注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

高級卷(11-12 年級)

1. 2012－2.012 =2009.988。

答案：(E)

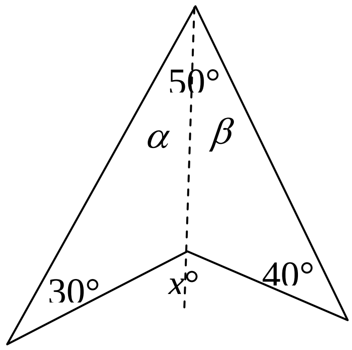
2. （**同初級卷第 10 題、中級卷第 5 題**）

令所求為 x，則有 $\frac{6}{x}=\frac{1}{3}$，因此 x=18。

答案：(A)

3. （**同初級卷第 11 題**）

作一條補助線，如右圖虛線位置，則可利用三角形的外角為另兩個內角和的性質二次，可得知 $x=\alpha+30+\beta+40=\alpha+\beta+70=120$。



答案：(E)

4. 通過點(0, 2)與點(2, 8)的直線之斜率為 $\frac{8-2}{2}=3$。因此任何一個落在此直線上的點與點(0, 2)連接而成的直線之斜率也必為 3。

逐一檢驗各點與(0, 2)連線所得之斜率，與(A)連線所得斜率為 $\frac{14-2}{4}=3$、與(B)連線所得斜率為 $\frac{14-2}{3}=4$、與(C)連線所得斜率為 $\frac{10-2}{3}=2\frac{2}{3}$、與(D)連線所得斜率為 $\frac{10-2}{4}=2$、與(E)連線所得斜率為 $\frac{2-0}{0-2}=-1$。

答案：(A)

5. 在 $\frac{a}{b}$ 與 $\frac{c}{b}$ 正中間的數是 $\frac{1}{2}(\frac{a}{b}+\frac{c}{b})=\frac{a+c}{2b}$。

答案：(E)

6. $3^{16}\times 27^{10}=3^{16}\times 3^{30}=3^{46}=9^{x}=3^{2x}$，因此 x=23。

答案：(C)

7. $\frac{p}{p-2q}=\frac{\frac{p}{q}}{\frac{p}{q}-2}=3$，因此 $\frac{p}{q}=3\frac{p}{q}-6$，即 $\frac{p}{q}=3$。

答案：(A)

8. 因為這兩瓶香水罐的外型相似且其中一罐的高度是另一罐的兩倍，因此大瓶香水罐的容量為小瓶香水罐的容量的 2×2×2=8 倍，因此小瓶香水罐的容量為 $\frac{1}{9}\times 270 = 30\,\text{ml}$。

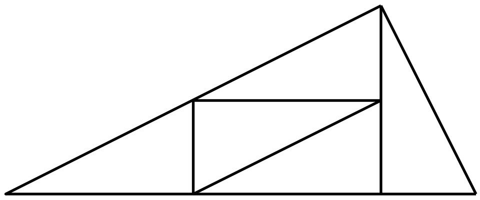
答案：(B)

9. 可知 xy 與 $x(y+1)=xy+x$ 的差為 x，故共有 $x-1$ 個整數大於 xy 但小於 $x(y+1)$。

答案：(E)

10. **（同中級卷第 13 題）**

由對稱性與畢氏定理可知小三角形的三個邊長為 1 m、2 m 與 $\sqrt{5}$ m。



由圖形可知需 4 個 1 m 的邊、3 個 2 m 的邊與 4 個 $\sqrt{5}$ m 的邊，因此總共需要 $10+4\sqrt{5}$ m 的骨架。

答案：(C)

11. 令這五個數為 5、x、y、z、16，其中 $5<x<m<y<16$ 及 m 為質數且為這五個數的平均數與中位數。

因此 m=7、11 或 13。

若 m=7，則 x=6 且總和為 35，故 y=1，矛盾；

若 m=11，則 y=12、13、14 或 15。因平均為 11，故總和為 55 且 x=11、10、9 或 8。但因這五個數為相異正整數，故 x=11 不合，即此情形共 3 種可能值；

