

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

高級卷

1-10 題，每題 3 分

1. 請問下列哪一項表達式與 $9x^{-3}$ 同義？

- (A) $\frac{-9}{x^3}$ (B) $\frac{3}{x}$ (C) $\frac{1}{9x^3}$ (D) $\frac{3}{x^3}$ (E) $\frac{9}{x^3}$
-

2. 分數 $\frac{1}{0.04}$ 之值等於

- (A) 15 (B) 20 (C) 25 (D) 40 (E) 60
-

3. 已知 $p = 9$ ， $q = -3$ ，請問 $p^2 - q^2$ 等於什麼？

- (A) 64 (B) 72 (C) 84 (D) 90 (E) 96
-

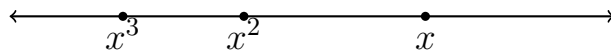
4. 一個圓的圓周長為 π 單位，請問它的面積為多少平方單位？

- (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) 2π (E) 4π
-

5. 若 $K = L + \frac{6}{R}$ 、 $L = 4$ 且 $K = 7$ ，則 R 等於

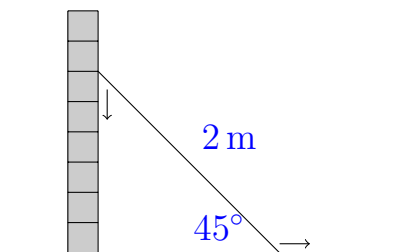
- (A) -18 (B) 1 (C) 12 (D) 8 (E) 2
-

6. 已知 x 、 x^2 、 x^3 在數線上之位置如下圖所示，請問下列哪一項可能是 x 之值？

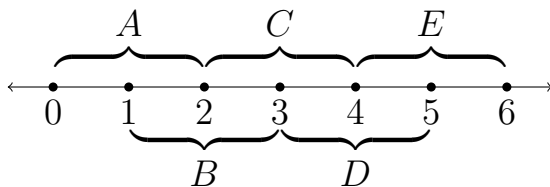


- (A) -2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) 1 (E) $\frac{3}{2}$
-

7. 一支 2 m 長的掃帚靠在一座牆上，掃帚底部與地面之夾角為 45° 。將掃帚緩慢地往下滑動，直至掃帚與地面之夾角為 30° 為止。請問掃帚的頂部向下滑動多少 m？



- (A) $\sqrt{2} - 1$ (B) $2 - \sqrt{3}$ (C) $\sqrt{3} - 1$ (D) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ (E) $2 - \sqrt{2}$
8. 將一個三角形的底增大 25%、將它的高增大 50%，請問它的面積將增大多少？
- (A) 25% (B) 50% (C) 66.6% (D) 75% (E) 87.5%
9. 在數線上畫出五個如圖所示的區間。已知數 x 落在區間 A 上，數 y 落在區間 D 上。請問數 $\frac{1}{2}(x + y + 1)$ 必定會落在哪一個區間上？

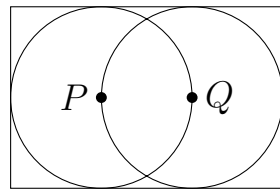


- (A) A (B) B (C) C (D) D (E) E
10. 已知 $\frac{p}{p-2q} = 3$ ，請問 $\frac{p}{q}$ 等於什麼？
- (A) -3 (B) 3 (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) 2

11-20 題，每題 4 分

11. 在某個停車場內有 3 輛 F 廠牌、4 輛 G 廠牌、2 輛 H 廠牌的汽車。若一位停車場管理員隨機從中選 2 輛汽車，請問選中的汽車都是 G 廠牌的機率是什麼？
- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{4}{27}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{4}{9}$ (E) $\frac{16}{81}$

12. 已知圓 P 與圓 Q 之圓心分別為點 P 與點 Q ，且每個圓之面積都是 10m^2 ，每個圓都與矩形的其中三條邊相切，如右圖所示。請問這個矩形的面積為多少 10m^2 ？



- (A) 20 (B) $20 - \frac{10}{\pi}$ (C) $\frac{40}{\pi}$
 (D) $\frac{50}{\pi}$ (E) $\frac{60}{\pi}$

