1 高級卷參考解答

1. 請問下列哪一項表達式與 $9x^{-3}$ 同義？

(A) $\frac{-9}{x^3}$ (B) $\frac{3}{x}$ (C) $\frac{1}{9x^3}$ (D) $\frac{3}{x^3}$ (E) $\frac{9}{x^3}$

$9x^{-3} = 9 \times \frac{1}{x^3} = \frac{9}{x^3}$,

答: (E).

---

2. (**同初級卷第 5 題**)

分數 $\frac{1}{0.04}$ 之值等於

(A) 15 (B) 20 (C) 25 (D) 40 (E) 60

$\frac{1}{0.04} = \frac{1 \times 100}{0.04 \times 100} = \frac{100}{4} = 25$,

答: (C).

---

3. (**同中級卷第 3 題**)

已知 $p = 9$， $q = -3$，請問 $p^2 - q^2$ 等於什麼？

(A) 64 (B) 72 (C) 84 (D) 90 (E) 96

$p^2 = 81$ 且 $q^2 = 9$，故知 $p^2 - q^2 = 81 - 9 = 72$。

答: (B).

---

4. 一個圓的圓周長為 π 單位，請問它的面積為多少平方單位？

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) 2π (E) 4π

因圓周長為 $2\pi r = \pi$，故可得 $r = \frac{1}{2}$。所以圓面積 $A = \pi r^2 = \frac{\pi}{4}$。

答: (A).

---

5. 若 $K = L + \frac{6}{R}$ 、$L = 4$ 且 $K = 7$，則 R 等於

(A) -18 (B) 1 (C) 12 (D) 8 (E) 2

$7 = 4 + \frac{6}{R}$ 故 $\frac{6}{R} = 3$ ，即 $R = 2$,

答: (E).

---

6. 已知 x、x^2、x^3 在數線上之位置如下圖所示，請問下列哪一項可能是 x 之值？

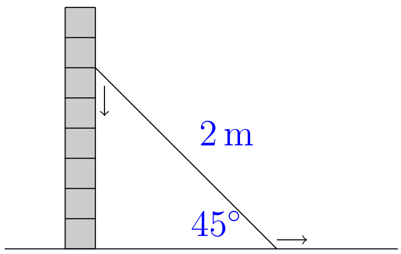
(A) -2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) 1 (E) $\frac{3}{2}$

由 $0 < x^2 < x$ 可知 x 為正數且 $x < 1$。故選項中可能的解為 $x = \frac{3}{4}$，此時 $x^3 = \frac{27}{64}$、$x^2 = \frac{9}{16} = \frac{36}{64}$ 及 $x = \frac{3}{4} = \frac{48}{64}$

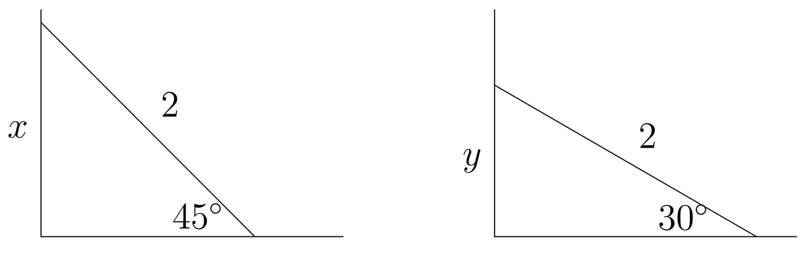
答: (C).

---

7. 一支 2 m 長的掃帚靠在一座牆上，掃帚底部與地面之夾角為 45°。將掃帚緩慢地往下滑動，直至掃帚與地面之夾角為 30° 為止。請問掃帚的頂部向下滑動多少 m ？



(A) $\sqrt{2}-1$ (B) $2-\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{3}-1$ (D) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (E) $2-\sqrt{2}$



在滑動前，可知 $\frac{x}{2} = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ，因此 $x = \sqrt{2}$。在滑動後，可知 $\frac{y}{2} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ，因此 $y = 1$。故 $x - y = \sqrt{2} - 1$。

答: (A).

---

8. 將一個三角形的底增大 25%、將它的高增大 50%，請問它的面積將增大多少？

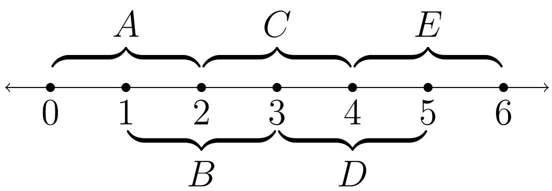
(A) 25% (B) 50% (C) $66.\dot{6}\%$ (D) 75% (E) 87.5%

利用三角形的面積公式 $A=\frac{1}{2}bh$。將三角形如題意增大後，底的長度 b 之值會乘以 $\frac{5}{4}$ 而高的長度 h 之值會乘以 $\frac{3}{2}$。故整體來看，A 之值會乘以 $\frac{5}{4}\times\frac{3}{2}=\frac{15}{8}=1.875$，此即增大了 87.5%。

答: (E).

---

9. 在數線上畫出五個如圖所示的區間。已知數 x 落在區間 A 上，數 y 落在區間 D 上。請問數 $\frac{1}{2}(x+y+1)$ 必定會落在哪一個區間上？



(A) A　(B) B　(C) C　(D) D　(E) E

可知 $x+y+1$ 大於 $0+3+1=4$ 且小於 $2+5+1=8$，故 $\frac{1}{2}(x+y+1)$ 介於 2 與 4 之間。

答: (C).

