等於定長 r 的點之軌跡。

現在，可以給軌跡下定義：

如果下面的兩個命題，都是正確的，即

1.　圖形 F 上的每一個點，都符合某個條件 C；

2.　符合某個條件 C 的每一個點，都在圖形 F 上。

那麼，圖形 F 是符合某個條件 C 的**點之軌跡**。

在平面內，這裡的圖形 F 一般是指某些線。

要注意上面的命題 1 與 2 互為逆命題，兩個不能互相代替，必須 1、2 兩個命題都是正確的，圖形 F 才是符合條件 C 之點的軌跡，兩個缺一不可。

因為原命題與它的逆否命題是等價的，所以上面兩個條件也可以說成：「不符合某個條件 C 的點，都不在圖形 F 上」與「不在圖形 F 上的點，都不符合條件 C」。

下面，我們討論一些常見的平面內之點的軌跡。

從上面對圓的討論，我們知道，圓上每一點到定點(圓心)的距離都等於定長(半徑)；反過來，到定點的距離等於定長之點都在圓上。所以我們可以得出：

軌跡 1　到定點的距離等於定長之點的軌跡，是以定點為圓心，定長為半徑的圓。

在第一冊裡我們學過，線段垂直平分線上的每一點，與線段兩個端點的距離相等；反過來，與線段兩個端點距離相等的點，都在這條線段的垂直平分線上。所以有下面軌跡：

軌跡 2　與已知線段兩個端點距離相等的點之軌跡，是這條線段的垂直平分線。

由角平分線定理與逆定理，同樣可以得到另一個軌跡：

軌跡 3　到已知角兩邊的距離相等的點之軌跡，是這個角的平分線。

如果一個動點 P 在平面內運動，它到已知直線 l 的距離始終等於定長 d。我們發現，這個動點運動所形成的圖形，是在 l 兩側的兩條平行線 l'、l''，它們到 l 的距離都等於 d (圖 7-81)。

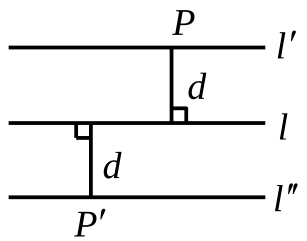


圖 7-81

因為直線l'、l''上的每一個點 P，到 l 的距離都等於 d (夾在兩條平行線間的平行線段相等)；反過來，容易證明，如果 P' 到 l 的距離等於 d，那麼點 P' 一定在 l' (或 l'')上。這樣，我們得到下面軌跡：

軌跡 4　到一條已知直線距離等於定長的點之軌跡，是平行於這條直線，並且到這條直線的距離等於定長之兩條直線。

類似地可以得到：

軌跡 5　到兩條平行線距離相等的點之軌跡，是與這兩條平行線距離相等的一條平行線。(圖 7-82)。

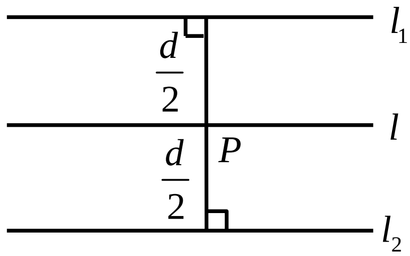


圖 7-82

在 7.5 節我們學過,同弧上的圓周角相等。如圖 7-83 中，$\overset{\frown}{AMB}$ 與 $\overset{\frown}{ANB}$ 上每一點，與 A、B 兩個端點連線的夾角，都等於已知角；反過來，在 7.5 節例 2 中我們又證明了，不在 $\overset{\frown}{AMB}$ 與 $\overset{\frown}{ANB}$ 上的點與 A、B 兩點連線的夾角都不等於已知角。於是有下面軌跡：