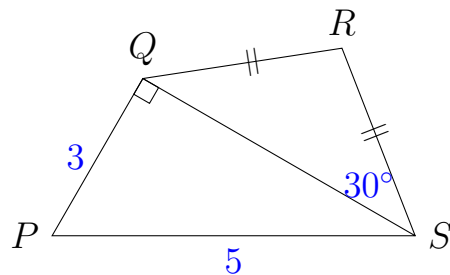
13. 請問 $\sqrt{1+2+3+4+\cdots+99+100}$ 之值介於下列哪一項的兩個數之間？

- (A) 14 與 15 (B) 25 與 26 (C) 30 與 31 (D) 71 與 72 (E) 100 與 101

14. 已知 $\frac{x-a}{x-b} = \frac{x-b}{x-a}$ 且 $a \neq b$ ，請問 x 之值是什麼？

- (A) $\frac{a-b}{2}$ (B) $\frac{a^2+b^2}{a+b}$ (C) $\frac{a^2+b^2}{2(a+b)}$ (D) $a+b$ (E) $\frac{a+b}{2}$

15. 已知 $PS = 5$ 、 $PQ = 3$ 、 $\angle QSR = 30^\circ$ 且 $QR = RS$ 、 $\triangle PQS$ 為直角三角形，其中 $\angle PQS$ 為直角，如右圖所示。請問 RS 之長是什麼？



- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2
 (D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (E) 4

16. 小柏在第一天採集了若干桶的櫻桃，之後的每一天，他都比前一天多採集 2 桶。從第一天到第 50 天他總共採集了 3250 桶。請問小柏在第 50 天採集了多少桶的櫻桃？

- (A) 66 (B) 110 (C) 114 (D) 116 (E) 120

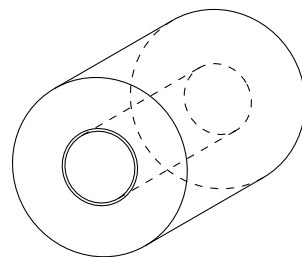
17. 一位農夫在他的牧場裡向東行走了 1km 後再向東北方向行走 1km，最後再向東行走 1km。請問這位農夫最後的位置與原出發點之距離為多少 km？

- (A) $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$ (B) $\sqrt{10}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) $2+\sqrt{2}$ (E) $\sqrt{\frac{11}{2}+2\sqrt{10}}$

18. 兩輛小汽車從同一點出發以勻速繞著一個圓周長為 600 cm 的圓移動。如果它們以同方向移動，則它們將在 20 秒後相遇，但如果它們以反方向移動，則它們將在 5 秒後相遇。請問速度較快的小汽車之移動速度為每秒多少 cm？
- (A) 60 (B) 65 (C) 70 (D) 75 (E) 85
-
19. 方程 $x^2 - kx + 374 = 0$ 有二個整數根。請問 k 有多少個可能的值？
- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 10
-
20. 給定 $f_1(x) = \frac{x}{x+1}$ 且 $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$ ，則 $f_{2014}(x)$ 等於
- (A) $\frac{x}{2014x+1}$ (B) $\frac{2014x}{2014x+1}$ (C) $\frac{x}{x+2014}$ (D) $\frac{2014x}{x+1}$ (E) $\frac{x}{2014(x+1)}$
-

21-25 題，每題 5 分

21. 我計畫從 S 市開車到 550 km 遠的 C 市，出發時我的車子有 $\frac{2}{3}$ 桶的汽油。途中，當我抵達離開 S 市 165 km 的 M 市時，我還剩下 $\frac{1}{2}$ 桶的汽油。如果我以相同的油耗量繼續行駛且不再添加油料。請問下列哪一項敘述為真？
- (A) 當我抵達 C 市時還剩下 $\frac{1}{9}$ 桶的汽油。
- (B) 當我抵達 C 市時還剩下 $\frac{1}{20}$ 桶的汽油。
- (C) 當我抵達 C 市時正好用完汽油。
- (D) 當我用完汽油時尚離 C 市 110 km。
- (E) 當我用完汽油時尚離 C 市 220 km。
-
22. 小貞有一捲紙，紙非常地薄且緊緊纏繞著一個圓柱體軸心捲成一捲，它的整體外貌如右圖所示。初始時，整捲紙的直徑為 12 cm，軸的直徑為 4 cm。當小貞用掉一半的紙後，請問剩下的這捲紙的直徑最接近於什麼？
- (A) 6 cm (B) 8 cm (C) 8.5 cm
- (D) 9 cm (E) 9.5 cm