若 m=13，則 y=14 或 15 且總和 65，此時 x=17 或 16，矛盾。

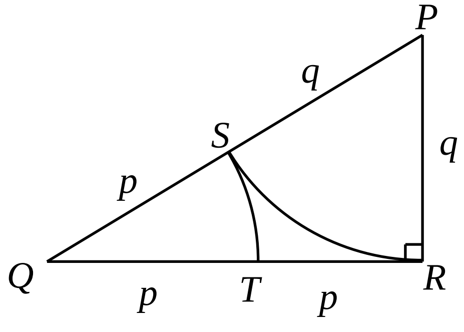
因此共有 3 個可能值。

答案：(D)

12. $3^{\frac{3}{2}}$、$3^{\frac{5}{2}}$、$3^{\frac{7}{2}}$ 的平均值為 $\frac{1}{3}(3\sqrt{3}+9\sqrt{3}+27\sqrt{3})=\frac{1}{3}(39\sqrt{3})=13\sqrt{3}$。

答案：(E)

13. 令 $QS=QT=p$、$PA=PR=q$



則由畢氏定理可得

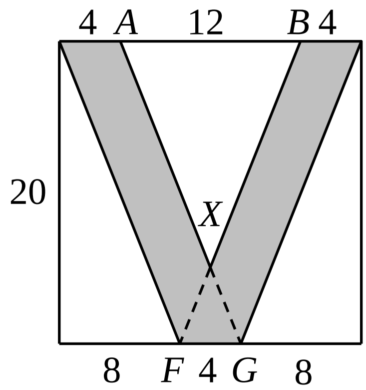
$$(p+q)^2=(2p)^2+q^2$$
$$p^2+2pq+q^2=4p^2+q^2$$
$$2pq=3p^2$$
$$2q=3p$$
$$p:q=2:3$$

答案：(E)

14. 對<u>老鷹</u>隊來說，每一場友誼賽的獲勝機率 $P(W)=\dfrac{1}{3}$、落敗機率 $P(L)=\dfrac{2}{3}$。而要贏得此系列賽的情形有 WWW、WWL、WLW、LWW，因此<u>老鷹</u>隊贏得此項友誼賽的機率為
$$(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3})+(\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3})+(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3})=\frac{1}{27}+\frac{2}{27}+\frac{2}{27}+\frac{2}{27}=\frac{7}{27}$$

答案：(D)

15. 可知三角形 ABX 與 FGX 為相似三角形，因此三角形 ABX 在 AB 邊上的高為三角形 FGX 在 FG 邊上的高之三倍且其總和為 20，因此三角形 ABX 在 AB 邊上的高為 15 而三角形 FGX 在 FG 邊上的高為 5。



因此沒有陰影的部分面積為 $2\times\dfrac{1}{2}\times8\times20+\dfrac{1}{2}\times12\times15=250$，即陰影部分的面積為 $20\times20-250=150$。

答案：(B)

16. $10^{2012}-2012=9999\cdots997988$ 這個數字為 2008 個 9 之後再接寫 7988，因此數碼和為 $2008\times9+7+9+8+8=18104$。

答案：(B)

17. 可假設這個直角三角形的三邊長分別為 2、$2r$ 及 $2r^2$，則由<u>畢氏</u>定理可得 $4+4r^2=4r^4$，解 r^2 可以得到 $r^2=\dfrac{-4+\sqrt{16+64}}{8}=\dfrac{-4+4\sqrt{5}}{8}=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})$，其中因 $r^2>0$ 而捨去負解。因此由假設知斜邊長度為 $2r^2=1+\sqrt{5}$。

答案：(A)

18. 【解法一】

可知第一張被小馬猜中是 X 的機率為 $\dfrac{4}{8}$，接著被猜中是 Y 的機率為 $\dfrac{4}{7}$。因這是獨立事件，故知 $P(\mathrm{XY})=\dfrac{4}{8}\times\dfrac{4}{7}$。以此類推，可得知

$$P(\mathrm{XYXYXYXY})=\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{70}\text{。}$$

【解法二】

可知 4 個 X 與 4 個 Y 的排列組合方式共有 $C^8_4=\dfrac{8!}{4!4!}=70$ 種，每一種情形發生的機率都一樣，因此排成 XYXYXYXY 的機率為 $\dfrac{1}{70}$。

答案：(B)

19. 假設每一片磁磚的維度為 $a\times b$，且由已知周長為 24 cm 可得 $a+b=12$。令這一長列上共有 n 塊磁磚，則知

$$3\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+n^2b^2}$$
$$9a^2+9b^2=a^2+n^2b^2$$
$$8\frac{a^2}{b^2}=n^2-9$$