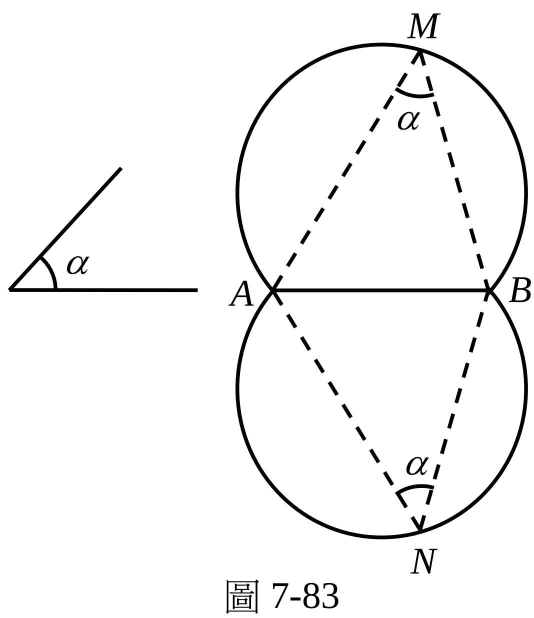


圖 7-83

軌跡 6　與已知線段兩個端點連線的夾角等於已知角的點之軌跡，是以已知線段為弦，所含圓周角等於已知角的兩段弧。(圖 7-83)。

要求出同時滿足幾個條件的點，可以利用上面幾個已知軌跡，求滿足各個條件的軌跡之交點。

【例】 如圖 7-84，已知 $\angle AOB$。以已知長 R 為半徑，作圓與 OA、OB 都相切。

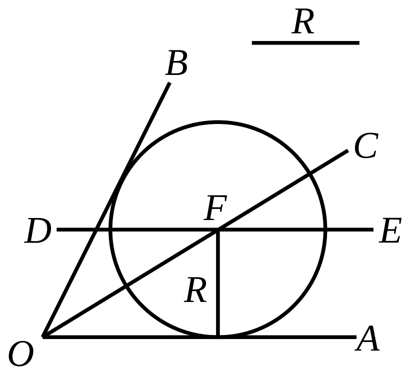


圖 7-84

分析： 要符合條件的圓，關鍵在於確定圓心的位置。

要使圓與 $\angle AOB$ 的兩邊都相切，這樣的圓之圓心的軌跡是 $\angle AOB$ 的平分線；

要使半徑等於 R 的圓與 OA(或 OB)相切，這樣的圓心之軌跡是距離 OA(或 OB)等於 R 的一條平行線(另一條在角外，不合題意)。

這兩個軌跡的交點就是所求圓的圓心。

作法：

1. $\angle AOB$ 的平分線 OC (圖 7-84)。
2. 作直線 $DE \parallel OA$，並且使 DE 與 OA 的距離等於 R，DE 與 OC 交於點 F。
3. 以 F 為圓心，以 R 為半徑作 $\odot F$。

$\odot F$ 就是所求的圓。

上面的作圖可以用來解決一些實際問題。例如，有兩段直路 l_1 與 l_2，它們的位置已經測定，需要築一段半徑為 R 的圓弧形道路把它們連接起來(圖 7-85)。用上面例題的方法，就可以在圖紙上畫出這段圓弧 $\overset{\frown}{AB}$。

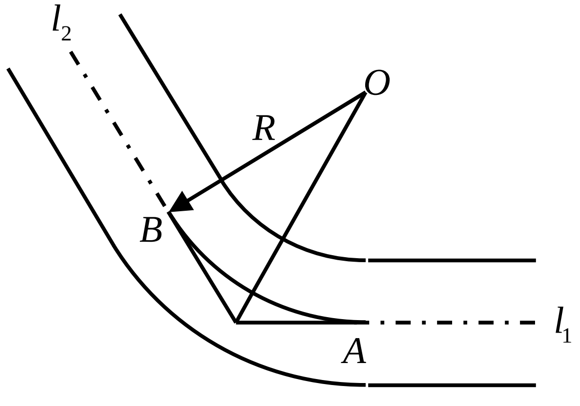
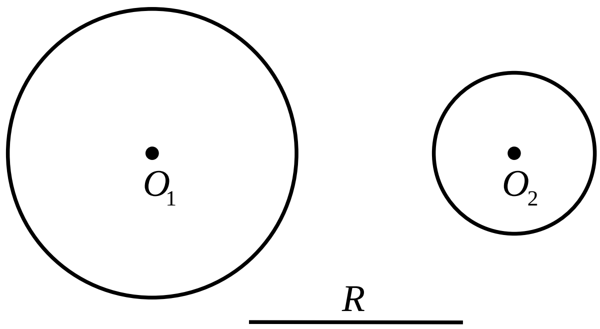


