1 中級卷參考解答

1. 算式 $1+2-3-4+5+6-7-8+9+10$ 等於

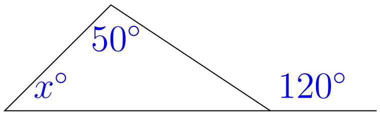
(A) 0 (B) 1 (C) 10 (D) 11 (E) 19

$$1+(2-3)+(5-4)+(6-7)+(9-8)+10=1-1+1-1+1+10=11,$$

答: (D).

2. (**同初級卷第 2 題**)

在右圖中, 請問 x 之值等於什麼?



(A) 80 (B) 70 (C) 60

(D) 50 (E) 40

解法 1

可知這個三角形的三個內角的角度分別為 $x°$、$50°$ 及 $60°$。由三角形的內角和為 $180°$ 可得 $x+110=180$，因此 $x=70$。

答: (B).

解法 2

由三角形的外角等於兩個遠內角之和可得知 $x+50=120$，因此 $x=70$。

答: (B).

3. (**同高級卷第 3 題**)

已知 $p=9$， $q=-3$，請問 p^2-q^2 等於什麼？

(A) 64 (B) 72 (C) 84 (D) 90 (E) 96

$p^2=81$ 且 $q^2=9$，故知 $p^2-q^2=81-9=72$。

答: (B).

4. 請問在下列算式的格子內要填入什麼數才能使算式正確？

$$2014 \div \boxed{} = 100$$

(A) 0.02014 (B) 0.2014 (C) 2.014 (D) 20.14 (E) 201.4

可知 $a \div b=100$ 僅當 $a=100b$ 時才會成立，故格子內的數應為 $2014 \div 100=20.14$。

答: (D).

5. (**同初級卷第 6 題**)

若某數的 $\frac{5}{6}$ 等於 30, 請問這個數的 $\frac{3}{4}$ 等於什麼?

(A) 22.5　(B) 24　(C) 25　(D) 27　(E) 40

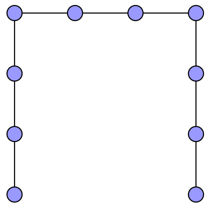
可知這個數的 $\frac{1}{6}$ 是 6，故這個數是 36。因此這個數的 $\frac{1}{4}$ 是 9，所以這個數的 $\frac{3}{4}$ 是 27。

答: (D).

---

6. (**同初級卷第 8 題**)

將右圖稱之為 4 階**無底正方形**，因為它的三個邊都等長且每條邊都有四枚圖釘，圖釘之間的間隔都相等。請問一個 10 階無底正方形總共有幾枚圖釘？



(A) 26　(B) 27　(C) 28

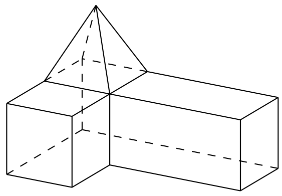
(D) 30　(E) 32

可知 10 階無底正方形的左側及右側各有 10 枚圖釘，且扣除重複的角落二枚圖釘後，第三邊上的圖釘有 8 枚是未數到的，因此共有 28 枚圖釘。

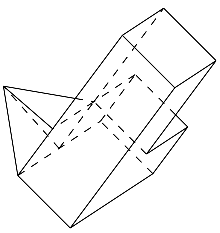
答: (C).

---

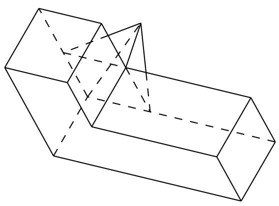
7. 請問下列哪一項的物品與右側的物品不相同？



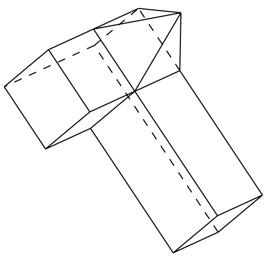
(A)



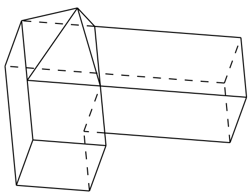
(B)



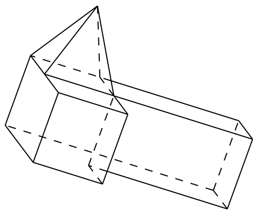
(C)

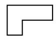


(D)



(E)

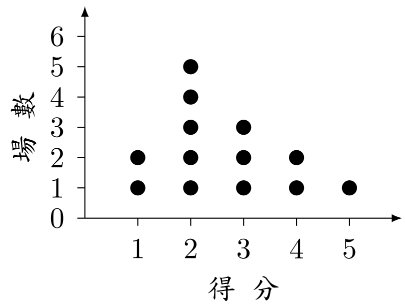


若將每一個選項中的物品的 L-型底面旋轉成  的樣子，可發現右側物品與 B、C、D、E 物品上的四角錐頂點都是朝同一方向，只有 A 物品的四角錐頂點朝相反的方向。

答: (A).