故知 b 必整除 a。由此可得$(a, b)=(11, 1)$、$(10, 2)$、$(9, 3)$、$(8, 4)$或$(6, 6)$。

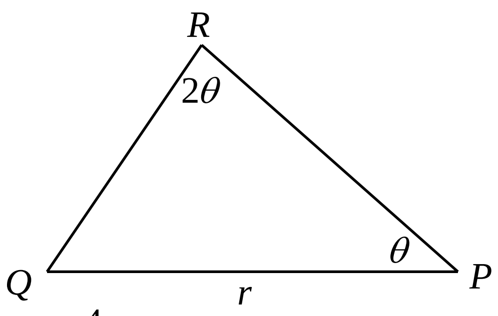
因 $8\times121+9=997$ 不是一個完全平方數、
$8\times25+9=209$ 不是一個完全平方數、
$8\times9+9=81$ 為一個完全平方數、
$8\times4+9=41$ 不是一個完全平方數、
$8\times1+9=17$ 不是一個完全平方數，

故 $n=9$。

答案：(C)

20. 【解法一】

令 $PQ=r$、$\angle P=\theta$、$\angle R=2\theta$。



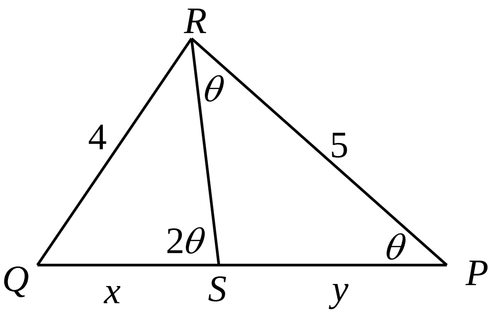
接著由正弦定理可以得知 $\dfrac{4}{\sin\theta}=\dfrac{r}{\sin2\theta}=\dfrac{r}{2\sin\theta\cos\theta}$，即 $r=8\cos\theta$，因此可推得 $\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=\dfrac{r^2}{32}-1$。現再由餘弦定理可知

$$r^2 = 16 + 25 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos 2\theta = 41 - 40(\frac{r^2}{32} - 1) = 81 - \frac{5}{4}r^2$$

解方程即可得 r=6。

【解法二】

令∠R的角平分線交 PQ 於 S，則可推知△PQR 與△RQS 為相似三角形。令 QS=x 與 SP=y。



接著由 $\frac{PR}{RQ} = \frac{PS}{QS}$ 知 $\frac{5}{4} = \frac{y}{x}$，即 $y = \frac{5}{4}x$；再由 $\frac{PQ}{QR} = \frac{QR}{QS}$ 知 $\frac{x+y}{4} = \frac{4}{x}$，即

$$x(x+y) = 16$$

$$x(x + \frac{5x}{4}) = 16$$

$$x^2 = \frac{16 \times 4}{9}$$

$$x = \frac{8}{3}$$

因此 $y = \frac{5}{4}x = \frac{10}{3}$ 且 $PQ = x + y = \frac{8}{3} + \frac{10}{3} = 6$。

答案：(B)

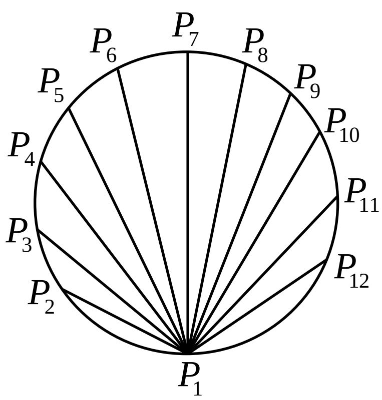
21. $p(x)$ 的各項係數之和即為 x=1 時的取值，而

$$\begin{aligned} p(1) &= (-1)^{2012}(2013) + (-1)^{2011}(2012) + \cdots + (-1)(2) \\ &= (2013 - 2012) + (2011 - 2000) + \cdots + (3 - 2) \\ &= 1006 \end{aligned}$$

答案：(A)

