第七屆東南數學競賽

Southeast Mathematical Olympiad 2010

第一天　2010/08/17　08:00-12:00

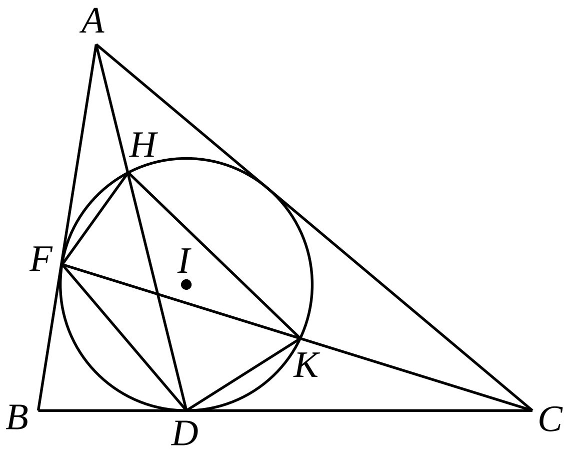
台灣 彰化 鹿港高中

1. 設 a、b、$c\in\{0,1,2,\cdots,9\}$，若二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有有理根，證明：三位數 $\overline{abc}$ 不是素數。

2. 對於集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，記 $P(A)=a_1a_2\cdots a_m$。設 A_1、A_2、⋯、A_n $(n=C_{2010}^{99})$ 是集合 $\{1,2,\cdots,2010\}$ 的所有 99 元子集，求證: $2011\left|\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)\right.$。

3. 如圖，已知 $\triangle ABC$ 內切圓 I 分別與邊 AB、BC 相於點 F、D，直線 AD、CF 分別交圓 I 於另一點 H、K。求證：

$$\frac{FD\times HK}{FH\times DK}=3\text{。}$$



4. 設正整數 a、b 滿足 $1\le a<b\le 100$，若存在正整數 k，使得 $ab\left|(a^k+b^k)\right.$，則稱數對（a,b）是“好的”。求所有“好的”數對的個數。

第七屆東南數學競賽

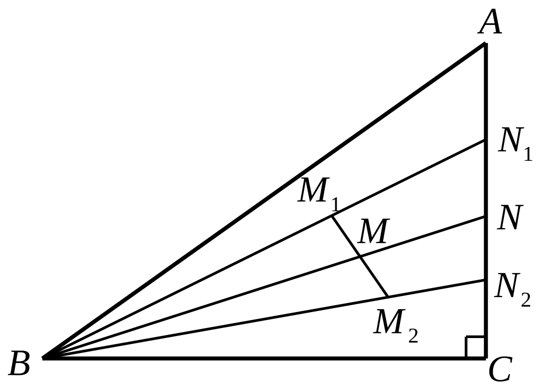
Southeast Mathematical Olympiad 2010

第二天　2010/08/18　08:00-12:00

台灣 彰化 鹿港高中

5. 如圖，三角形 ABC 為直角三角形，$\angle ACB = 90^\circ$。M_1、M_2 為 $\triangle ABC$ 內任意兩點，M 為線段 M_1M_2 的中點，直線 BM_1、BM_2、BM 與 AC 邊分別交於點 N_1、N_2、N。求證：

$$\frac{M_1N_1}{BM_1} + \frac{M_2N_2}{BM_2} \geq 2\frac{MN}{BM} 。$$



6. 設 N^* 為正整數集合，定義：$a_1 = 2$，

$$a_{n+1} = \min\{\lambda \mid \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{\lambda} < 1, \lambda \in \mathrm{N}^*\}, n = 1, 2, \cdots 。$$

求證：$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$。

7. 設 n 是一個正整數，實數 a_1、a_2、$\cdots$、a_n 和 r_1、r_2、$\cdots$、r_n 滿足：$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ 和 $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_n$，求證：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \min(r_i, r_j) \geq 0 。$$

8. 在一個圓周上給定 8 個點 A_1、A_2、$\cdots$、A_8。求最小的正整數 n，使得以這 8 個點為頂點的任意 n 個三角形中，必存在兩個有公共邊的三角形。