

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 [ccmp@seed.net.tw](mailto:ccmp@seed.net.tw)

**Notice:**

**Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.**

**Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN [ccmp@seed.net.tw](mailto:ccmp@seed.net.tw)**



# 第七屆東南數學競賽

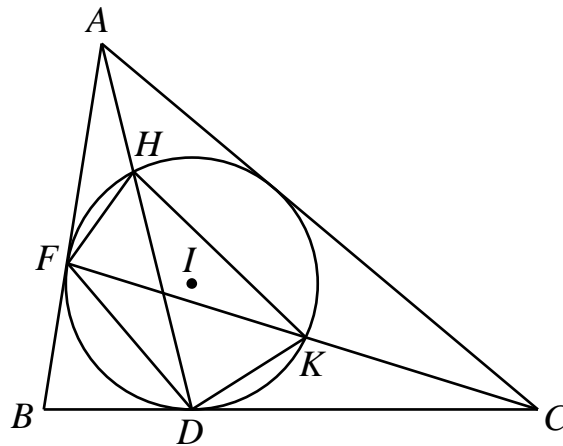
## Southeast Mathematical Olympiad 2010

第一天 2010/08/17 08:00-12:00

台灣 彰化 鹿港高中

1. 設  $a, b, c \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ ，若二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  有有理根，證明：三位數  $\overline{abc}$  不是素數。
2. 對於集合  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ，記  $P(A) = a_1 a_2 \cdots a_m$ 。設  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ( $n = C_{2010}^{99}$ ) 是集合  $\{1, 2, \dots, 2010\}$  的所有 99 元子集，求證： $2011 \mid \sum_{i=1}^n P(A_i)$ 。
3. 如圖，已知  $\triangle ABC$  內切圓  $I$  分別與邊  $AB, BC$  相於點  $F, D$ ，直線  $AD, CF$  分別交圓  $I$  於另一點  $H, K$ 。求證：

$$\frac{FD \times HK}{FH \times DK} = 3。$$



4. 設正整數  $a, b$  滿足  $1 \leq a < b \leq 100$ ，若存在正整數  $k$ ，使得  $ab \mid (a^k + b^k)$ ，則稱數對  $(a, b)$  是“好的”。求所有“好的”數對的個數。



# 第七屆東南數學競賽

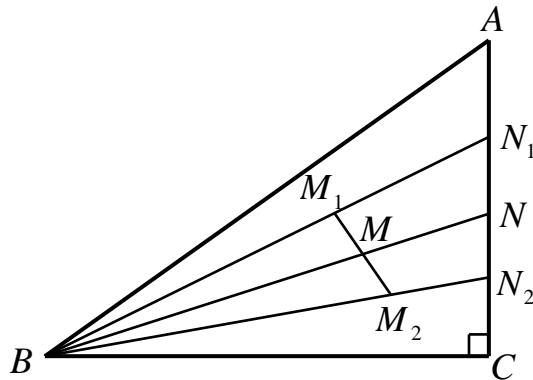
## Southeast Mathematical Olympiad 2010

第二天 2010/08/18 08:00-12:00

台灣 彰化 鹿港高中

5. 如圖，三角形  $ABC$  為直角三角形， $\angle ACB = 90^\circ$ 。  $M_1$ 、 $M_2$  為  $\triangle ABC$  內任意兩點， $M$  為線段  $M_1M_2$  的中點，直線  $BM_1$ 、 $BM_2$ 、 $BM$  與  $AC$  邊分別交於點  $N_1$ 、 $N_2$ 、 $N$ 。求證：

$$\frac{M_1N_1}{BM_1} + \frac{M_2N_2}{BM_2} \geq 2 \frac{MN}{BM}。$$



6. 設  $N^*$  為正整數集合，定義： $a_1 = 2$ ，

$$a_{n+1} = \min\left\{\lambda \mid \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{\lambda} < 1, \lambda \in N^*\right\}, n = 1, 2, \dots。$$

求證： $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$ 。

7. 設  $n$  是一個正整數，實數  $a_1, a_2, \dots, a_n$  和  $r_1, r_2, \dots, r_n$  滿足： $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  和  $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n$ ，求證：

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \min(r_i, r_j) \geq 0。$$

8. 在一個圓周上給定 8 個點  $A_1, A_2, \dots, A_8$ 。求最小的正整數  $n$ ，使得以這 8 個點為頂點的任意  $n$  個三角形中，必存在兩個有公共邊的三角形。