22. 【解法一】

考慮點 P_1 及由該點連出的弦 P_1P_2 、 P_1P_3 、⋯、 P_1P_{12} 。



對 P_1P_2 來說，共有 10 個點位在 P_1P_2 的同一側，因此 P_1P_2 可以與這 10 點中的任意二個點所構成的弦都形成一組不相干的弦對，故知此時共決定了 C_2^{10} 組不相干的弦對。可知 P_1P_3 則可以決定出 C_2^9 組不相干的弦對，而 P_1P_6 因有 4 個點位在 P_1P_6 的一側及 6 個其餘的點位在 P_1P_6 的另一側，故共決定了 $C_2^4+C_2^6$ 組不相干的弦對；其餘的弦可以此類堆，因此由觀察 P_1 所得到的不相干的弦對共有

$$C_2^{10}+C_2^9+(C_2^8+C_2^2)+(C_2^7+C_2^3)+\cdots+(C_2^2+C_2^8)+C_2^9+C_2^{10}$$

其值為 $2(C_2^{10}+C_2^9+C_2^8+\cdots+C_2^3+C_2^2)=330$ 組。

重複以上步驟套用至所有的點，此時因每條弦都算了 2 次、構造不相干的弦對也算了 2 次，因此總數為 $330\times12\div2\div2=990$ 組。

【解法二】

可知每一組不相干的弦對共有 4 個點，而每四個點可以得到 2 組不相干的弦對，因此共有 $2C_4^{12}=2\times\dfrac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1}=11\times10\times9=990$ 組。

【解法三】

可知共有 $C_2^{12}\times C_2^{10}\div2=\dfrac{66\times45}{2}=33\times45$ 組弦對，其中不是不相干的弦對共有 $C_4^{12}=\dfrac{12\times11\times10\times9}{4!}=11\times45$ 組，所以不相干的弦對共有 $33\times45-11\times45$ $=22\times45=990$ 組。

答案：(D)

23. 由 $x^2-8x-1001y^2=0$ 可得 $y^2=\dfrac{x(x-8)}{7\times11\times13}$，故可知 x=0 與 x=8 是不合題意的，且可觀察出當 y 值增加時，x 的取值也會對應增加。因此從 y=1 開始考慮：

y=1 時，可得 $x(x-8)=7\times11\times13$，此時 x 無正整數解；

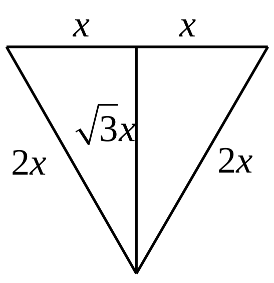
y=2 時，可得 $x(x-8)=4\times7\times11\times13$，此時 x 無正整數解；

y=3 時，可得 $x(x-8)=9\times7\times11\times13=99\times91$，因此 x=99 而 y=3。

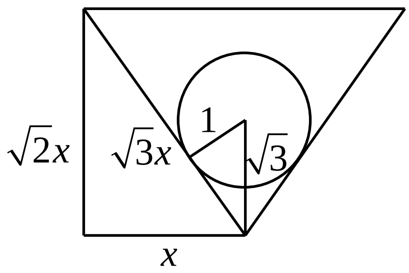
故知 $x+y$ 的極小值是 102。

答案：(C)

24. 對於這個四角錐的任意一個側面來說，其邊長的關係如下圖所示：



現觀察這個四角錐放入球體後由頂點往底面作一個垂直於底面的切面，此時得到的圖形之邊長關係如下圖所示：



其中 x 與 $\sqrt{x}$ 的值與第一個圖相同，而 $\sqrt{2}x$ 可在較大的直角三角形中由畢氏定理得到。而可推得這二個直角三角形為相似三角形，因此較小的直角三角形之斜邊，便是球的球心與四角錐的頂點之距離，即 $\sqrt{3}$。

答案：(D)

25. 列出 -2 的冪次方所對應的十進制之值：

$(-2)^0$	$(-2)^1$	$(-2)^2$	$(-2)^3$	$(-2)^4$	$(-2)^5$	$(-2)^6$	$(-2)^7$	$(-2)^8$	$(-2)^9$	$(-2)^{10}$	$(-2)^{11}$	$(-2)^{12}$
1	-2	4	-8	16	-32	64	-128	256	-512	1024	-2048	4096