圖 7-85

練　習

1. 說明並作出下列點的軌跡(不要求證明)：
   (1) 到點 A 的距離等於 5 cm 之點的軌跡；
   (2) 半徑為 1 cm，並且與半徑為 1.5 cm 的圓外切之圓心的軌跡；
   (3) 斜邊為 AB 的直角三角形之頂點的軌跡；
   (4) 經過已知點 A 與 B 的圓之圓心的軌跡；
   (5) 半徑為 2.5 cm，且與已知直線 l 相切的圓之圓心的軌跡；
   (6) 與兩條已知直線 l_1 及 l_2 相切的圓之圓心的軌跡；
   (7) 對已知線段 AB 的視角等於 $135°$ 的角之頂點(就是使 $\angle APB = 135°$ 的點 P)的軌跡。
2. 作半徑為 R，並且與已知 $\odot O_1$ 與 $\odot O_2$ 都相外切的圓。



(第 2 題)

習　題　二　十　八

1. 寫出下列命題的逆命題、否命題與逆否命題，並判定它們是否正確：
   (1) 全等三角形一定是相似三角形；
   (2) 如果△ABC 中，$\angle C = Rt\angle$，那麼 $c^2 = a^2 + b^2$。
2. 作圖說明符合下列條件之點的軌跡(不要求證明)：
   (1) 底邊給定的等腰三角形之頂點的軌跡；
   (2) 與直線 l 相切於圓上一點 A 的圓之圓心的軌跡；
   (3) 與 $\odot O$ 相切於圓上一點 A 的圓之圓心的軌跡；

(4) 底邊給定，高為 h 的三角形之另一個頂點的軌跡；
(5) 與距離為 h 的兩條平行線都相切的圓之圓心的軌跡；
(6) 一邊給定，它的對角等於已知角 α 的三角形之另一個頂點的軌跡；
(7) 半徑為 3 cm 的圓中，長 4.8 cm 的弦之中點的軌跡；
(8) 與兩個已知同心圓都相切的圓之圓心的軌跡
(9) 向已知 $\odot O$ 所做的切線長為 l 之點的軌跡。

3. 已知直線 l 與 l 外一點 A。求作半徑為 5 cm 的圓，使它經過點 A，並且與 l 相切(寫出作法，不要求證明)。

小　结

一、本章研究圓的有關知識。主要內容有：圓的概念與性質，圓與點、圓與直線、圓與圓、圓與角以及圓與三角形、四邊形、正多邊形的位置關係，以及它們的應用。同時介紹了四種命題的關係，軌跡的概念與常見的六種軌跡。

二、圓是到定點的距離等於定長的點之集合。不在同一直線上的三點確定一個圓。

圓是軸對稱圖形，而且它的任意一條直徑所在的直線都是對稱軸。圓也是中心對稱圖形，並且繞圓心旋轉任意大小的角度，都能夠與原圖形重合。由圓的對稱性，可得出圓的有關性質：垂直於弦的直徑必平分弦；在同圓與等圓中，兩個圓心角、圓心所對的弧、弦、弦心距中任何一對量相等時，其餘對應的量也相等。

三、由圓心到直線的距離與半徑的大小關係，能夠確定直線與圓的位置關係。特別是當圓心到直線的距離等於半徑時，直線與圓相切。圓的切線垂直於過切點的半徑(逆命題也正確)，從圓外一點引圓的兩條切線，切線長相等。

由圓心距與半徑的大小關係，能夠確定圓與圓的位置關係。兩圓相交時，連心線垂直平分公共弦；兩圓相切時，連心線經過切點。兩圓的外(內)公切線長相等。

由角的頂點在圓心、圓上以及一邊與圓相切等不同的情形，分別得到圓心角、圓周角、弦切角。圓周角等於同弧所對的圓心角之一半，弦切角等於它所夾的弧所對之圓周角。

三角形有且恰只有一個外接圓與一個內切圓。圓的內接四邊形對角互補，外角等於它的內對角。圓的外切四邊形兩組對邊之和相等。正多邊形必有外接圓與內切圓。利用正多邊形與圓的關係，可以求得圓的周長與面積公式，從而得到弧長與扇形面積公式。

四、從一點引兩條直線與圓相交，直線被這一點與交點分成一些比例線段，有相交弦定理、切割線定理與推論。

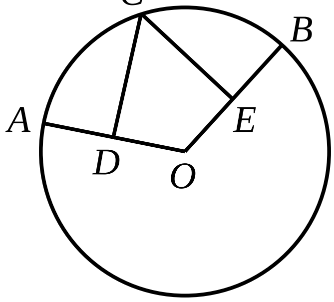
五、軌跡是幾何中一個很重要的概念。當圖形 F 上的每一點都符合某個條件 C；符合條件 C 的每一個點都在圖形 F 上時，圖形 F 就是符合某個條件 C 的點之軌跡(或集合)　。