---

10. 已知 $\dfrac{p}{p-2q}=3$ ，請問 $\dfrac{p}{q}$ 等於什麼？

(A) -3　(B) 3　(C) $\frac{1}{3}$　(D) $\frac{2}{3}$　(E) 2

因 $p=3(p-2q)$，所以 $6q=2p$ 且 $p=3q$。因此 $\frac{p}{q}=3$。

答: (B).

---

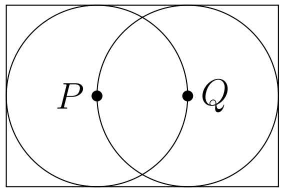
11. 在某個停車場內有 3 輛 F 廠牌、4 輛 G 廠牌、2 輛 H 廠牌的汽車。若一位停車場管理員隨機從中選 2 輛汽車，請問選中的汽車都是 G 廠牌的機率是什麼？

(A) $\frac{1}{4}$　(B) $\frac{4}{27}$　(C) $\frac{1}{6}$　(D) $\frac{4}{9}$　(E) $\frac{16}{81}$

可知第一輛車挑中 G 廠牌的機率為 $\frac{4}{9}$，接著挑選第二輛車挑中 G 廠牌的機率為 $\frac{3}{8}$。因此選中的兩輛汽車都是 G 廠牌的機率是 $\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{6}$。

答: (C).

12. 已知圓 P 與圓 Q 之圓心分別為點 P 與點 Q，且每個圓之面積都是 $10\,\text{m}^2$，每個圓都與矩形的其中三條邊相切，如右圖所示。請問這個矩形的面積為多少 $10\,\text{m}^2$？



(A) 20 (B) $20-\frac{10}{\pi}$ (C) $\frac{40}{\pi}$ (D) $\frac{50}{\pi}$ (E) $\frac{60}{\pi}$

若兩個圓的半徑都是 r 時，則有 $\pi r^2=10$ ，此即 $r^2=\frac{10}{\pi}$。故矩形的面積為 $3r\times 2r=6r^2=\frac{60}{\pi}$。

答: (E).

---

13. 請問 $\sqrt{1+2+3+4+\cdots+99+100}$ 之值介於下列哪一項的兩個數之間？

(A) 14 與 15 (B) 25 與 26 (C) 30 與 31 (D) 71 與 72 (E) 100 與 101

令所求之值為 x，則有 $x^2=1+2+3+\cdots+99+100=50\times(1+100)=5050$ ，因此 $x=\sqrt{5050}$。現因 $\sqrt{4900}=70$ 且 $\sqrt{6400}=80$，故可判斷出 x 之值較為靠近 70。經驗算可知 $71^2=5041$ 及 $72^2=5184$。

答: (D).

---

14. 已知 $\frac{x-a}{x-b}=\frac{x-b}{x-a}$ 且 $a\neq b$，請問 x 之值是什麼？

(A) $\frac{a-b}{2}$ (B) $\frac{a^2+b^2}{a+b}$ (C) $\frac{a^2+b^2}{2(a+b)}$ (D) $a+b$ (E) $\frac{a+b}{2}$

解法 1

將等式作交叉相乘後，可得一個等價的等式，解此等式可得:

$$(x-a)^2=(x-b)^2$$
$$-2ax+a^2=-2bx+b^2$$
$$x=\frac{a^2-b^2}{2(a-b)}=\frac{a+b}{2}$$

其中因已知 $a\neq b$，故上述最後一步運算可作約分的運算。

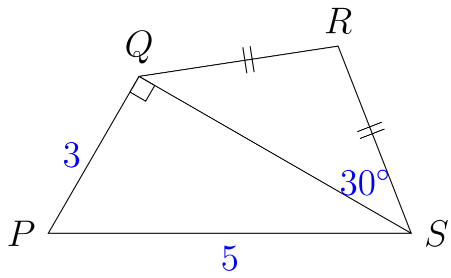
答: (E).

$\boxed{\text{解法 2}}$

令 $u=\dfrac{x-a}{x-b}$ 且因 $a\neq b$，故有 $u\neq 1$ 且 $u=\dfrac{1}{u}$。所以 $u^2=1$ ，即有 $u=-1$。因此可得知 $x-a=-(x-b)$ ，此即 $2x=a+b$，故 $x=\dfrac{a+b}{2}$。

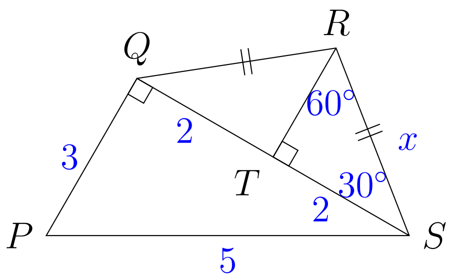
答: (E).

15. 已知 $PS=5$、$PQ=3$、$\angle QSR=30^\circ$ 且 $QR=RS$、$\triangle PQS$ 為直角三角形，其中 $\angle PQS$ 為直角，如右圖所示。請問 RS 之長是什麼？



(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ (E) 4

在直角三角形 $\triangle PQS$ 中，由勾股定理可以得知 $QS=4$。因 $\triangle QRS$ 為等腰三角形，故可再推知底邊上的高 RT 平分 QS。



此時可知 $\triangle SRT$ 是一個三個內角為 30°、60°、90° 的三角形，所以邊長比 $RT:RS:ST=1:2:\sqrt{3}$ ，因此 $x=RS=\dfrac{2}{\sqrt{3}}ST=\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$。

答: (D).

