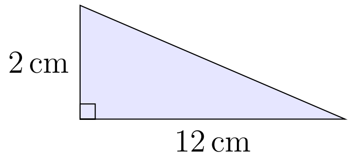
中 級 卷

1-10 題，每題 3 分

1. (**同 初級卷第 5 題**)
請問如右圖所示的直角三角形之面積為多少 cm^2？



(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 7 (E) 6

此直角三角形面積為 $\frac{1}{2} \times 12 \times 2 = 12\,\text{cm}^2$。

答: (B)

---

2. (**同 初級卷第 7 題**)
有部電影片長 $2\frac{1}{3}$ 小時，這部電影被分為等長的二節。請問每節片長多少分鐘？

(A) 85 (B) 70 (C) 80 (D) 65 (E) 75

可知這部電影片長為 $60 \times 2\frac{1}{3} = 60 \times \frac{7}{3} = 140$ 分鐘，所以每節片長為 $140 \div 2 = 70$ 分鐘。

答: (B)

---

3. 已知 $p = 11$、$q = -4$，請問 $p^2 - q^2$ 之值是什麼？

(A) 105 (B) 137 (C) 117 (D) 115 (E) 94

可知 $p^2 - q^2 = (p - q)(p + q) = 15 \times 7 = 105$。

答: (A)

---

4. 算式 $2015 - 20.15$ 等於

(A) 1984.85 (B) 1995.15 (C) 1994.85 (D) 1995.85 (E) 2035.15

$2015 - 20.15 = 1994.85$。

答: (C)

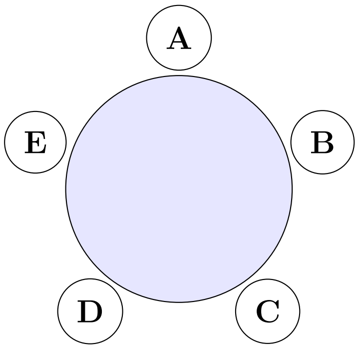
5. 請問 2015 枚二十分錢的硬幣共值多少？

(A) 2015 元　(B) 107.50 元　(C) 17.50 元　(D) 403 元　(E) 43 元

可知每 5 個二十分錢的硬幣值 1 元，因此共有 $2015 \div 5 = 403$ 元。

答: (D)

6. **(同 初級卷第 10 題)**
A、B、C、D、E 五個人依序圍坐在一圓桌。A 先報數 1，接著 B 報數 2，然後 C 報數 3，依此繼續下去。當一個人報出一個數後，圍繞圓桌的下一位則報出下一個數。若有人所報出的數是 7 的倍數，則他必須立刻出局離開。請問最後留在圓桌的是哪一位？



(A) A　(B) B　(C) C　(D) D　(E) E

如下表所示，B 會在報了 7 之後出局離開，接著 E 會在報了 14 之後出局離開，然後 A 會在報了 21 之後出局離開，最後 C 會在報了 28 之後出局離開，因此留在圓桌的是 D。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	B	C	D	E	A	**B**	C	D	E	A	C	D	**E**
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
A	C	D	A	C	D	**A**	C	D	C	D	C	D	**C**

答: (D)

7. 某農場裡馬與牛數量之比為 $3:2$ 且牛與羊之比為 $4:3$。請問羊與馬之比是什麼？

(A) $5:7$　(B) $3:8$　(C) $3:5$　(D) $5:18$　(E) $1:2$

可知農場裡每 4 隻牛就可以找到對應的 6 隻馬與 3 隻羊，因此羊與馬之比為 $1:2$。

答: (E)

8. 一位洗窗工人從一棟建築的第 38 層開始洗，每層樓有 12 座窗戶，他洗完整層的窗戶之後才移往下一層繼續洗。當這位工人洗到第 141 個窗戶時，請問他位於第幾層樓？

(A) 第 25 層 (B) 第 24 層 (C) 第 28 層 (D) 第 27 層 (E) 第 26 層

可知當這位工人洗完第 $11 \times 12 = 132$ 個窗戶後，他已經往下移動了 11 層樓到第 27 層樓，接著再洗 9 個窗戶就共洗了 141 個窗戶，此時仍在第 27 層樓。

答: (D)