---

8. 右側是某足球隊在首 13 場比賽的每場得分統計表。在第 14 場比賽後，得分的中位數上升但眾數仍保持不變。請問下列哪一項的敘述最符合第 14 場比賽的得分？



(A) 得分 $=1$ (B) 得分 $=2$ (C) 得分 ≥ 2
(D) 得分 <3 (E) 得分 ≥ 3

由統計表可知

(i) 眾數為 2。

(ii) 中位數為 2 (因共有 7 場的得分少於或等於 2，6 場的得分多於或等於 3)。

可發現眾數不會因第 14 場的得分而改變，但中位數會上升至 2.5 僅當第 14 場的得分多於或等於 3。

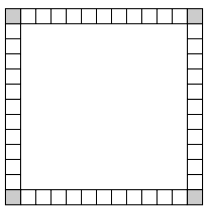
答: (E).

---

9. 用 48 塊尺寸為 $1\,\mathrm{m}\times 1\,\mathrm{m}$ 的地磚來鋪設一條寬為 1 m 圍繞正方形花園的步道。請問在步道內部正方形花園的面積為多少 m^2 ？

(A) 100 (B) 110 (C) 121 (D) 132 (E) 144

可知有 4 塊地磚會被用來鋪在角落，剩餘的 $44=4\times 11$ 可用來鋪在正方形花園的邊但是不是角落的地方:



故可得知中間的正方形部分的面積為 $11\,\mathrm{m}\times 11\,\mathrm{m}=121\,\mathrm{m}^2$。

答: (C).

10. 有位農夫於每年五月播種大麥種子，接著在當年十月可得到原來所播種種子重量 12 倍的收成。通常每次收成時，這位農夫都售出 50 噸，剩下的則保留作為次年耕作的種子。今年這位農夫所種的大麥種子將會有 120 噸的收成，請問去年他播種了多少噸的大麥種子？

(A) 5 (B) 10 (C) 20 (D) 30 (E) 60

可知這位農夫今年播種時的種子重量為 10 噸，因此他去年的收成為 60 噸，即可得知他去年播種了 5 噸。

答: (A).

---

11. 已知 x 是個整數且 $x < -1$, 請問下列哪一項的值最大？

(A) $\frac{1}{x}$ (B) $\frac{1}{x^2}$ (C) $x+1$ (D) $-\frac{1}{x^2}$ (E) $-\frac{1}{x}$

因 $x < -1$，故知僅 $\frac{1}{x^2}$ 與 $-\frac{1}{x}$ 為正數。再因 $0 < \frac{-1}{x} < 1$ 且

$$0 < \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{x}\frac{-1}{x} < \frac{-1}{x}$$

故知 $-\frac{1}{x}$ 的值最大。

答: (E).

評註

可用 $x = -2$ 代入這五個選項而得到 (A) $-\frac{1}{2}$ 、(B) $\frac{1}{4}$、(C) -1、(D) $-\frac{1}{4}$ 及 (E) $\frac{1}{2}$. 故可得知答案為 (E)。

---

12. 有 11 位板球隊員測驗板球擲遠，它們的成績分別如下 (最接近的 m 數):

19、26、31、31、31、33、37、42、42、48、56

根據他們成績的統計結果，請問下列哪一項是遞增的排列？

(A) 平均數、中位數、眾數

(B) 中位數、平均數、眾數

(C) 眾數、平均數、中位數

(D) 中位數、眾數、平均數

(E) 眾數、中位數、平均數

經過計算後可以得知眾數 $= 31$，中位數 $= 33$ 而平均數 $= \frac{396}{11} = 36$,

答: (E).

評註

除了直接計算平均數以外，也可以利用頭尾配對方式來配對，可得 $\{19, 56\}$、$\{26, 48\}$、$\{31, 42\}$、$\{31, 42\}$ 以及 $\{31, 37\}$，每一對的平均數都大於中位數 33，故知全體的平均數必定大於 33。

13. 在 X 瓶內有 800 mL 的水，在 Y 瓶內有 800 mL 的牛奶。若我從 X 瓶中倒出 200 mL 進入 Y 瓶內，然後攪拌混和溶液使之均勻。接著我從 Y 瓶的混和溶液中倒 200 mL 進入 X 瓶內。請問此時在 X 瓶內的牛奶之體積是什麼？

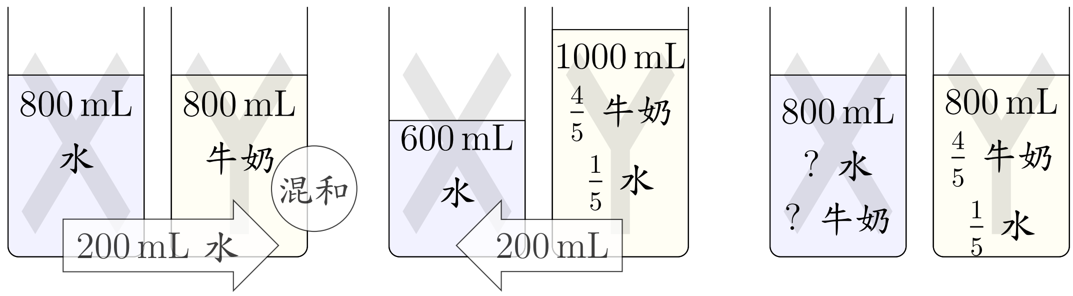
(A) 150 mL (B) 160 mL (C) 175 mL (D) 180 mL (E) 200 mL

解法 1

在從 X 瓶中倒出 200 mL 進入 Y 瓶後，Y 瓶內含有 80% 的牛奶。因此從 Y 瓶的混和溶液中倒入 X 瓶的 200 mL 液體中有 80% 的牛奶，故可得知在 X 瓶內的牛奶之體積有 $0.8 \times 200 = 160$ mL。

答: (B).