原命題與它的逆否命題是等價命題。在證明軌跡問題時，常用證明逆否命題來代替證明原命題。

六、反證法是一種間接證明命題的方法。當命題不易用直接證法證明時，常用反證法。用反證法證明時，首先否定命題的結論，由此推出矛盾，從而肯定命題的結論正確。

複習參考題七

1. 半徑為 r 的圓之弦長為 l，弦心距為 d、弓形高為 h。
   (1)　用 r 與 d 表示 l^2；
   (2)　用 r 與 h 表示 l^2。
2. 以等邊三角形的一邊為直徑作圓。求證：這個圓平分其它兩邊，其它兩邊三等分半圓之弧長。
3. 如圖，$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$，$D$、$E$ 分別是 OA 與 OB 的中點。求證：$DC = CE$。

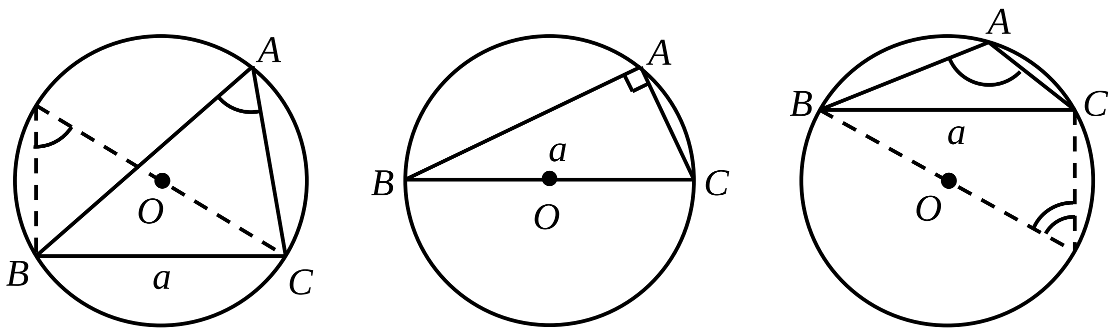


(第 3 題)

4. $\triangle ABC$ 的高 AD、BE 相交於點 H，AD 的延長線交外接圓於點 G。求證：D 為 HG 的中點。

5. $\triangle ABC$ 中，$BC = 2.4\,\text{cm}$、$\angle A = 31°$。利用三角函數表計算$\triangle ABC$ 的外接圓直徑(精確到 0.1 cm)。

6. $\triangle ABC$ 中，$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$，外接圓半徑為 R。求證：$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$。



(第 6 題)

7. 已知：a、b、c 為$\triangle ABC$ 的三邊之長，R 為其外接圓的半徑。利用$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$證明：

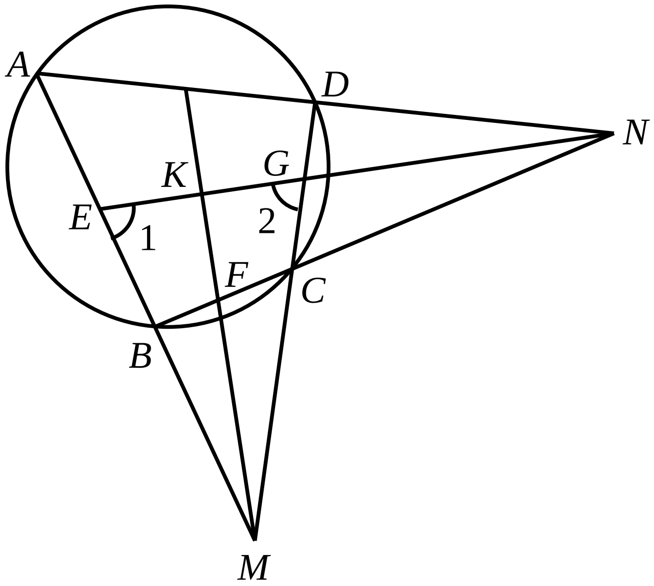
$$S_{\triangle ABC} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = \frac{abc}{4R}。$$

8. 內接於圓的四邊形 $ABCD$ 之對角線 AC 與 BD 垂直相交於點 K。過點 K 的直線與邊 AD、BC 分別相交於點 H 與 M。
求證： (1) 如果 $KH \perp AD$，那麼 $CM = MB$；
(2) 如果 $CM = MB$，那麼 $KH \perp AD$。