評註

另一個得到此結論的方法為利用三角函數:

$$x=\frac{2}{\cos 30^\circ}=\frac{4}{\sqrt{3}}\,.$$

16. 小柏在第一天採集了若干桶的櫻桃，之後的每一天，他都比前一天多採集 2 桶。從第一天到第 50 天他總共採集了 3250 桶。請問小柏在第 50 天採集了多少桶的櫻桃？

(A) 66 (B) 110 (C) 114 (D) 116 (E) 120

解法 1

令小柏在第一天採集了 n 桶的櫻桃。則知他第二天採集了 $n+2$ 桶的櫻桃，第三天採集了 $n+4$ 桶的櫻桃，餘此類推，可得知他第 50 天採集了 $n+98$ 桶的櫻桃。將這些代數式相加，可得知

$$\begin{aligned} 3250 &= \frac{50}{2}(n+(n+98)) \\ &= 50n+2450 \end{aligned}$$

故知 $n=(3250-2450)\div 50=16$ 且有 $n+98=114$。

答: (C).

解法 2

可知小柏平均每天採集了 $3250\div 50=65$ 桶的櫻桃。而他從第 1 天到第 50 天穩定地增加採集數量，直到第 50 天比第 1 天多採集了 98 桶的櫻桃。故可得知他在第 1 天採集了 $65-49=16$ 桶的櫻桃而第 50 天採集了 $65+49=114$ 桶的櫻桃。

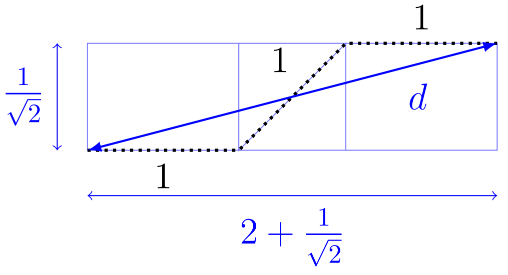
答: (C).

---

17. 一位農夫在他的牧場裡向東行走了 1 km 後再向東北方向行走 1 km，最後再向東行走 1 km。請問這位農夫最後的位置與原出發點之距離為多少 km？

(A) $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$ (B) $\sqrt{10}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) $2+\sqrt{2}$ (E) $\sqrt{\frac{11}{2}+2\sqrt{10}}$

令這位農夫最後的位置與原出發點之距離為 d km。則由圖示可得



$$\begin{aligned} d^2 &= \left(2+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= 4+\tfrac{4}{\sqrt{2}}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2} \\ &= 5+2\sqrt{2} \\ d &= \sqrt{5+2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

答: (A).

18. 兩輛小汽車從同一點出發以勻速繞著一個圓周長為 600 cm 的圓移動。如果它們以同方向移動，則它們將在 20 秒後相遇，但如果它們以反方向移動，則它們將在 5 秒後相遇。請問速度較快的小汽車之移動速度為每秒多少 cm ？

(A) 60 (B) 65 (C) 70 (D) 75 (E) 85

令速度較快的小汽車之移動速度為每秒 v cm，另一輛小汽車為每秒 w cm。則由題意可知

$$5v + 5w = 600 \qquad 且 \qquad 20v - 20w = 600.$$

因此

$$v + w = 120 \qquad 且 \qquad v - w = 30,$$

故有 $2v = 150$ ，此即 $v = 75$。

答: (D).

19. 方程 $x^2 - kx + 374 = 0$ 有二個整數根。請問 k 有多少個可能的值？

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 10

令這兩個整數根分別為 α 與 β，則利用根與係數的關係知 $\alpha\beta = 374$ 及 $\alpha + \beta = k$，因此 α 與 β 同時為正或同時為負。因 374 的質因數分解式為 $374 = 2 \times 11 \times 17$ 且 α 與 β 都是整數，故可得以下的解:

α, β	k
$1, 374$	375
$2, 187$	189
$11, 34$	45
$17, 22$	39
$-1, -374$	-375
$-2, -187$	-189
$-11, -34$	-45
$-17, -22$	-39

故知 k 有 8 個可能的值。

答: (D).

20. 給定 $f_1(x) = \dfrac{x}{x+1}$ 且 $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$， 則 $f_{2014}(x)$ 等於

(A) $\dfrac{x}{2014x+1}$ (B) $\dfrac{2014x}{2014x+1}$ (C) $\dfrac{x}{x+2014}$ (D) $\dfrac{2014x}{x+1}$ (E) $\dfrac{x}{2014(x+1)}$

解法 1

$$f_2(x) = f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1} = \frac{x}{x+x+1} = \frac{x}{2x+1}$$

$$f_3(x) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1} = \frac{x}{x+2x+1} = \frac{x}{3x+1}$$

故利用數學歸納法，可得知

$$f_n(x) = \frac{x}{nx+1} \Longrightarrow f_{n+1}(x) = \frac{\frac{x}{nx+1}}{\frac{x}{nx+1}+1} = \frac{x}{x+nx+1} = \frac{x}{(n+1)x+1},$$

因此 $f_{2014}(x) = \dfrac{x}{2014x+1}$。

答: (A).

解法 2

觀察 $\dfrac{1}{f_n(x)}$。

$$\frac{1}{f_1(x)} = 1 + \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{f_{n+1}(x)} = f_1(f_n(x)) = 1 + \frac{1}{f_n(x)}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{f_{2014}(x)} = 1 + \frac{1}{f_{2013}(x)} = 2 + \frac{1}{f_{2012}(x)} = \cdots$$

$$\cdots = 2013 + \frac{1}{f_1(x)} = 2014 + \frac{1}{x} = \frac{2014x+1}{x}$$

因此 $f_{2014}(x) = \dfrac{x}{2014x+1}$。

答: (A).