解法 2



故知在最後，Y 瓶中有 $\frac{4}{5} \times 800\,\text{mL} = 640\,\text{mL}$ 的牛奶, 所以 X 瓶中有 160 mL 的牛奶。

答: (B).

14. 女子 400 m 賽跑的世界紀錄是 47.6 秒。請問下列哪一項最接近這位跑者平均每小時跑的公里數？

(A) 22 (B) 24 (C) 26 (D) 28 (E) 30

用 47.6 秒跑 400 m 表示每公里需 $47.6 \times 2.5 = 47.6 + 47.6 + 23.8 = 119$ 秒，因此平均每小時跑的公里數為 $\frac{1}{119} \times 60 \times 60 = \frac{120}{119} \times 30$，此值大約超出 30 一點，故知選項中最接近這位跑者每小時跑的公里數為 30。

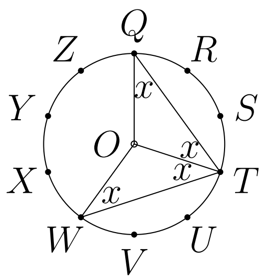
答: (E).

15. 在一個圓上依序有十個點 Q、R、S、T、U、V、W、X、Y、Z，它們的間隔都相同。請問 $\angle QTW$ 為多少度？

(A) 36 (B) 54 (C) 60 (D) 72 (E) 75

解法 1

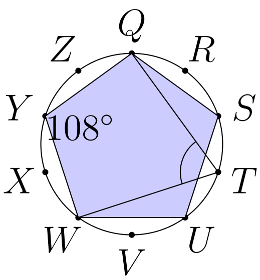
令點 O 為圓心並畫出兩個全等的等腰三角形 $\triangle QOT$ 及 $\triangle TOW$，再令 x 為這兩個等腰三角形的底角度數，如圖所示。



可知十個圓心角 $\angle QOR$、$\angle ROS$、… 的角度都相等，故 $\angle QOT = \frac{3}{10} \times 360° = 108°$。而在 $\triangle QOT$ 中，$108° + 2x = 180°$，故知 $x = 36°$。因此 $\angle QTW = 2x = 72°$。

答: (D).

解法 2

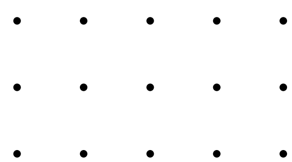


如圖，可知多邊形 $QSUWY$ 為正五邊形，因此 $\angle QYW = 108°$。而四邊形 $QTWY$ 內接於圓，故可得知對角互補，即對角的和為 $180°$，因此 $\angle QTW = 180° - 108° = 72°$。

答: (D).

16. (**同小學高年級卷第 26 題、初級卷第 20 題**)

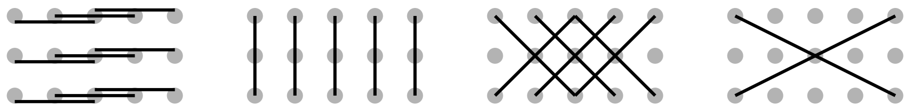
右圖所示是一個 3×5 的格子點。連接兩個格子點畫直線段，使得此線段恰通過另一個格子點，請問共可畫出多少條這樣的線段？



(A) 14 (B) 20 (C) 22 (D) 24 (E) 30

解法 1

如圖，畫出所有滿足題意的線段，其中有水平線段、鉛垂線段、與鉛垂線夾 45° 角的線段及對角線段:



$$9 \quad + \quad 5 \quad + \quad 6 \quad + \quad 2 \quad = 22$$

答: (C).

解法 2

因每條滿足題意的線段都只數一次，故可依中間點所在位置分類。若將中間點位在該點的線段數記在該點上，可得以下的圖，其中數目是成對稱的情況：

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot \end{array}$$

因此知共有 22 條線段。

答: (C).

17. (**同初級卷第 22 題**)

一家旅館的每間房間至多可住進二人。配偶可同住一房間，否則男人只能與男人住同一房間，女人只能與女人住同一房間。現有 100 人的團體入住，請問至少需要多少間房間才能保證夠住？

(A) 50 (B) 51 (C) 67 (D) 98 (E) 99

在最壞的情況下，51 間房間即可保證夠住。可知是配偶的總人數一定為偶數，故知若單身的男人總數是偶數時，則單身的女人總數也必是偶數，此時單身的男生與女生都可分別各自兩兩配對入住，即僅需 50 間房間；而若單身的男人總數是奇數時，則單身的女人總數也必定是奇數，因此將單身的男生與女生分別各自兩兩配對後，還會多一位男生與一位女生，此時共有 98 對可住 49 間房間，還需再為多出來的一位男生與一位女生各準備一間房間，合計需 51 間房間。

答: (B).