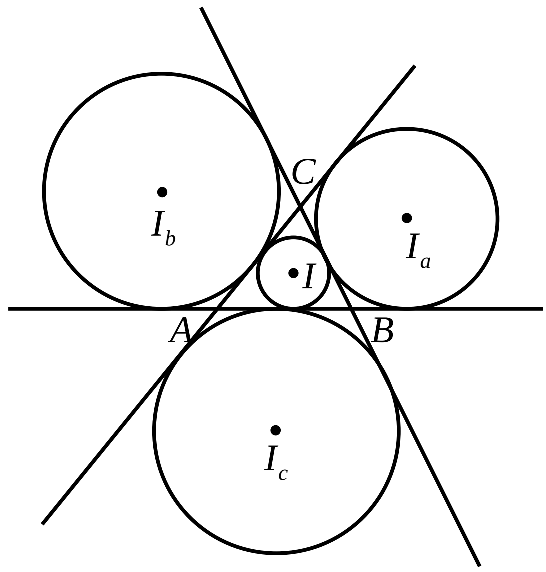
9. 求證：四邊形各內角平分線所成的四邊形內接於圓。

10. 如圖，延長圓的內接四邊形 $ABCD$ 之兩組對邊，分別相交於點 M、N。求證：所成的$\angle AMD$與$\angle ANB$之平分線互相垂直。(提示：證明圖中$\angle 1 = \angle 2$。)

11. 過正方形對角線上任意一點，引兩直線平行於邊，那麼這兩直線與邊的四個交點同在一個圓上。



(第 10 題)



(第 14 題)

12. 從⊙O 外的定點作⊙O 之兩條切線，分別切⊙O 於點 A 與 B。在 $\overset{\frown}{AB}$ 上任取一點 C，經過點 C 作⊙O 的切線，分別交 PA、PB 於點 D 與 E。
    求證： (1) $\triangle PDA$ 的周長是定值 $PA+PB$；
    (2) $\angle DOE$ 的大小是定值 $\frac{1}{2}\angle AOB$。
13. 以直角三角形 ABC 的直角邊 AC 為直徑作圓，交斜邊 AB 於點 D，過點 D 作圓的切線。求證：這條切線平分另一條直角線 BC。
14. 如圖，$\triangle ABC$ 的三條邊所在之直線分全平面成七個區域，在其中的四個區域裡各有一個與三邊所在的直線都相切之圓(⊙I、⊙I_a、⊙I_b、⊙I_c)。這四個圓的圓心各在哪些角平分線上？
15. A 是⊙O 直徑上的一點，OB 是與這條直徑垂直的半徑，BA 與⊙O 相交於另一點 C，過點 C 的切線與 OA 的延長線相交於點 D。求證：$DA=DC$。
16. 作等邊三角形的外接圓與內切圓。如果外接圓的半徑為 R，求內切圓的半徑。

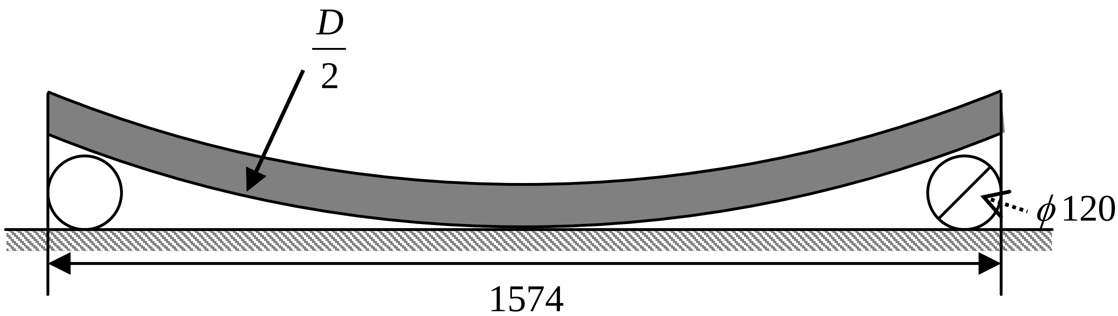
17. $Rt\triangle ABC$ 中，CD 為斜邊 AB 上的高，G 為 CD 上的一點，AG 的延長線與$\triangle ABC$ 的外接圓相交於點 H。求證：$AG \bullet AH = AD \bullet AB$。

