第七屆東南數學競賽

Southeast Mathematical Olympiad 2010

第一天　2010/08/17　08:00-12:00

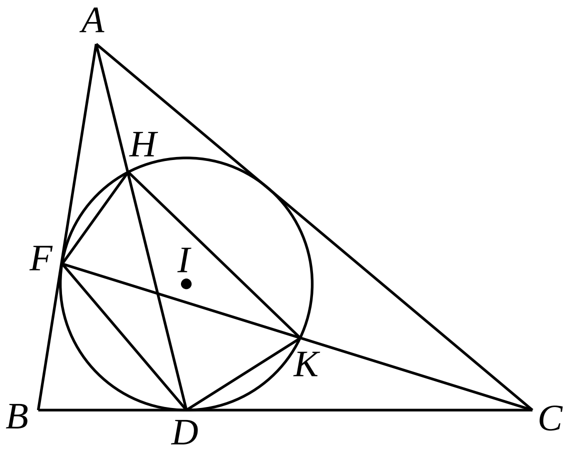
台湾 彰化 鹿港高中

1. 设 a、b、$c \in \{0,1,2,\cdots,9\}$，若二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有有理根，证明：三位数 $\overline{abc}$ 不是素数。

2. 对于集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，记 $P(A)=a_1a_2\cdots a_m$。设 A_1、A_2、⋯、$A_n\,(n=C_{2010}^{99})$ 是集合 $\{1,2,\cdots,2010\}$ 的所有99元子集，求证: $2011\left|\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\right.$。

3. 如图，已知△ABC 内切圆 I 分别与边 AB、BC 相于点 F、D，直线 AD、CF 分别交圆 I 于另一点 H、K。求证：

$$\frac{FD\times HK}{FH\times DK}=3。$$



4. 设正整数 a、b 满足 $1\le a<b\le 100$，若存在正整数 k，使得 $ab\left|(a^k+b^k)\right.$，则称数对（a, b）是“好的”。求所有“好的”数对的个数。

第七屆東南數學競賽

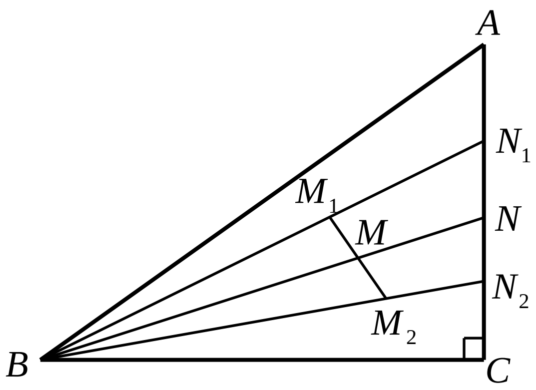
Southeast Mathematical Olympiad 2010

第二天　2010/08/18　08:00-12:00

台湾 彰化 鹿港高中

5. 如图，三角形 ABC 为直角三角形，$\angle ACB = 90°$。M_1、M_2 为 $\triangle ABC$ 内任意两点，M 为线段 M_1M_2 的中点，直线 BM_1、BM_2、BM 与 AC 边分别交于点 N_1、N_2、N。求证：

$$\frac{M_1N_1}{BM_1}+\frac{M_2N_2}{BM_2}\geq 2\frac{MN}{BM}。$$



6. 设 N^* 为正整数集合，定义：$a_1 = 2$，

$$a_{n+1}=\min\{\lambda \mid \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{\lambda}<1, \lambda\in \mathrm{N}^*\}, n=1,2,\cdots。$$

求证：$a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$。

7. 设 n 是一个正整数，实数 a_1、a_2、$\cdots$、a_n 和 r_1、r_2、$\cdots$、r_n 满足：$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$ 和 $0\leq r_1\leq r_2\leq\cdots\leq r_n$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ia_j\min(r_i,r_j)\geq 0。$$

8. 在一个圆周上给定 8 个点 A_1、A_2、$\cdots$、A_8。求最小的正整数 n，使得以这 8 个点为顶点的任意 n 个三角形中，必存在两个有公共边的三角形。