18. 有二個長方體的尺寸分別為 $4\,\text{cm} \times 6\,\text{cm} \times x\,\text{cm}$ 與 $3\,\text{cm} \times 8\,\text{cm} \times y\,\text{cm}$ 其中 x 、y 為正整數。若它們的表面積相同，請問 $x+y$ 可能的最小值是什麼？

(A) 11 (B) 21 (C) 26 (D) 42 (E) 63

解法 1

可知這兩個長方體的表面積為 $8x+12x+48$ and $6y+16y+48$，故有 $20x+48=22y+48$，即 $y=\frac{10}{11}x$。而滿足這個等式的最小整數 x 值為 $x=11$ ，此時 $y=10$，因此 $x+y$ 的最小值為 21。

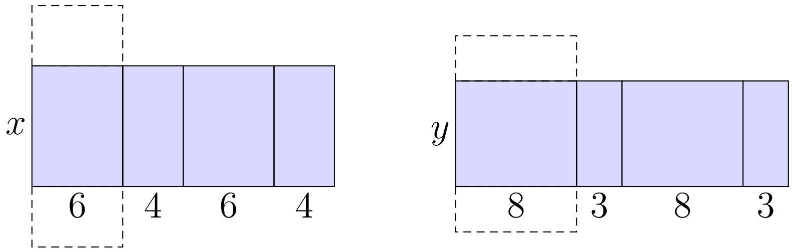
答: (B).

評註

其餘可能值為 $20+22$ 、$30+33$ 等等。

解法 2

可知每個長方體都有兩個表面積為 $24\,\mathrm{cm}^2$ 的面，故這部分可以刪除不計。而第一個長方體的其餘四個面的可形成一個 $20\times x$ 的矩形，第二個長方體的其餘四個面的可形成一個 $22\times y$ 的矩形，如圖所示:



故可得 $20x=22y$，而滿足此式的最小正整數解為 $x=11$ 、$y=10$，因此 $x+y=21$。

答: (B).

---

19. 一個四位數 $\overline{abcd}$，若 a 可被 4 整除、二位數 $\overline{ab}$ 可被 5 整除、三位數 $\overline{abc}$ 可被 6 整除且四位數 $\overline{abcd}$ 可被 7 整除，則稱這個四位數為<u>酷數</u>。請問沒有任何一個數碼是 8 的酷數共有多少個？

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 超過 6

因要求酷數的數碼中沒有任何一個數碼是 8，故可令首位數為 4，此時第二位數為 0 或 5。

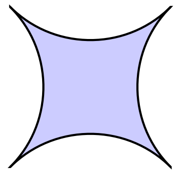
現考慮四位數 $\overline{40cd}$。因三位數 $\overline{40c}$ 可被 6 整除，故知 $c=2$ or $c=8$，但 8 不合，故可得知四位數 $\overline{402d}$ 可被 7 整除。因 $4020=7\times574+2$，所以知 4025 可被 7 整除，即其為一個酷數。

接著考慮四位數 $\overline{45cd}$。因三位數 $\overline{45c}$ 可被 6 整除，故知 $c=0$ or $c=6$。因 $4500=7\times642+6$ 而 $4560=7\times651+3$，所以知 4501 與 4564 可被 7 整除，即其為酷數。

因此得知共有 3 個酷數其數碼中沒有任何一個數碼是 8: 4025、4501 與 4564。

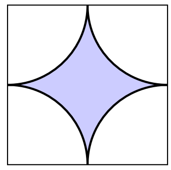
答: (A).

20. 右側的圖形是由四段全等的弧所構成的，每段弧都是半徑為 5 cm 的圓之圓周的四分之一。請問這個圖形內部的面積為多少 cm^2？



(A) $100-20\pi$　(B) 100　(C) $25\pi+25$　(D) 25π　(E) $100-25\pi$

可知這個圖形為將一個邊長為 10 cm 的正方形切掉四個分別以四個頂點為圓心、半徑為 5 cm 且圓心角為 90° 的扇形。因這四個扇形可以拼成一個半徑為 5 cm 的圓形，故可得知所求的面積為



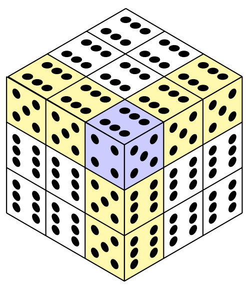
$$10^2-\pi\times5^2=100-25\pi$$

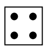
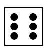
答: (E).

21. 一枚標準正立方體骰子之任兩個相對的面上點數之和都為 7。若將 27 枚相同的標準骰子在桌面上堆疊成 $3\times3\times3$ 的正立方體，請問從某個位置望去最多可以看到多少個點？

(A) 90　(B) 94　(C) 153　(D) 154　(E) 189

可知最多可看到正立方體中三個 3×3 的面，所以從某個位置望去最多可以看到的點數即為這三個面上的點數。點數最多為 153 點，如圖所示:



骰子面	點數	總點數
	1	4
	7	35
	19	114
		153

現驗證不會看到更多的點數。在可看到的 19 枚骰子中，1 枚骰子可被看見 3 個面、6 枚骰子可被看見 2 個面而有 12 枚骰子只有 1 個面可被看見。因此可被看見的點數總和為 $1\times15+6\times11+12\times6=153$,

答: (C).