18. 求證：經過相交兩圓一個交點的那些直線，被兩圓所截得的線段中，平行於連心線的那一條線段最長。

19. 兩圓相交於點 A 與 B，經過交點 B 的任意一直線與兩圓分別相交於點 C 與 D。求證：AC 與 AD 的比等於兩圓直徑之比。

20. (1) 兩圓內切於點 P，大圓的弦 AD 交小圓於點 B 與 C。求證：$\angle APB = \angle CPD$。
    (2) 兩圓內切於點 P，大圓的弦 AB 交小圓於點 C。求證：$\angle APB = \angle CPB$。

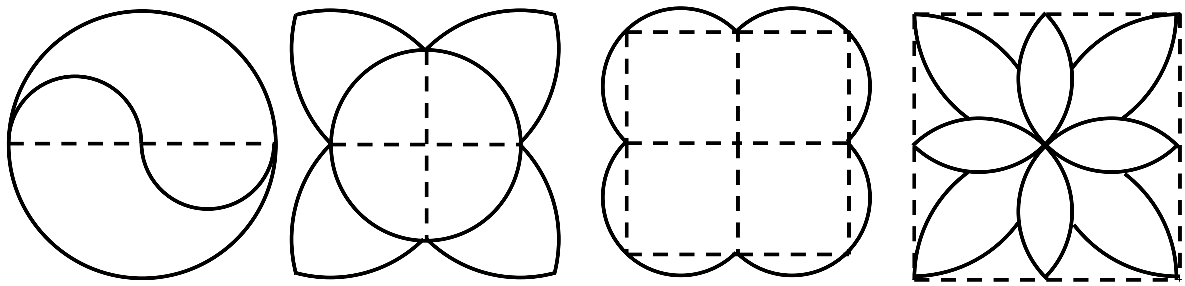
21. 如圖，用直徑為 120 mm 的兩根圓鋼棒嵌在大型工件之兩側，測量大的圓形工件之直徑。已測量得兩圓鋼棒外側距離為 1574 mm，求工件的直徑 D (精確到 1 mm)。



(第 21 題)

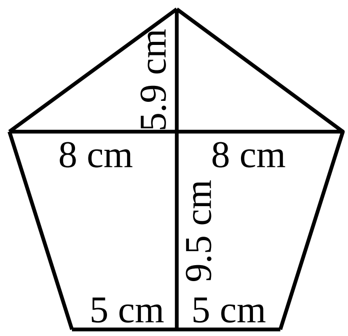
22. 半徑為 R 與 r ($R > r$)的兩圓相外切。求一條外公切線的長。

23. 畫出圖中由圓與弧所組成的圖案。


(第 23 題)

24. 正十邊形的邊長為 $2a$，求它的面積(用代數式表示)。

25. 民間相傳有正五邊形的近似作法「九五頂五九，八五分兩邊」，它的意義如圖所示。
   (1) 用這個方法作邊長為 50 cm 的近似正五邊形；
   (2) 用三角函數計算邊長為 10 cm 的正五邊形中，相當於圖中 5.9 cm、9.5 cm、8 cm 的線段之長，並加以比較。



(第 25 題)

26. 求證：兩個同心圓所成環形的面積等於以切於小圓的大圓之弦為直徑的圓之面積。

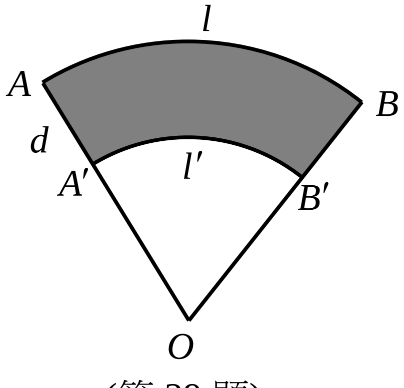
27. 半徑為 R 的兩個等圓互相經過圓心，求兩圓所圍的公共部分之面積。

28. 已知：直角三角形 ABC 與斜邊 BC 上的高 AD。
求證：$\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$ 的內切圓之面積的比等於 BD：DC。

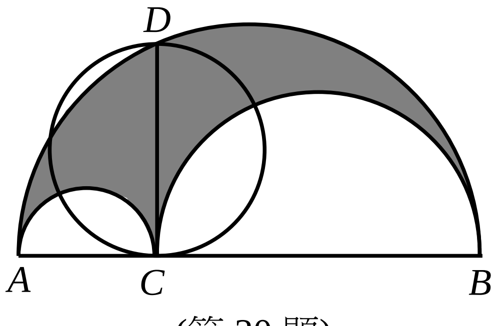
29. 如圖，$\overset{\frown}{AB}$ 與 $\overset{\frown}{A'B'}$ 的圓心都是 O，$AA' = d$，$\overset{\frown}{AB}$ 的長是 l，$\overset{\frown}{A'B'}$ 的長是 l'。