---

9. 有一包棒棒糖內有 5 根藍色棒棒糖、15 根黃色棒棒糖，並另有一些紅色棒棒糖。已知其中三分之一的棒棒糖是紅色的，請問黃色棒棒糖佔幾分之幾？

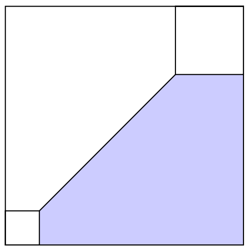
(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{5}{6}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{6}$ (E) $\frac{2}{3}$

可知藍色與黃色棒棒糖共 20 根，佔了這一包全部棒棒糖的 $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$，故可推知全部的棒棒糖共有 $20 \div \frac{2}{3} = 30$ 根，因此 15 根黃色棒棒糖共佔了全部棒棒糖的 $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$。

答: (C)

---

10. 二個小正方形在一個大正方形內部的相對角落，如右圖所示。這三個正方形的邊長分別為 1 cm、2 cm、7 cm。請問圖中塗上陰影的五邊形之面積是什麼？



(A) $18\,\text{cm}^2$ (B) $16\,\text{cm}^2$ (C) $22\,\text{cm}^2$ (D) $24\,\text{cm}^2$ (E) $20\,\text{cm}^2$

可知大正方形的面積為 $7^2 = 49\,\text{cm}^2$，而二個小正方形的面積總和為 $1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5\,\text{cm}^2$，且在大正方形內部但不在二個小正方形內部的區域被線段分為二個全等的五邊形，因此塗上陰影的五邊形之面積是 $(49 - 5) \div 2 = 22\,\text{cm}^2$。

答: (C)

11-20 題，每題 4 分

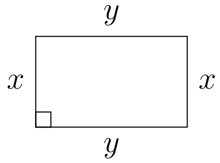
11. **(同 初級卷第 17 題、高級卷第 6 題)**

小英丈量一個矩形的其中三邊長，得到它們的總和為 80 cm。小芳丈量同一個矩形的其中三邊長，得到它們的總和為 88 cm。請問這個矩形的周長是什麼？

(A) 112 cm (B) 132 cm (C) 96 cm (D) 168 cm (E) 156 cm

解法 1

可令此矩形的長與寬分別為 x 與 y。



故可令 $2y+x=88$ 與 $2x+y=80$。將兩式相減，可得 $y-x=88-80=8$，即 $y=x+8$。再將 y 的表示式代回等式 $2x+y=80$ 即有

$$\begin{aligned} 2x+x+8&=80 \\ 3x&=72 \end{aligned}$$

故知 $x=24$，且 $y=32$。因此這個矩形的周長為 $2x+2y=112\text{cm}$。

答: (A)

解法 2

可判斷出小英必是沒有計算到矩形的長邊而小芳必是沒有計算到矩形的短邊，故可判斷出矩形的長邊比短邊長 $88-80=8\text{cm}$，因此可假設矩形的長與寬分別為 $x\,\text{cm}$ 與 $(x+8)\,\text{cm}$，且由小英的丈量結果可知 $2x+x+8=80$，化簡後為 $3x=72$，即 $x=24$。因此這個矩形的周長為 $2x+2(x+8)=2\times 24+2\times 32=112\,\text{cm}$。

答: (A)

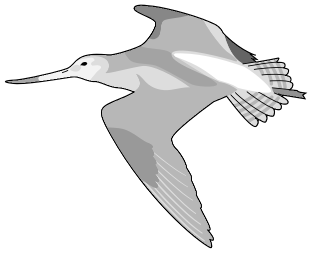
解法 3

可令此矩形的寬為 w、長為 h，則可得知二人分別丈量出了 $2w+h$ 與 $2h+w$ 的值。將這兩式相加，即有 $3w+3h=80+88=168$，化簡可得 $w+h=168\div 3=56$。因此這個矩形的周長為 $2(w+h)=112\,\text{cm}$。

答: (A)

12. (**同 高級卷第 10 題**)

有一隻候鳥被安裝上衛星定位腳環，結果發現牠在 8 天內總共飛行 11 500 km。請問牠每小時的平均速度大約為多少 km ？



(A) 120 (B) 6 (C) 1 (D) 24 (E) 60

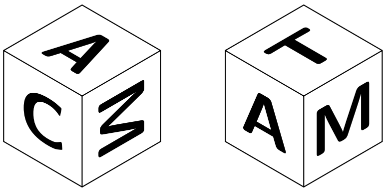
可知 8 天一共有 $8 \times 24 = 192$ 小時，所以牠每小時的平均速度大約是

$$\frac{11500}{192} \approx \frac{12000}{200} = 60\,\text{km}。$$

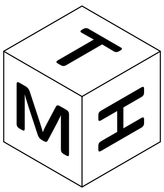
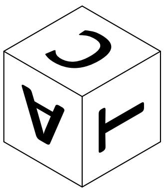
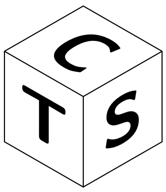
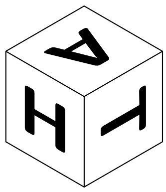
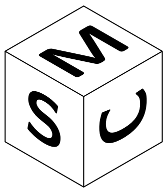
答: (E)