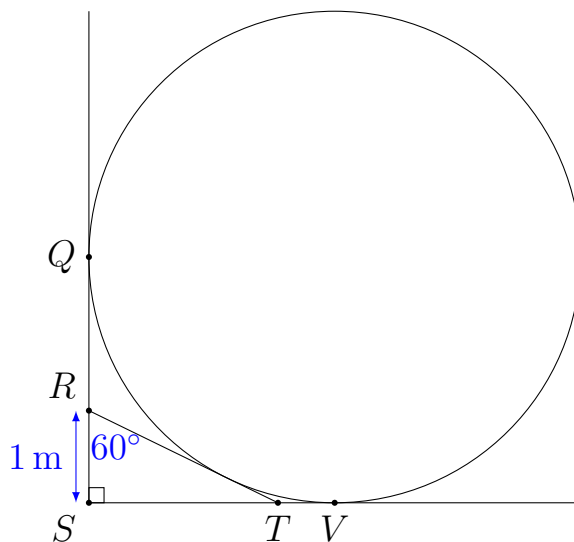


23. 在 B 鎮的每 100 位居民中，有 50 位住在每戶兩人的家庭，有 30 位住在每戶三人的家庭，有 20 位住在每戶四人的家庭。請問每戶家庭平均有多少人？

(A) 2.0 (B) 2.5 (C) 2.7 (D) 2.8 (E) 3.0

24. 在右圖中，已知 QS 、 RT 、 SV 都與圓相切，且 $\angle RST = 90^\circ$ 、 $\angle SRT = 60^\circ$ ，又知 RS 之長度為 1 m。請問此圓的直徑為多少 m？

(A) $3 + \sqrt{3}$ (B) 4 (C) $2\sqrt{3} + 2$
 (D) $3\sqrt{3}$ (E) $\frac{9}{2}$



25. 數列

$$2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, \dots$$

之定義為對於所有正整數 n ， $a_1 = 2$ 且 $a_{n+1} = 2^{a_n}$ 。請問下列哪一項是數值大於 1000^{1000} 的第一個項？

(A) $a_4 = 2^{2^{2^2}}$ (B) $a_5 = 2^{2^{2^{2^2}}}$ (C) $a_6 = 2^{2^{2^{2^{2^2}}}}$ (D) $a_7 = 2^{2^{2^{2^{2^{2^2}}}}}$
 (E) $a_8 = 2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^2}}}}}}$

問題 26-30 的答案為 000-999 之間的整數，

請將答案填在答案卡上對應的位置。

第 26 題占 6 分，第 27 題占 7 分，第 28 題占 8 分，

第 29 題占 9 分，第 30 題占 10 分。

26. 有一個三位數，它等於個位數碼的立方、十位數碼的平方與百位數碼之總和。請問滿足此性質的最大三位數是什麼？

27. 小尹打算造一個五個字母的密碼。為了使它們易讀，他根據以下兩條規則：

(i) 不可以有超過兩個子音或超過兩個母音相連在一起。

(ii) 字的開頭或結尾都不可以是兩個子音。

由於‘Q’太難念，所以棄之不用。因此他有 20 個子音與 5 個母音可供選擇。若他共可造出 N 個可能的密碼，請問 N 的首三位數是什麼？

28. 考慮數列 $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ 使得 $a_1 = 2$ 且對於每一個正整數 n ,

$$a_{n+1} = a_n + p_n \quad \text{其中 } p_n \text{ 為 } a_n \text{ 的最大質因數。}$$

這個數列的前幾項為 2, 4, 6, 9, 12, 15, 20。請問使得 a_n 是一個四位數的 n 之最大值是什麼？

29. 在平面座標上兩個座標都是整數的點稱之為**格子點**。考慮一個三角形它的三個頂點座標為 $(0, 0)$ 、 $(a, 0)$ 、 $(0, b)$ 的格子點，其中 $a \geq b > 0$ 。假設這個三角形的內部恰好有 74 個格子點（不包含在三角形邊上的格子點）。請問所有這樣的三角形之面積總和是什麼？

30. 一個多項式 $p(x)$ 若具有整係數且 $p(100) = 100$ ，則稱之為**自我中心的**。已知 $p(x)$ 為一個自我中心的多項式，請問方程 $p(k) = k^3$ 的整數解最多有幾個？