21. (**同中級卷第 23 題**)

我計畫從 S 市開車到 550 km 遠的 C 市，出發時我的車子有 $\frac{2}{3}$ 桶的汽油。途中，當我抵達離開 S 市 165 km 的 M 市時，我還剩下 $\frac{1}{2}$ 桶的汽油。如果我以相同的油耗量繼續行駛且不再添加油料。請問下列哪一項敘述為真？

(A) 當我抵達 C 市時還剩下$\frac{1}{9}$ 桶的汽油。

(B) 當我抵達 C 市時還剩下$\frac{1}{20}$ 桶的汽油。

(C) 當我抵達 C 市時正好用完汽油。

(D) 當我用完汽油時尚離 C 市 110 km。

(E) 當我用完汽油時尚離 C 市 220 km。

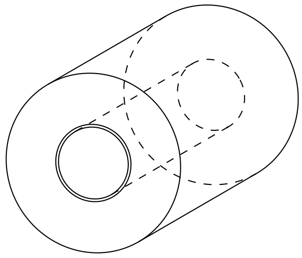
可知行駛 165 km 會用去 $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ 桶的汽油，因此若加滿油時，總共可以行駛 $6\times 165=990\,\text{km}$，即抵達 C 市時共使用了 $550\div 990=\frac{5}{9}$ 桶的汽油。但實際上我出發時僅有 $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$ 桶的汽油，故當我抵達 C 市時還剩下 $\frac{1}{9}$ 桶的汽油。

答: (A).

---

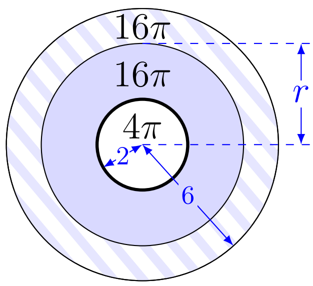
22. (**同中級卷第 25 題**)

小貞有一捲紙，紙非常地薄且緊緊纏繞著一個圓柱體軸心捲成一捲，它的整體外貌如右圖所示。初始時，整捲紙的直徑為 12 cm，軸的直徑為 4 cm。當小貞用掉一半的紙後，請問剩下的這捲紙的直徑最接近於什麼？



(A) 6 cm (B) 8 cm (C) 8.5 cm (D) 9 cm (E) 9.5 cm

在本題的討論中都以 cm 作為長度單位。令在小貞用掉一半的紙後，剩下的這捲紙的半徑為 r。可知初始時，紙的部分之底面的面積為 $\pi(6^2-2^2)=32\pi$，故用掉一半的紙後，剩下紙的部分之底面的面積為 16π，連同圓柱體軸心的底面面積一起來看，此時的紙捲底面的面積為 $20\pi=\pi r^2$。



故 $r^2=20$，但 $4.5^2=20.25$ 而 $4.4^2=19.36$，所以 $4.4<r<4.5$，而直徑即為半徑的兩倍，故知所求捲紙的直徑最接近於 9 cm。

答: (D).

---

23. 在 B 鎮的每 100 位居民中，有 50 位住在每戶兩人的家庭，有 30 位住在每戶三人的家庭，有 20 位住在每戶四人的家庭。請問每戶家庭平均有多少人？

(A) 2.0 (B) 2.5 (C) 2.7 (D) 2.8 (E) 3.0

$\boxed{\text{解法 1}}$

假設 B 鎮中共有 N 位居民。則知

(i) $0.5N$ 位居民住在每戶兩人的家庭，即此情況有 $\frac{0.5N}{2} = 0.25N$ 戶家庭。

(ii) $0.3N$ 位居民住在每戶三人的家庭，即此情況有 $\frac{0.3N}{3} = 0.1N$ 戶家庭。

(iii) $0.2N$ 位居民住在每戶四人的家庭，即此情況有 $\frac{0.2N}{4} = 0.05N$ 戶家庭。

合計在 B 鎮有 $0.4N$ 戶家庭，故平均每戶家庭有 $N \div 0.4N = 2.5$ 人。

答: (B).

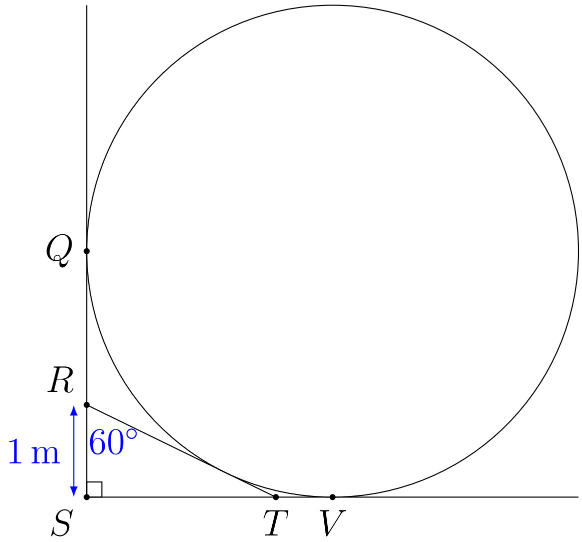
解法 2

可知對於每 100 位居民來說，共有 $\frac{50}{2} + \frac{30}{3} + \frac{20}{4} = 40$ 戶家庭，因此平均每戶家庭有 $100 \div 40 = 2.5$ 人。

答: (B).