現要將 2000 表示成 -2 的冪次方之和。

觀察知 $-(-2)^n=(-2)^n+(-2)^{n+1}$ 且 $2(-2)^n=-(-2)^{n+1}$，

例如 $512=-(-2)^9=(-2)^9+(-2)^{10}=-512+1024$ 且 $2\times1024=2(-2)^{10}=-(-2)^{11}=-(-2048)$。

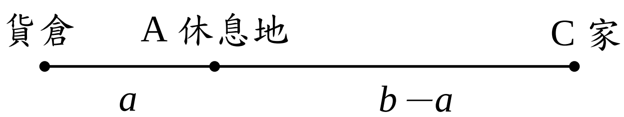
利用以上觀察，並將 -2 的奇數次方取代，可得

$$\begin{aligned}2000&=11111010000_2\\&=1024+512+256+128+64+16\\&=2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^4\\&=(-2)^{10}-(-2)^9+(-2)^8-(-2)^7+(-2)^6+(-2)^4\\&=(-2)^{10}-(-2)^9-(-2)^9+(-2)^7+(-2)^6+(-2)^4\\&=(-2)^{10}+(-2)^{10}+(-2)^7+(-2)^6+(-2)^4\\&=-(-2)^{11}+(-2)^7+(-2)^6+(-2)^4\\&=(-2)^{12}+(-2)^{11}+(-2)^7+(-2)^6+(-2)^4\end{aligned}$$

即得到 1100011010000_{-2}，因此共有 5 個不是 0 的數碼。

答案：(C)

26. 假設從貨倉至 A 休息等候的地點之距離為 a km、從貨倉至 C 的家之距離為 b km。

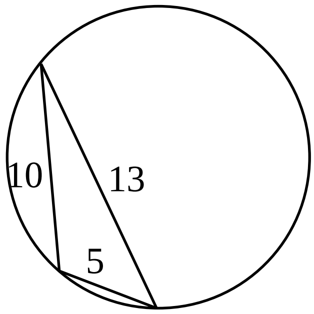


B 自己一個人騎車至少騎了 $2(b-a)$ km，故知 $2b-2a\le300$。而兩人合計至少騎了 $2a+2b$ km，故知 $2b+2a\le600$，因此 $4b\le900$，即 $b\le225$。若等號成立，即 $b-a=150$ 且 $b+a=300$，故 $b=225$ 而 $a=75$。

此可利用以下方式得到：A 和 B 一起騎 75 km，此時二人皆使用了$\frac{1}{4}$的油，接著從 A 的摩托車油箱抽油注入 B 的摩托車油箱至滿油箱，此時 A 的油箱剩一半的油。然後 B 最多可再騎 150 km 至 C 的家便需返回，到 A 等候處恰將油用完，接著 A 可從自己的摩托車油箱抽滿油箱時容量的$\frac{1}{4}$的油注入 B 的摩托車油箱，則二人可同時再騎 75 km 回到貨倉。因此 C 的家離貨倉最遠可為 225 km。

答案：225

27. 令這 28 個在圓周上間距都相等的點為 P_1、P_2、…、P_{28}，則任意一個由其中三點所構成的三角形的三個內角之角度比與其對邊所截的弧長之長度比相同，這是因為每一個內角，都是其對邊所截之弧的圓周角，其值為圓心角的一半。



舉例來說，若稱一個三角形的邊長為 n 即其所截之弧為 P_kP_{k+n}，則邊長總和為 28 且邊的對角之比即為邊之比。邊長為 1，則其對角的角度為$\frac{\pi}{28}$；邊長為 n，則其對角的角度為$\frac{n\pi}{28}$。如上圖中，邊長為 5 的對角，其角度為$\frac{5\pi}{28}$，而邊長為 10 的對角，其角度為$\frac{10\pi}{28}$，即為邊長為 5 的對角的 2 倍。因此所求之三角形必有一條邊之邊長恰為另一條邊之邊長的二倍。因三邊總和為 28，故知這些三角形的邊長為：

1, 2, 25
2, 4, 22
3, 6, 19
4, 8, 16　此等價於　8, 16, 4
5, 11, 13
6, 12, 10
7, 14, 7
9, 18, 1

注意到以上這 8 個不同的三角形中，有一個三角形 7, 14, 7 為等腰三角形，因此共可得到(8－1)×2×28+28=420 個不同的三角形。

答案：420

28. (**同中級卷第 29 題**)