22. 某個集合內有十個正整數，有一些為奇數，有一些為偶數。將此集合中的數兩兩配對，並將配對的兩個數之和寫下。已知在所有寫下的 45 個和之中恰有 20 個數是偶數。請問原來的集合中有幾個數是偶數？

(A) 0　(B) 3　(C) 5　(D) 8　(E) 10

可知寫下的和之中有 25 個數是奇數，而每一個奇數都一定從原先的 10 個正整數中選出一個偶數與一個奇數相加。此僅可能發生在 5 個奇數與 5 個偶數時，才會使寫下的數中有 $5 \times 5 = 25$ 個奇數。

答: (C).

23. (**同高級卷第 21 題**)

我計畫從 S 市開車到 550 km 遠的 C 市，出發時我的車子有 $\frac{2}{3}$ 桶的汽油。途中，當我抵達離開 S 市 165 km 的 M 市時，我還剩下 $\frac{1}{2}$ 桶的汽油。如果我以相同的油耗量繼續行駛且不再添加油料。請問下列哪一項敘述為真？

(A) 當我抵達 C 市時還剩下$\frac{1}{9}$ 桶的汽油。

(B) 當我抵達 C 市時還剩下$\frac{1}{20}$ 桶的汽油。

(C) 當我抵達 C 市時正好用完汽油。

(D) 當我用完汽油時尚離 C 市 110 km。

(E) 當我用完汽油時尚離 C 市 220 km。

可知行駛 165 km 會用去 $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ 桶的汽油，因此若加滿油時，總共可以行駛 $6 \times 165 = 990\,\text{km}$，即抵達 C 市時共使用了 $550 \div 990 = \frac{5}{9}$ 桶的汽油。但實際上我出發時僅有 $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ 桶的汽油，故當我抵達 C 市時還剩下$\frac{1}{9}$ 桶的汽油。

答: (A).

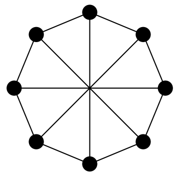
24. 某次宴會上，每個人都恰與其他三人握過手，且沒有任何兩個人握超過一次手。如果總握手的次數少於 15 次，請問最多有多少人參加此宴會？

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

令 N 為參加此宴會的總人數而 H 為每一個人握手的握手次數總和。因兩個人握手時兩個人都有計算到一次握手，因此可推知 $3N = 2H$。現因已知 $H < 15$，故有 $N = \frac{2}{3}H < 10$。此時再由 $3N = 2H$ 可推知 N 一定是偶數，故有 $N \leq 8$。

此時可知最多有 8 人參加此宴會，握手情況可如下圖所示，其中每一個黑點都代表一個人，黑點與黑點之間的連線則代表這兩個人彼此握

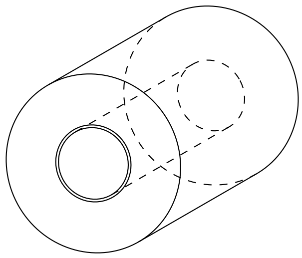
過手。



答: (C).

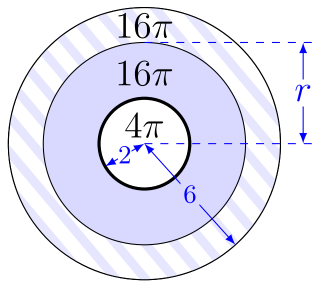
25. (同高級卷第 22 題)

小貞有一捲紙，紙非常地薄且緊緊纏繞著一個圓柱體軸心捲成一捲，它的整體外貌如右圖所示。初始時，整捲紙的直徑為 12 cm，軸的直徑為 4 cm。當小貞用掉一半的紙後，請問剩下的這捲紙的直徑最接近於什麼？



(A) 6 cm (B) 8 cm (C) 8.5 cm (D) 9 cm (E) 9.5 cm

在本題的討論中都以 cm 作為長度單位。令在小貞用掉一半的紙後，剩下的這捲紙的半徑為 r。可知初始時，紙的部分之底面的面積為 $\pi(6^2-2^2)=32\pi$，故用掉一半的紙後，剩下紙的部分之底面的面積為 16π，連同圓柱體軸心的底面面積一起來看，此時的紙捲底面的面積為 $20\pi=\pi r^2$。

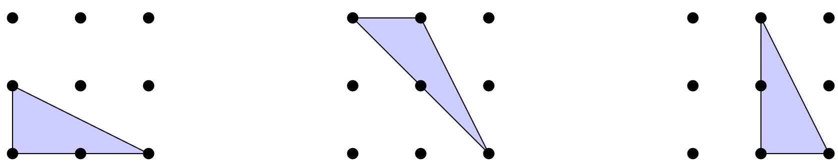


故 $r^2=20$，但 $4.5^2=20.25$ 而 $4.4^2=19.36$，所以 $4.4<r<4.5$，而直徑即為半徑的兩倍，故知所求捲紙的直徑最接近於 9 cm。

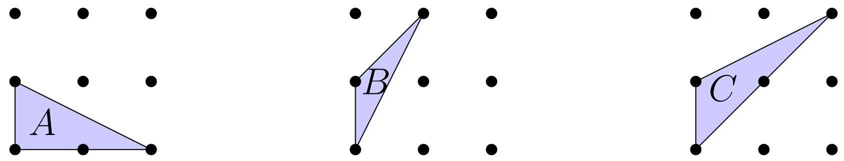
答: (D).

