

注意：

允许学生个人、非营利性的图书馆或公立学校合理使用本基金会网站所提供之各项试题及其解答。可直接下载而不须申请。

重版、系统地复制或大量重制这些资料的任何部分，必须获得财团法人台北市九章数学教育基金会的授权许可。

申请此项授权请电邮 [ccmp@seed.net.tw](mailto:ccmp@seed.net.tw)

**Notice:**

**Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.**

**Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN [ccmp@seed.net.tw](mailto:ccmp@seed.net.tw)**



# 第七屆東南數學競賽

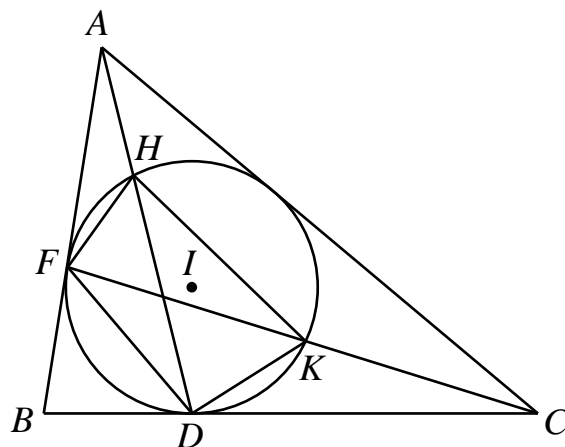
## Southeast Mathematical Olympiad 2010

第一天 2010/08/17 08:00-12:00

台灣 彰化 鹿港高中

1. 设  $a, b, c \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ , 若二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  有有理根, 证明: 三位数  $\overline{abc}$  不是素数。
2. 对于集合  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , 记  $P(A) = a_1 a_2 \cdots a_m$ 。设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ( $n = C_{2010}^{99}$ ) 是集合  $\{1, 2, \dots, 2010\}$  的所有 99 元子集, 求证:  $2011 \mid \sum_{i=1}^n P(A_i)$ 。
3. 如图, 已知  $\triangle ABC$  内切圆  $I$  分别与边  $AB, BC$  相于点  $F, D$ , 直线  $AD, CF$  分别交圆  $I$  于另一点  $H, K$ 。求证:

$$\frac{FD \times HK}{FH \times DK} = 3。$$



4. 设正整数  $a, b$  满足  $1 \leq a < b \leq 100$ , 若存在正整数  $k$ , 使得  $ab \mid (a^k + b^k)$ , 则称数对  $(a, b)$  是“好的”。求所有“好的”数对的个数。



# 第七屆東南數學競賽

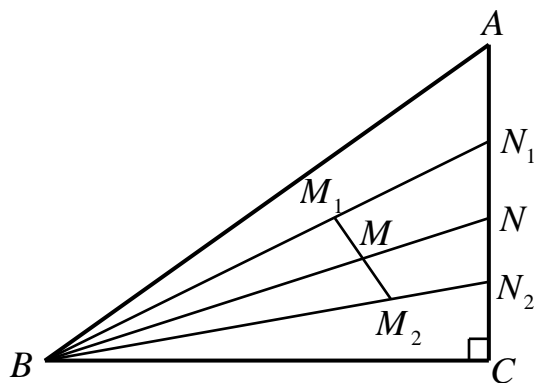
## Southeast Mathematical Olympiad 2010

第二天 2010/08/18 08:00-12:00

台灣 彰化 鹿港高中

5. 如图，三角形  $ABC$  为直角三角形， $\angle ACB = 90^\circ$ 。  $M_1$ 、 $M_2$  为  $\triangle ABC$  内任意两点， $M$  为线段  $M_1M_2$  的中点，直线  $BM_1$ 、 $BM_2$ 、 $BM$  与  $AC$  边分别交于点  $N_1$ 、 $N_2$ 、 $N$ 。求证：

$$\frac{M_1N_1}{BM_1} + \frac{M_2N_2}{BM_2} \geq 2\frac{MN}{BM}。$$



6. 设  $N^*$  为正整数集合，定义： $a_1 = 2$ ，

$$a_{n+1} = \min\left\{\lambda \mid \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{\lambda} < 1, \lambda \in N^*\right\}, n = 1, 2, \dots。$$

求证： $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$ 。

7. 设  $n$  是一个正整数，实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  和  $r_1, r_2, \dots, r_n$  满足： $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  和  $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n$ ，求证：

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \min(r_i, r_j) \geq 0。$$

8. 在一个圆周上给定 8 个点  $A_1, A_2, \dots, A_8$ 。求最小的正整数  $n$ ，使得以这 8 个点为顶点的任意  $n$  个三角形中，必存在两个有公共边的三角形。