13. (**同 小學高年卷第 20 題、初級卷第 14 題**)

一個正立方體的六個表面上分別寫有字母 A、C、M、T、H、S。以下二個圖是分別從二個不同角度所看到的樣子。



請問下列哪一項可能是這個正立方體從第三個角度所看到的樣子？

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

可判斷出寫上 C 的面與寫上 T 的面必為一組相對的面，因此可刪去選項 (B) 與 (C)。而當將寫上 A 的面擺成直立時，這一個面的右側必為寫上 M 的面，因此可刪去選項 (D)。而當將寫上 C 的面擺成直立時，這一個面的上方必為寫上 A 的面，因此可刪去選項 (E)。因此僅選項 (A) 可為這個正立方體從第三個角度所看到的樣子，其中寫上 H 的面與寫上 A 的面為一組相對的面。

答: (A)

14. **(同 初級卷第 22 題、高級卷第 7 題)**

投擲二枚標準骰子，然後將顯示的二個點數相乘得出其乘積。請問所投擲出的乘積為 6 的倍數的機率是什麼？

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{5}{12}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

可知兩個骰子所投擲出的乘積為 6 的倍數的情況為其中一個恰擲出 6，或是其中一個恰擲出 3 且另一個恰擲出 2 或 4。故可將擲出機率相等的 36 種情況中滿足題意的情況列表如下：

第二個骰子點數

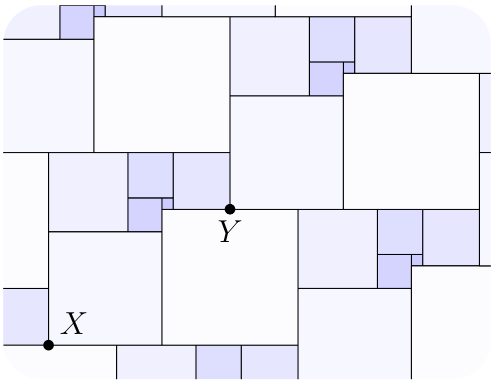
第一個骰子點數	1	2	3	4	5	6
1						✓
2			✓			✓
3		✓		✓		✓
4			✓			✓
5						✓
6	✓	✓	✓	✓	✓	✓

故知所投擲出的乘積為 6 的倍數的機率是 $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$。

答: (B)

---

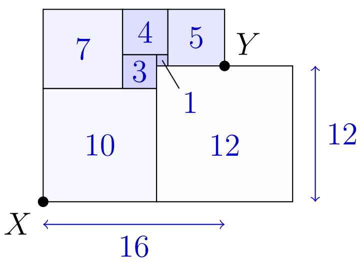
15. 右圖所示為地板所鋪磁磚的一小部分。所有的磁磚都是正方形，最小的正方形磁磚是 $1\,\mathrm{cm}\times 1\,\mathrm{cm}$，次小的則是 $3\,\mathrm{cm}\times 3\,\mathrm{cm}$。請問 XY 的距離是什麼？



(A) $\sqrt{346}\,\mathrm{cm}$ (B) $19\,\mathrm{cm}$

(C) $\sqrt{369}\,\mathrm{cm}$ (D) $\sqrt{377}\,\mathrm{cm}$

(E) $20\,\mathrm{cm}$



如圖所示，可知這些正方形磁磚由小到大的邊長依序為 $1\,\mathrm{cm}$、$3\,\mathrm{cm}$、$4\,\mathrm{cm}$、$5\,\mathrm{cm}$、$7\,\mathrm{cm}$、$10\,\mathrm{cm}$、$12\,\mathrm{cm}$，因此 XY 的是三邊長分別為 $12\,\mathrm{cm}$、$7+4+5=16\,\mathrm{cm}$、$\sqrt{12^2+16^2}=20\,\mathrm{cm}$ 的直角三角形的斜邊，即 XY 的距離是 $20\,\mathrm{cm}$。

答: (E)