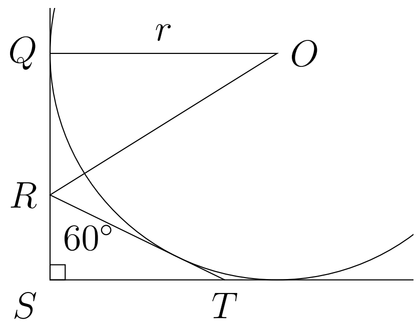
24. 在右圖中，已知 QS、RT、SV 都與圓相切，且 $\angle RST = 90^\circ$、$\angle SRT = 60^\circ$，又知 RS 之長度為 $1\,\mathrm{m}$。請問此圓的直徑為多少 m？

(A) $3+\sqrt{3}$ (B) 4 (C) $2\sqrt{3}+2$ (D) $3\sqrt{3}$ (E) $\frac{9}{2}$



解法 1

令圓的半徑為 r m，並如圖所示之方式標示各點:

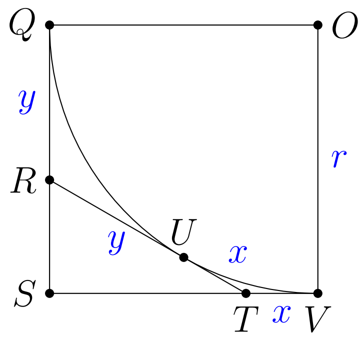


可知 RO 平分 $\angle QRT=120^\circ$，因此 $\angle QRO=60^\circ$ 且 $r=QO=\sqrt{3}RQ$。所以

$$\begin{aligned}SQ &= SR+RQ\\ r &= 1+\frac{1}{\sqrt{3}}r\\ (\sqrt{3}-1)r &= \sqrt{3}\\ 2r &= \sqrt{3}(\sqrt{3}+1)=3+\sqrt{3},\end{aligned}$$

答: (A).

$\boxed{\text{解法 2}}$

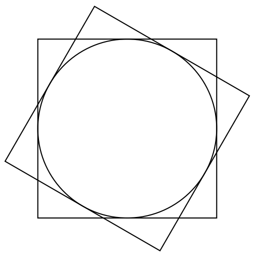


在圖中，可知點 T 至經過點 T 的兩條切線上的切點之距離皆為 x，而點 R 至經過點 R 的兩條切線上的切點之距離皆為 y。而 $\triangle RST$ 的周長為 $3+\sqrt{3}$，可判斷出此即為 $QS+SV=2r$，也就是所求之圓的直徑。

答: (A).

$\boxed{\text{解法 3}}$

如圖所示之方式，畫出兩個以此圓為內切圓的正方形:



此時可得 8 個邊長分別為 1、$\sqrt{3}$ 與 2 的三角形。因此可以得知正方形的邊長為 $1+\sqrt{3}+2$，此即為圓的直徑。

答: (A).

---

25. 數列

$$2\ ,\ 2^2\ ,\ 2^{2^2}\ ,\ 2^{2^{2^2}}\ ,\ldots$$

之定義為對於所有正整數 n，$a_1=2$ 且 $a_{n+1}=2^{a_n}$。請問下列哪一項是數值大於 1000^{1000} 的第一個項？

(A) $a_4=2^{2^{2^2}}$　(B) $a_5=2^{2^{2^{2^2}}}$　(C) $a_6=2^{2^{2^{2^{2^2}}}}$　(D) $a_7=2^{2^{2^{2^{2^{2^2}}}}}$

(E) $a_8=2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^2}}}}}}$

所求即為 $a_n > 1000^{1000} = 10^{3000}$。已知 $a_1 = 2$、$a_2 = 2^2 = 4$、$a_3 = 2^4 = 16$ 與 $a_4 = 2^{16} = 65536$，皆小於 10^{3000}。而因 $2^{10} = 1024 > 10^3$，故可估計 a_5:

$$a_5 = 2^{65536} = (2^{10})^{6553}\,2^6 > (10^3)^{6553}\,2^6 = 64 \times 10^{19659}$$

此數即大於 10^{3000}。

答: (B).

26. (**同初級卷第 30 題**)

有一個三位數，它等於個位數碼的立方、十位數碼的平方與百位數碼之總和。請問滿足此性質的最大三位數是什麼？

$\boxed{\text{解法 1}}$

令這一個三位數為 $\overline{abc}$。則

$$\begin{aligned} 100a + 10b + c &= a + b^2 + c^3 \\ 99a + 10b - b^2 &= c(c^2 - 1) \\ 99a + b(10 - b) &= (c-1)c(c+1) \end{aligned}$$

現考慮所有的可能，如表所示:

$99a$	$b(10-b)$	$(c-1)c(c+1)$
$99 \times 1 = 99$	$1 \times 9 = 9$	$1 \times 2 \times 3 = 6$
$99 \times 2 = 198$	$2 \times 8 = 16$	$2 \times 3 \times 4 = 24$
$99 \times 3 = 297$	$3 \times 7 = 21$	$3 \times 4 \times 5 = 60$
$99 \times 4 = 396$	$4 \times 6 = 24$	$4 \times 5 \times 6 = 120$
$99 \times 5 = 495$	$5 \times 5 = 25$	$5 \times 6 \times 7 = 210$
$99 \times 6 = 594$	$6 \times 4 = 24$	$6 \times 7 \times 8 = 336$
$99 \times 7 = 693$	$7 \times 3 = 21$	$7 \times 8 \times 9 = 504$
$99 \times 8 = 792$	$8 \times 2 = 16$	$8 \times 9 \times 10 = 720$
$99 \times 9 = 891$	$9 \times 1 = 9$	