26. (同初級卷第 28 題)

在一個 3×3 的格子點上，可用其中 3 個點為頂點構成一些三角形，下圖為其中三個例子。在所有可能構成的三角形中，請問有多少個三角形它的三個邊長都互不相同？



在此 3×3 的格子點上，共有以下三種邊長都互不相同的三角形:



現驗證沒有其他種類邊長都互不相同的三角形。考慮這樣的三角形的最長邊。

(i) 若最長邊的長度為 $\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ 時，則這條邊一定是這一個 3×3 的格子點上的對角線，因此第三個頂點一定是在邊上但不在角落的點，此即為 C 的情況。

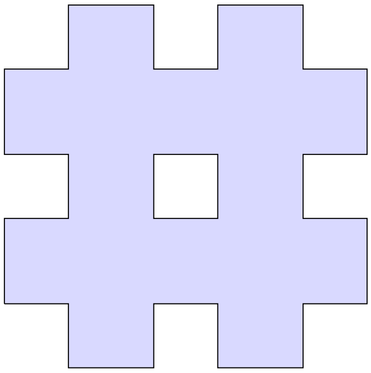
(ii) 若最長邊的長度為 $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ 時，此時另兩邊的長度只能是 1、$\sqrt{2}$ 或 2。如果是 1 與 $\sqrt{2}$，此為 B 的情況；如果是 1 與 2，此為 A 的情況；如果是 2 與 $\sqrt{2}$，此無法在 3×3 的格子點上發生。

(iii) 若最長邊的長度為 2 ，則另兩邊的長度只能是 1 與 $\sqrt{2}$，此無法在 3×3 的格子點上發生。

接著觀察旋轉及對稱的情況後可得知，因三角形 A 此類型的三角形只會發生在 2×1 的格子點內，故可推知三角形 A 這一種類型的三角形共有 16 個；而三角形 B 這一種類型的三角形也是一樣，因此共有 16 個；最後因三角形 C 此類型的三角形只會發生在 2×2 的格子點內，故可推知三角形 C 這一種類型的三角形共有 8 個。所以合計共 $16+8+16=40$ 個邊長都互不相同的三角形。

答: 40.

27. 從一個邊長為 $y\,\mathrm{cm}$ 的大正方形中，在角落、邊上與中心分別切除邊長為 $x\,\mathrm{cm}$ 的小正方形做成一個墊子，如圖所示。



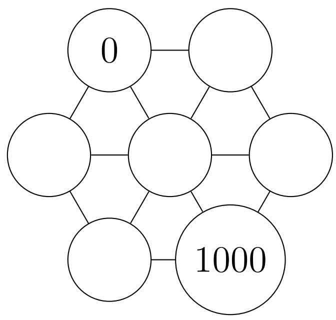
若 x 、y 都是質數，且這個墊子外圍與內圍總周長的 cm 數值等於這個墊子面積的 cm^2 數值。請問這個墊子可能的最小面積是多少 cm^2？

可知墊子外圍的周長是 $4y+8x$，內部切除的小正方形周長為 $4x$，而墊子面積為 y^2-9x^2。故由題意可知 $4y+12x=(y+3x)(y-3x)$，化簡後可得 $y-3x=4$。因此面積 $4(y+3x)$ 的最小值發生時，仍需滿足 $y-3x=4$ 且 x 、y 都是質數。另一方面，墊子面積可改寫為 $(4+3x)^2-9x^2=16+24x=4(6x+4)$。將 x 由小至大逐一代入質數檢驗。當 $x=2$ 時，$y=10$ 不為質數；當 $x=3$ 時，$y=13$ 為質數，故知面積最小值為 $88\,\mathrm{cm}^2$。

答: 88.

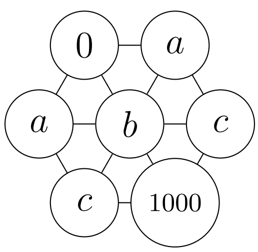
---

28. 在右圖中，每個圓圈有三個或六個相鄰的圓圈。在每個圓圈內都填入一個數，其中五個空白圓圈內所填的數都等於與它相鄰圓圈內的數之平均。請問這五個空白圓圈內所填的數之最大值是什麼？



解法 1

若填數方式為對稱的情況時，可用如圖所示之方式將 a、b、c 填入各圓:



此時，由填入 a、b、c 的各圓都是與它相鄰圓圈內的數之平均可得聯立方程組:

$$\begin{array}{rclcrcll} a &=& \frac{1}{3}(0+b+c) & \Longrightarrow & 3a &=& b+c & (1)\\ b &=& \frac{1}{6}(2a+2c+1000) & \Longrightarrow & 3b &=& a+c+500 & (2)\\ c &=& \frac{1}{3}(a+b+1000) & \Longrightarrow & 3c &=& a+b+1000 & (3) \end{array}$$

將這三式相加，可得知 $a+b+c$ 的值:

$$\begin{array}{rcll} 3a+3b+3c &=& b+c+a+c+500+a+b+1000 & \\ 3(a+b+c) &=& 2(a+b+c)+1500 & \\ a+b+c &=& 1500 & (4) \end{array}$$

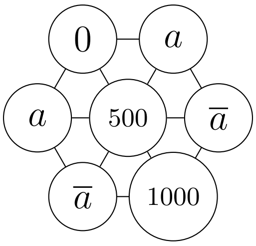
接著，依序將 (1)、(2) 及 (3) 式代入 (4) 式便可求得 a、b、c 的值:

$$\begin{array}{rclcrcl} a+(3a) &=& 1500 & \Longrightarrow & a &=& 375\\ b+(3b-500) &=& 1500 & \Longrightarrow & b &=& 500\\ (3c-1000)+c &=& 1500 & \Longrightarrow & c &=& 625 \end{array}$$

答: 625.