此答案必僅有一解，否則若有二個不同的解，則這二個解裡對應的方格所填之數相減，此時將可獲得另一個仍滿足題意所要求的平均條件的填法，但此時可發現其四個角落都為 0 而可推得全部的方格都必須為 0，即這二個解內對應的方格所填之數都相等，換言之，此二解相同，矛盾。

現由這四個角落所填之數觀察，若有一解，則不論將這個解反射填入、旋轉填入或將方格內的數加上負號填入仍會滿足題意，因此可假設此填法為

+1000	y	0	$-y$	–1000
y	x	0	$-x$	$-y$
0	0	0	0	0
$-y$	$-x$	0	x	y
–1000	$-y$	0	y	+1000

因此只需求得 x、y 之值即可。由這二個數的位置可知

$$y=\frac{1}{3}(1000+x)$$

$$x=\frac{1}{4}(2y+0)=\frac{y}{2}$$

故知 $3y=1000+\frac{y}{2}$，即 y=400、x=200。所以標記 x 的小方格內的數是 200。

答案：200

29. (**同初年卷第 30 題、中年卷第 30 題**)

【解法一】

可知從 $T_0=[0]$ 開始，可得 $T_1=[0|1|2]$、$T_2=[0,1,2|1,2,3|2,3,4]$ 以及 $T_3=[0,1,2,1,2,3,2,3,4|1,2,3,2,3,4,3,4,5|2,3,4,3,4,5,4,5,6]=[t_1,t_2,t_3,\cdots,t_{27}]$ (其中 T_3 的三個部分可以看成 T_2、T_2+1、T_2+2)。

由規則可推知 T_n 的最大數為 $2n$，且在經過 n 次疊代後，共有 3^n 項。

因 $3^6=729<2012<2187=3^7$，故要求出第 2012 項要從 T_7 開始看起。

由觀察以上規則可以看出，因 2012=729+729+554，故第 2012 項 $t_{2012}=t_{554}+2$；

而因 554=243+243+68，故第 554 項 $t_{554}=t_{68}+2$；

再因 68=27+27+14，故第 68 項 $t_{68}=t_{14}+2$；

最後因 14=9+5，故第 14 項 $t_{14}=t_5+1$；

因此可知

$$
\begin{aligned}
t_{2012} &= t_{554} + 2 \\
&= t_{68} + 2 + 2 \\
&= t_{14} + 2 + 2 + 2 \\
&= t_5 + 1 + 2 + 2 + 2 = 2 + 1 + 2 + 2 + 2 = 9
\end{aligned}
$$

【解法二】

可知每經過一次泰勒化所得到的一組數之個數是泰勒化前那一組數的 3 倍，故可以考慮三進制。將泰勒化後所得到的數依序與三進制中由小至大的數一一對應後可得下表：

0	1	2	1	2	3	2	3	4	1	2	3	2	3	4	3	4	5	2	…
0	1	2	10	11	12	20	21	22	100	101	102	110	111	112	120	121	122	200	…

可發現泰勒化中的數，即為其所對應的三進制中的數之數碼和，因此第 2012 個數即為三進制中由小至大第 2012 個數之數碼和。因 $2012=2202111_3$，故所求為 2+2+0+2+1+1+1=9。

答案：009

30. 可知

$$
\begin{aligned}
\sin x\cos x + \sin y\cos y + \sin x\sin y + \cos x\cos y &= 1 \\
\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 2y + \cos(x-y) &= 1 \\
\frac{1}{2}(2\sin(x+y)\cos(x-y)) + \cos(x-y) &= 1 \\
\cos(x-y)(1+\sin(x+y) &= 1 \\
\cos(x-y) &= \frac{1}{1+\sin(x+y)}
\end{aligned}
$$

因此$\cos(x-y)$的最小值發生在

$$\sin(x+y)=1\text{，即 } x+y=90, 450, 810, \ldots\text{，}$$

此時

$$\cos(x-y)=\frac{1}{2}\text{，即 } x-y=60, 300, 420, \ldots\text{，}$$

因此可知 $x+y=90+360n$ 且 $x-y=\pm 60+360m$，因此

$$2x-y=\frac{1}{2}(x+y)+\frac{3}{2}(x-y)=45\pm 90+180n+540m$$

此即任何一個滿足 180 的倍數再減去 45 的數，因此所求之最接近 360° 的度數為 $360-45=315$。

答案：315