觀察 $99a + b(10-b) = (c-1)c(c+1)$ 所有可能的情況，我們可得兩個滿足題意的情況：

$99 + 21 = 120 \Longrightarrow a = 1,\ b = 3 \text{ or } 7, c = 5 \Longrightarrow n = 135 \text{ or } n = 175.$

$495 + 9 = 504 \Longrightarrow a = 5,\ b = 1 \text{ or } 9, c = 8 \Longrightarrow n = 518 \text{ or } n = 598.$

故可得知共有四個三位數滿足題意，其中最大的數為 598。

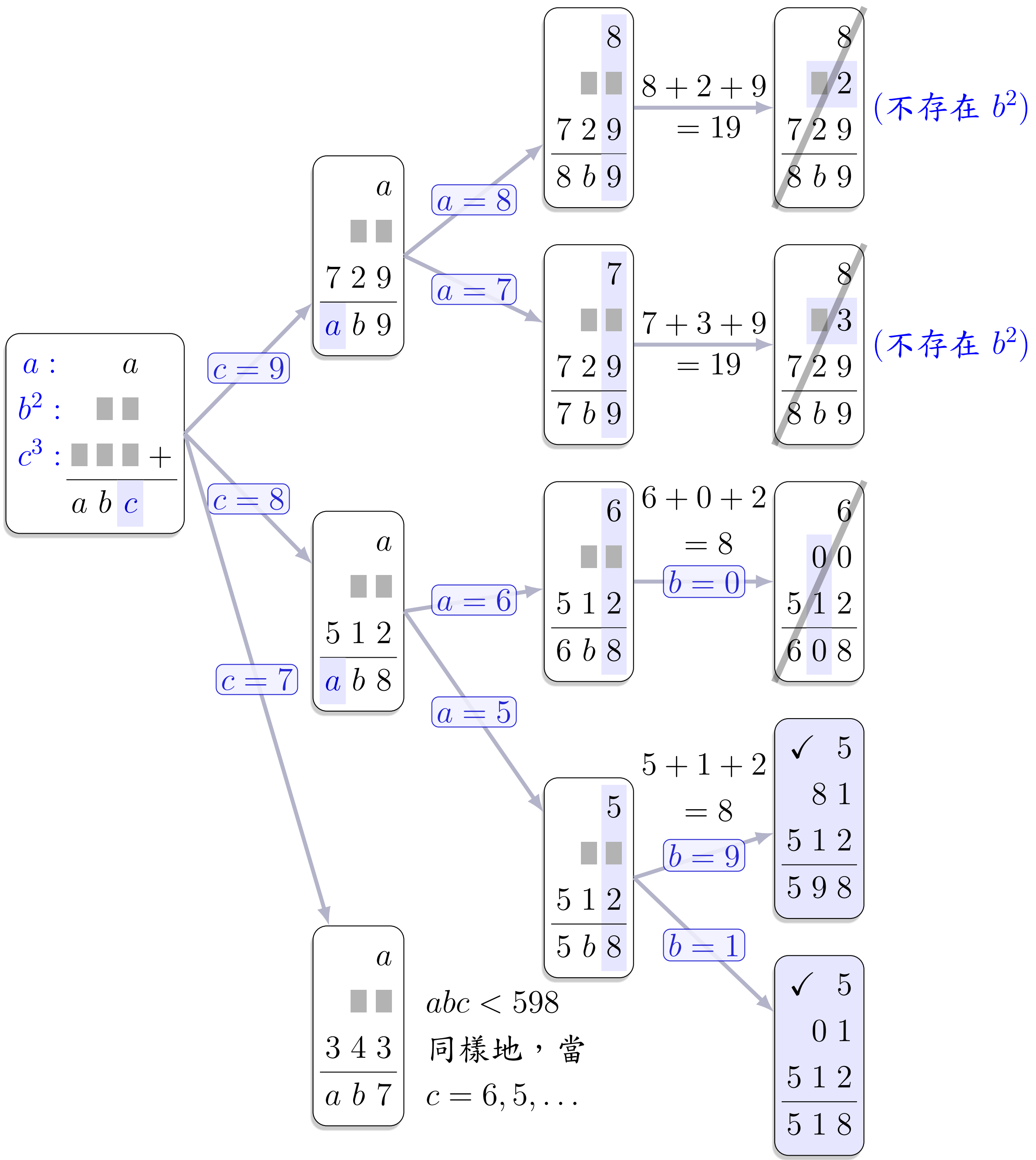
答: 598.

解法 2

可知 $\overline{abc}$ 等於 $a+b^2+c^3$，而 b^2 與 c^3 的可能值為:

數碼	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
平方	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
立方	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729

接著我們將 c 值由大到小代入加式中逐一檢驗，並再代入 a 值與 b 值，可得以下樹狀圖：



此時可發現最大值為 598 ，而 $c=7$、$c=6$、...、$c=1$ 時所得到的值皆小於此數。

答: 598.

27. 小尹打算造一個五個字母的密碼。為了使它們易讀，他根據以下兩條規則：

(i) 不可以有超過兩個子音或超過兩個母音相連在一起。

(ii) 字的開頭或結尾都不可以是兩個子音。

由於 'Q' 太難念，所以棄之不用。因此他有 20 個子音與 5 個母音可供選擇。若他共可造出 N 個可能的密碼，請問 N 的首三位數是什麼？

解法 1

首先觀察子音 (C) 與母音 (V) 有多少種滿足條件的排列方式:

若為三個子音與二個母音時 (3C2V): CVCCV, CVCVC, VCCVC.