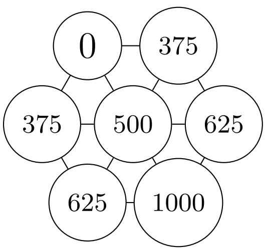
解法 2

令中間的圓所填的數為 500，且如圖所示之方式將 a、$\overline{a}$ 對稱地填入其它各圓:



其中 $\overline{a} = 1000 - a$。則可知 $3a = 500 + \overline{a} = 1500 - a$，故有 $a = 1500 \div 4 = 375$ 及 $\overline{a} = 625$.

故可得下圖的填數方式，並可驗證此滿足題意:

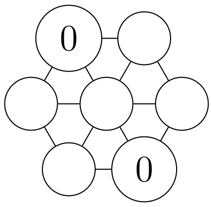


$$\begin{array}{rcccl} 0+500+625 &=& 1125 &=& 3\times 375 \ \checkmark\\ 0+2\times 375+2\times 625+1000 &=& 3000 &=& 6\times 500 \ \checkmark\\ 375+500+1000 &=& 1875 &=& 3\times 625 \ \checkmark \end{array}$$

而之所以會利用如上填數方式的動機是由觀察整體填數方式之操作而得來的。

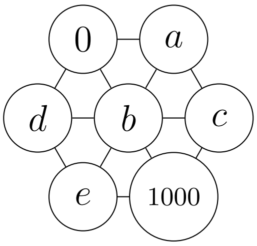
驗證: 僅有唯一的一組填數方式

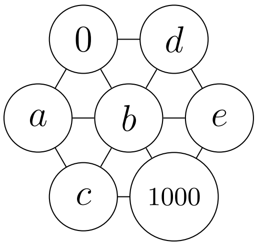
若有兩個解，則將此二個解中同一個圓所對應的值相減後所得的值，仍會滿足所要求的平均數之條件，故有

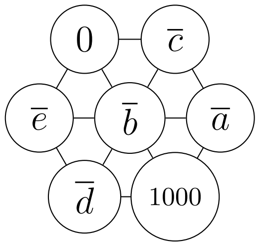


此時可判斷出，空白圓圈內的最大值要等於與它相鄰圓圈內的數之平均時，僅可能是全部的圓圈都填入 0。故知這兩個解是相同的。

所以，如果有一個解是如下圖中第一個圖所表示的五個圓所填入的數不一定是對稱的情況時，則經過以 ‘0-b-1000’ 為對稱軸 ‘反射’ 過的第二個圖仍是一個解且必與第一個圖相同。而第三個圖為作 $\overline{x} = 1000 - x$ 這樣的代數轉換後的結果，此仍是一個解且也與第一個圖相同。





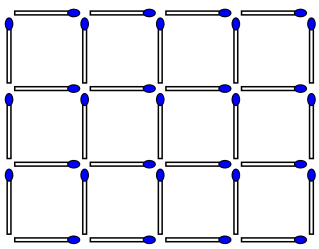


故可得 $b = \overline{b} = 500$ 及 $a = d = \overline{c} = \overline{e}$，此即為一開始所假設的情況。

答: 625.

---

29. 用 31 根火柴棒可拼出一個 3×4 的方格表，如下圖所示。我打算拼出一個 $a \times b$ 的方格表，其中 a、b 為正整數且 $a < b$。請問恰好使用 337 根火柴棒所能拼出所有方格表之面積總和是什麼？



解法 1

可知共有 $a+1$ 列、每列有 b 根排成水平線的火柴棒，以及共有 $b+1$ 行、每行有 a 根排成鉛垂線的火柴棒。故知共有 $(a+1)b+(b+1)a = 2ab+a+b$ 根火柴棒。

故可得知現要解方程 $2ab+a+b=337$，其中 $a<b$ 且都是正整數。同時將等式兩邊都乘以 2 後再都加上 1，可得

$$4ab+2a+2b+1=675 \qquad \Rightarrow \qquad (2a+1)(2b+1)=675$$

而將 675 寫成兩個因數相乘的情況有:

$$1\times 675,\quad 3\times 225,\quad 5\times 135,\quad 9\times 75,\quad 15\times 45,\quad 25\times 27$$

其中 $2a+1$ 必為乘式中較小的因數且 $2b+1$ 必為較大的因數，因此可得知解 (a,b) 為:

$$(0,337),\quad (1,112),\quad (2,67),\quad (4,37),\quad (7,22),\quad (12,13)$$

第一個解可直接刪除而其餘的解皆滿足題意，故知所能拼出所有方格表之面積總和是

$$1\times 112+2\times 67+4\times 37+7\times 22+12\times 13=704$$

答: 704.