16. 請問三個數碼都互不相同的三位數總共有多少個？

(A) 764　(B) 900　(C) 648　(D) 520　(E) 480

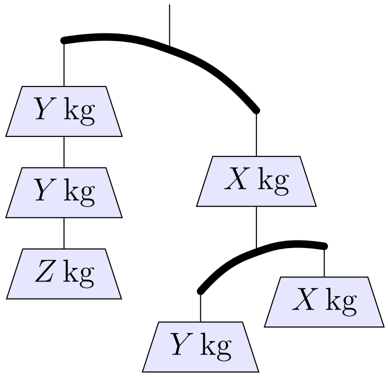
可知百位數碼可以是從 1 到 9 的數碼，共有 9 種可能。

而對於每一種可能的百位數碼取值，十位數碼的取值範圍必須刪去已選定的百位數碼，但可以選擇數碼 0，因此十位數碼共有 9 種可能。

而對於每一種已選定百位數碼與十位數碼的情況來說，個位數碼有 8 種可能，因此總共有 $9 \times 9 \times 8 = 648$ 個三個數碼都互不相同的三位數。

答: (C)

17. 右圖所示為二個兩臂重量忽略不計的天平。每個不平衡的天平顯示天平兩側所掛物品的輕重，砝碼的重量分別為 X kg、Y kg、Z kg，如圖上所標記。請問下列哪一項為從輕到重的砝碼重量？



(A) $X<Y<Z$　(B) $X<Z<Y$　(C) $Y<X<Z$

(D) $Y<Z<X$　(E) $Z<X<Y$

由這二個天平的平衡狀況，可以得知以下減式之值都是正數：

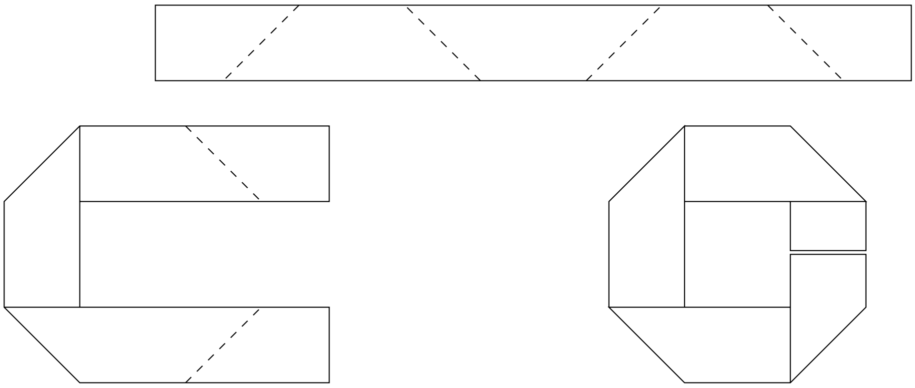
$$\begin{aligned} && Y-X &> 0 \quad \text{(由下層天平可以得知)} \\ (2X+Y)-(2Y+Z) &= & 2X-Y-Z &> 0 \quad \text{(由上層天平可以得知)} \\ (Y-X)+(2X-Y-Z) &= & X-Z &> 0 \quad \text{(將以上二式相加)} \end{aligned}$$

故知 $Z<X<Y$。

附記： 不是所有滿足以上結論的 Z、X、Y 都是解，例如 $Z=1$、$X=3$、$Y=4$ 時，下層天平的平衡狀況為 $4>3$ 而上層天平的平衡狀況為 $9<10$。

答: (E)

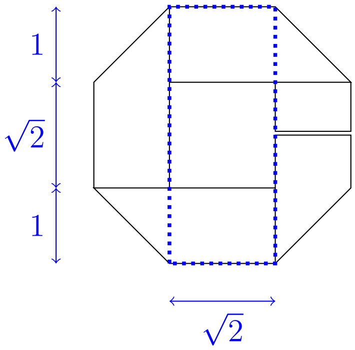
18. 用一條寬度為 1 cm 的長紙帶依下圖所示方式摺 4 次後得到一個空心的正八邊形。