求證：(1) $\angle O = \dfrac{l-l'}{d} \times \dfrac{180}{\pi}$ 度；

(2) $S_{AA'B'B} = \dfrac{1}{2}(l+l')d$。



(第 29 題)



(第 30 題)

30. 如圖，B 是 AC 上的一點，分別以 AB、BC、AC 為直徑作半圓。從 B 作 $BD \perp AC$，與半圓相交於 D。求證：圖中陰影部分的面積等於以 BD 為直徑的圓之面積。

31. (1) 舉出原命題與逆命題都正確以及原命題正確而逆命題不正確的例子；

(2) 舉出原命題與否命題都正確以及原命題正確而否命題不正確的例子；

(3) 能不能舉出原命題正確而逆否命題不正確的例子？為什麼？

32. 圖形 F 是符合條件 C 的軌跡，須要下列兩個命題都正確：

1. 圖形 F 上的每一個點都符合條件 C；
2. 符合條件 C 的每一個點都在圖形 F 上。

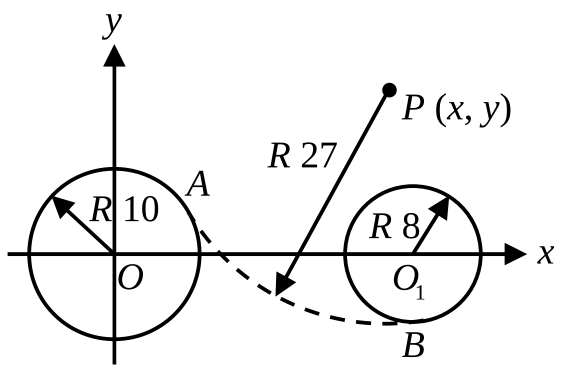
(1) 如果命題 1 正確，命題 2 不正確，會發生什麼情況？舉例說明；

(2) 如果命題 1 不正確，命題 2 正確，會發生什麼情況？舉例說明。

33. 已知 $\odot O$ 上一點 A，說明並作出以點 A 為端點的弦之中點的軌跡(不要求證明)。

34. 求作一個圓，使它的半徑等於 3 cm，經過已知點 A，並且與半徑為 2 cm 的已知圓 O 相切(已知 $OA = 6$ cm)。

35. 在如圖所示的座標系中，$\odot O$ 的半徑為 10，O_1 的座標為 (35, 0)，$\odot O_1$ 的半徑為 8，$\overset{\frown}{AB}$ 與 $\odot O$ 上的弧外連接，與 $\odot O_1$ 上的弧內連接。計算 $\overset{\frown}{AB}$ 所在圓的圓心 P 之座標(保留 4 個有效數字)。



(第 35 題)

附錄　圓周長與圓面積

我們早就學過：「圓周長 ＝ 直徑 × 圓周率 π 」。可是，圓周長與直徑的比值，即圓周率 π 的值是怎樣計算出來的呢？

在半徑為 R 的圓中(圖 7-86)，內接正六邊形的周長是 $p_6 = 6R$ ，圓內接正六邊形的周長與圓的直徑之比是 $\frac{6R}{2R} = 3$ ，這個比值與 R 無關，也就是說，不管圓的大小，它是一個常數。

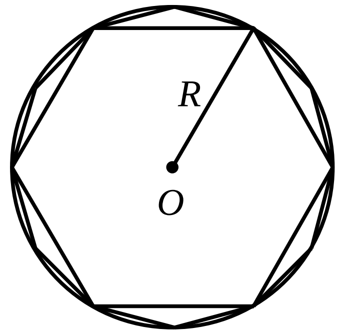


圖 7-86

如果把圓內接正六邊形的周長看作是圓周長的近似值，把圓內接正六邊形的周長與直徑之比(等於 3)看作是圓周長與直徑的比之近似值，當然，誤差是很大的。

把圓內接正六邊形的邊數加倍，可以得到圓內接正 12 邊形；再加倍，可以得到圓內接正 24 邊形；⋯。我們可以把這樣一些圓內接正多邊形的周長看作是圓周長之近似值，把這些圓內接正多邊形的周長與直徑之比作為圓周長與直徑的比之近似值。當圓內接正多邊形的邊數不斷地成倍增加時，它們的周長 p_n 不斷地增大，越來越接近於圓周長，正多邊形的周長 p_n 與直徑 $2R$ 之比值就越來越接近於圓周長 C 與直徑 $2R$ 之比值，誤差越來越小，只要邊數 n 充分大，誤差就可以任意地小。