若為二個子音與三個母音時 (2C3V): CVCVV, CVVCV, VCCVV, VCVCV, VCVVC, VVCCV, VVCVC.

若為一個子音與四個母音時 (1C4V): VVCVV.

對於 3C2V 的情況來說，每一個排列方式都有 $20^3 \times 5^2$ 個密碼；對於 2C3V 的情況來說，每一個排列方式都有 $20^2 \times 5^3$ 個密碼；對於 4C1V 的情況來說，每一個排列方式都有 20×5^4 個密碼。因此共可造出的密碼總數為

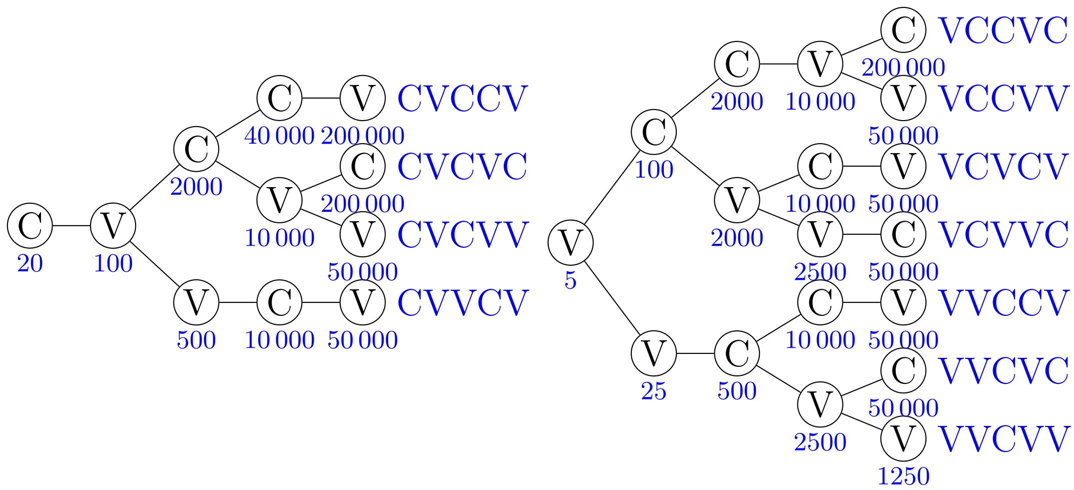
$$\begin{aligned} & 3 \times 20^3 \times 5^2 + 7 \times 20^2 \times 5^3 + 20 \times 5^4 \\ = & \ 3 \times 20 \times 100^2 + 7 \times 5 \times 100^2 + 125 \times 100 \\ = & \ 962500 \end{aligned}$$

即 N 的首三位數是 962。

答: 962.

解法 2

以下的樹狀圖表示在一個密碼字母後接續的字母是子音 (C) 或母音 (V) 的組合，下面的數目代表該組合的總數



由此可得知共可造出的密碼總數為

$3 \times 200\,000 + 7 \times 50\,000 + 12500 = 962500$ 即 N 的首三位數是 962。

答: 962.

---

28. (**同中級卷第 30 題**)

考慮數列 a_1、a_2、a_3、a_4、$\ldots$ 使得 $a_1 = 2$ 且對於每一個正整數 n，

$$a_{n+1} = a_n + p_n \qquad \text{其中 } p_n \text{ 為 } a_n \text{ 的最大質因數。}$$

這個數列的前幾項為 $2, 4, 6, 9, 12, 15, 20$。請問使得 a_n 是一個四位數的 n 之最大值是什麼？

解法 1

列出此數列的前幾項來觀察，如下表所示:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	2	4	6	9	12	15	20	25	30	35	42	49
p_n	2	2	3	3	3	5	5	5	5	7	7	7

n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
a_n	56	63	70	77	88	99	110	121	132	143	156	169
p_n	7	7	7	11	11	11	11	11	11	13	13	13

可觀察出當 p 為質數時，$a_{2p-2} = p^2$。若此觀察為真，則可得 $a_{192} = 97^2$。此時便可得到接下來的數為:

n	192	193	194	195
a_n	97^2	97×98	97×99	97×100
p_n	97	97	97	97

n	196	197	198	199
a_n	97×101	98×101	99×101	100×101
p_n	101	101	101	101

因 $a_{198}=99\times101=9999$ 及 $a_{199}=100\times101=10100$，故知所求為 198。

現驗證所觀察出的規則為真。假設對於質數 p，有 $a_{2p-2}=p^2$。若 q 為 p 之後下一個質數，則 $a_{2p-2}=p^2$ 之後的 $q-p$ 項為

$$p(p+1),\ p(p+2),\ p(p+3),\ \ldots,\ pq$$

注意到其中連續兩項之間的差為 p 且 p 整除每一項。事實上，從最後一項可以得知不會有比 p 更大的質數來整除其中任何一項，這是因為每一項都可寫成 pk 的形式，其中 $p<k<q$。因 k 介於連續的質數 p 與 q 之間，故它無法被比 p 更大的質數所整除。

而再接下來的 $q-p$ 項為

$$(p+1)q,\ (p+2)q,\ (p+3)q,\ \ldots,\ q^2$$

注意到其中連續兩項之間的差為 q 且 q 整除每一項。事實上，不會有比 q 更大的質數來整除其中任何一項，這是因為每一項都可寫成 kq 的形式，其中 $p<k\le q$。因 k 至多為 q ，故它無法被比 q 更大的質數所整除。

現在我們已驗證了對於質數 p，若 $a_{2p-2}=p^2$ 成立，則接下來的第 $2q-2p$ 項為 q^2。換言之，$a_{2q-2}=q^2$，其中 q 為 p 之後下一個質數。故對質數利用數學歸納法可以得知對於所有的質數 p，$a_{2p-2}=p^2$ 成立。

答: 198.