$\boxed{\text{解法 2}}$

可知水平線上共有 $(a+1)b$ 根火柴棒而鉛垂線上共有 $a(b+1)$ 根火柴棒，因此有

$$(a+1)b+a(b+1)=2ab+a+b=337 \qquad \Longrightarrow \qquad b=\frac{337-a}{2a+1}$$

而在下表中，每一個 a 值都對應出一個 b 值與面積 ab 的值，其中僅計算出 b 值仍是正整數且 $b>a$ 的情況。

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\cdots$
b	$\frac{336}{3}$	$\frac{335}{5}$	$\frac{334}{7}$	$\frac{333}{9}$	$\frac{331}{11}$	$\frac{332}{13}$	$\frac{330}{15}$	$\frac{329}{17}$	$\frac{328}{19}$	$\frac{327}{21}$	$\frac{326}{23}$	$\frac{325}{25}$	$\frac{324}{27}$	
	112	67	$\times$	37	$\times$	$\times$	22	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	13	$\cancel{12}$	$\cdots$
ab	112	134		148			154					156		

故知所能拼出所有方格表之面積總和是 $112+134+148+154+156=704$ 平方單位。

答: 704.

30. (同高級卷第 28 題)

考慮數列 a_1、a_2、a_3、a_4、... 使得 $a_1 = 2$ 且對於每一個正整數 n，

$$a_{n+1} = a_n + p_n \qquad \text{其中 } p_n \text{ 為 } a_n \text{ 的最大質因數。}$$

這個數列的前幾項為 $2, 4, 6, 9, 12, 15, 20$。請問使得 a_n 是一個四位數的 n 之最大值是什麼？

解法 1

列出此數列的前幾項來觀察，如下表所示:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	2	4	6	9	12	15	20	25	30	35	42	49
p_n	2	2	3	3	3	5	5	5	5	7	7	7

n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
a_n	56	63	70	77	88	99	110	121	132	143	156	169
p_n	7	7	7	11	11	11	11	11	11	13	13	13

可觀察出當 p 為質數時，$a_{2p-2} = p^2$。若此觀察為真，則可得 $a_{192} = 97^2$。此時便可得到接下來的數為:

n	192	193	194	195
a_n	97^2	97×98	97×99	97×100
p_n	97	97	97	97

n	196	197	198	199
a_n	97×101	98×101	99×101	100×101
p_n	101	101	101	101

因 $a_{198} = 99 \times 101 = 9999$ 及 $a_{199} = 100 \times 101 = 10100$，故知所求為 198。

現驗證所觀察出的規則為真。假設對於質數 p，有 $a_{2p-2} = p^2$。若 q 為 p 之後下一個質數，則 $a_{2p-2} = p^2$ 之後的 $q - p$ 項為

$$p(p+1),\ p(p+2),\ p(p+3),\ \ldots,\ pq$$

注意到其中連續兩項之間的差為 p 且 p 整除每一項。事實上，從最後一項可以得知不會有比 p 更大的質數來整除其中任何一項，這是因為每一項都可寫成 pk 的形式，其中 $p < k < q$。因 k 介於連續的質數 p 與 q 之間，故它無法被比 p 更大的質數所整除。

而再接下來的 $q-p$ 項為

$$(p+1)q,\ (p+2)q,\ (p+3)q,\ \ldots,\ q^2$$

注意到其中連續兩項之間的差為 q 且 q 整除每一項。事實上，不會有比 q 更大的質數來整除其中任何一項，這是因為每一項都可寫成 kq 的形式，其中 $p<k\le q$。因 k 至多為 q ，故它無法被比 q 更大的質數所整除。

現在我們已驗證了對於質數 p，若 $a_{2p-2}=p^2$ 成立，則接下來的第 $2q-2p$ 項為 q^2。換言之，$a_{2q-2}=q^2$，其中 q 為 p 之後下一個質數。故對質數利用數學歸納法可以得知對於所有的質數 p，$a_{2p-2}=p^2$ 成立。

答: 198.

解法 2

令 $q_1,q_2,\ldots$ 依序為遞增的質數。可題意所述之數列，其中連續兩項之差恆為質數。接著可由檢驗前幾項發現當連續兩項之差改變時，該項恰為兩個連續的質數之乘積。因此若將數列中連續兩項的差當成另一個數列時，此數列為 q_m 的項數是 $q_{m+1}-q_{m-1}$。

(注意到由原數列中連續兩項之差為 q_m 所組成的各項恰是介於 $q_{m-1}q_m$ 與 q_mq_{m+1} 之間的 q_m 的倍數，因此不會被更大的質數所整除。)

將連續兩項的差構成的數列裡，差相同的項數相加，可得:

差	項數	累計
q_1	q_2-1	1
q_2	q_3-q_1	$q_3+q_2-q_1-1$
q_3	q_4-q_2	$q_4+q_3-q_1-1$
q_4	q_5-q_3	$q_5+q_4-q_1-1$
q_5	q_6-q_4	$q_6+q_5-q_1-1$

故可歸納出會在由連續兩項的差構成的數列中會在第 $q_m+q_{m+1}-2$ 項改變 q_m 之值，故有

$$a_{q_m+q_{m+1}-2}=q_m\times q_{m-1}\ 。$$

現在只要找出最大的連續兩個質數之乘積小於 10000。可知 $97\times101=9797$ 而 $101\times103>10000$，可推得 $a_{97+101-2}=a_{196}=9797$。因此知 $a_{197}=9898$、$a_{198}=9999$。

答: 198.