為了說明，我們先證明下列「倍邊公式」。

設⊙O 的半徑為 R(圖 7-87)。圓內接正 n 邊形及正 $2n$ 邊形的邊長分別為 $AB = a_n$ 及 $AC = a_{2n}$ 。因為半徑 OC 垂直平分 AB，由勾股定理可知

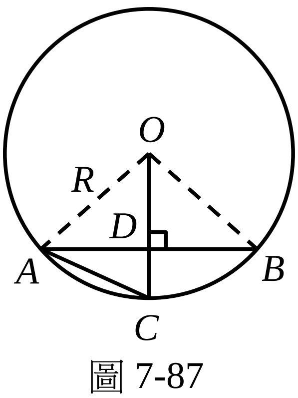


圖 7-87

$$\begin{aligned} a_{2n}^2 &= AC^2 \\ &= AD^2 + CD^2 \\ &= AD^2 + (OC - OD)^2 \\ &= AD^2 + (OC - \sqrt{OA^2 - AD^2})^2 \end{aligned}$$

$$= AD^2 + OC^2 - 2OC\sqrt{OA^2 - AD^2} + OA^2 - AD^2$$
$$= OC^2 + OA^2 - 2OC\sqrt{OA^2 - AD^2}$$
$$= 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a_n^2}$$
$$\therefore \quad a_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a_n^2}}$$

由於 $a_6 = R$ ，依據這個公式，就可以依次計算得

$$a_{12} = \sqrt{2-\sqrt{3}}R$$
$$a_{24} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}R$$
$$a_{48} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}R$$
$$\vdots$$

利用這個等式，半徑為 R 的圓內接正 6、12、24、…邊形之邊長、周長以及周長與直徑的比，就都可以計算出來(如下表)。

邊數 n	邊長 a_n	周長 p_n	周長與直徑的比 $\frac{p_n}{2R}$
6	1.00000000 R	6.00000000 R	3.00000000
12	0.51763809 R	6.21165708 R	3.10582854
24	0.26105238 R	6.26525722 R	3.13262861
48	0.13080626 R	6.27870041 R	3.13935021
96	0.06543817 R	6.28206396 R	3.14103198
192	0.03272346 R	6.28290510 R	3.14145255
384	0.01636228 R	6.28311544 R	3.14155772
768	0.00818121 R	6.28316941 R	3.14158471

可以看出，每一個圓內接正 n 邊形的周長與直徑之比 $\frac{p_n}{2R}$ 都是與半徑 R 無關的常數，所以，圓周長與直徑之比 $\frac{C}{2R}$ 也是一個與半徑 R 無關的常數，這個常數就是 π 。

這樣，我們就得到了一種計算圓周率 π 的近似值之方法。

中國古代數學家祖沖之，在公元五世紀就已算得π的值在3.1415926與3.1415927之間，比其他國家早一千年左右。現代利用電子計算機，已有人把π的值算到小數點後千萬位。π是一個無限不循環小數，就是說，是一個無理數。

由於$\dfrac{C}{2R}=\pi$，就可得到圓周長的計算公式

$$C=2\pi R\text{。}$$

我們知道，如圖 7-88，邊心距為r_n、周長為p_n的正n邊形之面積S_n等於$\dfrac{1}{2}r_n p_n$。

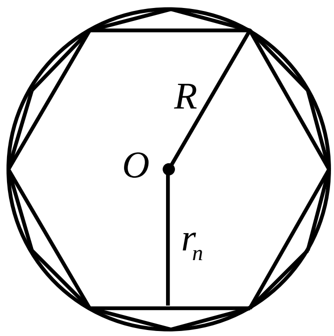


圖 7-88

在半徑為R的圓中，當內接正多邊形之邊數不斷地成倍增長時，正多邊形的邊心距r_n越來越接近於圓的半徑R，正多邊形的周長p_n越來越接近於圓周長C，而正多邊形的面積S_n就越來越接近於圓面積S。這樣，從正n邊形的面積公式$S_n=\dfrac{1}{2}r_n p_n$，就可以得到圓面積公式

$$S=\frac{1}{2}R\bullet C=\frac{1}{2}R\bullet 2\pi R=\pi R^2\text{。}$$