$\boxed{\text{解法 2}}$

令 $q_1,q_2,\ldots$ 依序為遞增的質數。可題意所述之數列，其中連續兩項之差恆為質數。接著可由檢驗前幾項發現當連續兩項之差改變時，該項恰為兩個連續的質數之乘積。因此若將數列中連續兩項的差當成另一個數列時，此數列為 q_m 的項數是 $q_{m+1}-q_{m-1}$。

(注意到由原數列中連續兩項之差為 q_m 所組成的各項恰是介於 $q_{m-1}q_m$ 與 q_mq_{m+1} 之間的 q_m 的倍數，因此不會被更大的質數所整除。)

將連續兩項的差構成的數列裡，差相同的項數相加，可得:

差	項數	累計
q_1	q_2-1	1
q_2	q_3-q_1	$q_3+q_2-q_1-1$
q_3	q_4-q_2	$q_4+q_3-q_1-1$
q_4	q_5-q_3	$q_5+q_4-q_1-1$
q_5	q_6-q_4	$q_6+q_5-q_1-1$

故可歸納出會在由連續兩項的差構成的數列中會在第 $q_m+q_{m+1}-2$ 項改變 q_m 之值，故有

$$a_{q_m+q_{m+1}-2}=q_m\times q_{m-1}\ 。$$

現在只要找出最大的連續兩個質數之乘積小於 10000。可知 $97\times 101=9797$ 而 $101\times 103>10000$，可推得 $a_{97+101-2}=a_{196}=9797$。因此知 $a_{197}=9898$、$a_{198}=9999$。

答: 198.

---

29. 在平面座標上兩個座標都是整數的點稱之為**格子點**。考慮一個三角形它的三個頂點座標為 $(0,0)$、$(a,0)$、$(0,b)$ 的格子點，其中 $a\geq b>0$。假設這個三角形的內部恰好有 74 個格子點 (不包含在三角形邊上的格子點)。請問所有這樣的三角形之面積總和是什麼？

在頂點都是格子點的 $a\times b$ 的矩形上，其內部共有 $(a-1)(b-1)$ 個格子點，且其對角線會經過其中 $g-1$ 個格子點，其中 $g=\gcd(a,b)$。因此可得知這樣的三角形內部的格子點數為

$$\frac{(a-1)(b-1)-g+1}{2}=74$$

此即

$$(a-1)(b-1)=147+g$$

若令 $a=cg$、$b=dg$，則有

$$cdg^2-(c+d)g=146+g$$

故可得知 g $146=2\times 73$ 的因數，即 $g\in\{1,2,73,146\}$.
但因 $a\geq b\geq g$，故有

$$(g-1)^2\leq(a-1)(b-1)=147+g$$

所以 $g=73$ 與 $g=146$ 是不合的，因此 $g=1$ 或 $g=2$。

換言之，$147+g=148$ 或 149，且需分解成 $(a-1)(b-1)$ 的形式。因 $148=2^2\times 37$ 且 149 為質數，故只有以下四種可能:

g	$147+g$	$a-1$	$b-1$	a	b	$g=\gcd(a,b)$?	$A=\frac{1}{2}ab$
1	148	148	1	149	2	✓	149
1	148	74	2	75	3	×	
1	148	37	4	38	5	✓	95
2	149	149	1	150	2	✓	150
							394

故可得知只有三個三角形滿足題意，其面積總和為 394。

答: 394.

30. **一個多項式 $p(x)$ 若具有整係數且 $p(100)=100$，則稱之為自我中心的。已知 $p(x)$ 為一個自我中心的多項式，請問方程 $p(k)=k^3$ 的整數解最多有幾個？**

令 $q(x)=p(x)-x^3$ 且 $a_1,\ldots,a_n$ 為 $q(x)$ 相異的根。此時可知對於每一個 k，$(x-a_k)$ 都是 $q(x)$ 的一個因式。故對 $(x-a_k)$，輪流利用長除法來計算可以得知其每一個商式的係數都是整數，故可得因式分解式 $q(x)=(x-a_1)\ldots(x-a_n)q_0(x)$ ，其中 $q_0(x)$ 是個整係數多項式。因此

$$q(100)=100-100^3=-999900=-99\cdot 100\cdot 101=-2^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 11\cdot 101$$

但另一方面，也有 $q(100)=(100-a_1)\ldots(100-a_n)q_0(100)$，其中 $(100-a_k)$ 是 $q(100)$ 的不同因數。

因此可得知 $q(100)$ 在寫成不同的整數乘積時，最多個整數的表示法為

$$q(100)=-1\cdot 1\cdot 2\cdot(-2)\cdot 3\cdot(-3)\cdot 5\cdot(-5)\cdot(-11)\cdot 101$$

所以知 $n\leq 10$.

而另一方面，利用上述的 -999900 的分解式可將 $q(x)$ 分解為

$$\begin{aligned}q(x)=(x-101)(x-99)(x-102)(x-98)(x-103)(x-97)\\ (x-105)(x-95)(x-111)(x-101)\end{aligned}$$

此時可得 10 個整數根且 $q(100)=-999900$，因此當 $p(x)=q(x)+x^3$ 時，則有 $p(100)=100$ 且 $p(x)=x^3$ 共有 10 個整數根，此即為最多的整數解個數。

答: 10.