如果摺完後紙帶的兩端正好吻合，請問這條紙帶的長度為多少 cm？

(A) $8\sqrt{2}$　(B) 8　(C) $4+4\sqrt{2}$　(D) 16　(E) $16-4\sqrt{2}$

可判斷出這個正八邊形的邊長為 $\sqrt{2}$ cm。

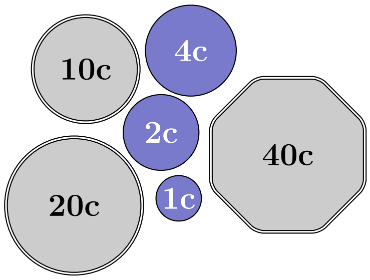


如圖，觀察此八邊形，可發現紙帶的其中一長邊恰構成一個寬為 $\sqrt{2}$、長為 $2+\sqrt{2}$ 的矩形的四條邊，故知這條紙帶的長度為 $4+4\sqrt{2}$cm。

答: (C)

19. (**同 初級卷第 24 題**)

夢幻國通用的硬幣為：1 c、2 c、4 c、10 c、20 c、40 c 六種。夢幻國的某位人士口袋裡的硬幣足以準確地支付從 1 c 到 200 c 的任意一個金額。請問他口袋裡的硬幣最少枚數是什麼？



(A) 12　(B) 10　(C) 11　(D) 9　(E) 8

可先驗證若恰利用 1 枚 1 c、1 枚 2 c、2 枚 4 c、1 枚 10 c、1 枚 20 c 與 4 枚 40 c 這 10 枚硬幣時，便可足以準確地支付從 1 c 到 200 c 的任意一個金額。因 $3=1+2$、$5=1+4$、$6=2+4$、$7=1+2+4$、$8=4+4$、$9=4+4+1$、$10=2+4+4$，故可知利用其中三種面額最小的硬幣即可準確地支付從 1 c 到 10 c 的任意一個金額，且再因 $30=10+20$、$50=10+40$、$60=20+40$、$70=10+20+40$、$80=40+40$、$90=40+40+10$、$100=20+40+40$、$110=10+20+40+40$、$120=40+40+40$、$130=10+40+40+40$、$140=20+40+40+40$、$150=10+20+40+40+40$、$160=40+40+40+40$、$170=10+40+40+40+40$、$180=20+40+40+40+40$、$190=10+20+40+40+40+40$，故可利用其中三種面額最大的硬幣即可準確地支付從 10 c 到 190 c 中任意一個 10 的倍數之金額。此時利用這兩點知這 10 枚硬幣可足以準確地支付從 1 c 到 200 c 的任意一個金額。

而若只有 9 枚硬幣時，觀察支付 199 c 的情況。由 199 為奇數可知至少有 1 枚 1 c 的硬幣、由 $40\times4=160<199-1=198<40\times5=200$ 知至多只可有 4 枚 40 c 的硬幣、由 $20\times8=160<198$ 知至少有 2 枚 40 c 的硬幣。

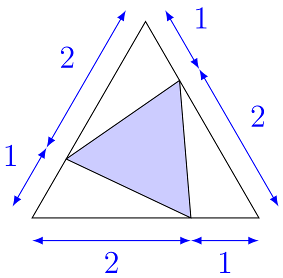
因至少有 2 枚 40 c 的硬幣，故知可以支付個位數 9 c 的硬幣至多為 7 枚。若恰為 7 枚，則此時可支付的金額為 $40+40+9=89$，矛盾；若恰為 6 枚，則此時可支付的金額至多為 $40+40+40+9=129$，矛盾；若恰為 5 枚，則此時可支付的金額至多為 $40+40+40+40+9=169$，矛盾；因此可以支付個位數 9 c 的硬幣至多為 4 枚，故知只有 $9=1+4+4=1+2+2+4$ 這二種情況可滿足題意：

若有 1 枚 1 c、1 枚 2 c、1 枚 4 c 這 4 枚硬幣，且其餘的 5 枚硬幣中至少有 2 枚 40 c 的硬幣，則可知需用 3 枚硬幣來支付 110 c，此時可判斷出至少有 1 枚 10 c 的硬幣，因此 3 枚硬幣最多僅可支付 $10+40+40=90$ c，故不合；而若有 1 枚 1 c、2 枚 4 c 這 3 枚硬幣，且其餘的 6 枚硬幣中至少有 2 枚 40 c 的硬幣，則可知需用 4 枚硬幣來支付 110 c，此時可判斷出至少有 1 枚 10 c 的硬幣，故僅可為 $110=10+20+40+40$，即 $199=40+40+40+40+20+10+4+4+1$，因此只有 1 枚 1 c、2 枚 4 c、1 枚 10 c、1 枚 20 c 與 4 枚 40 c 這 9 枚硬幣可準確支付 199 c，但這 9 枚硬幣無法支付 2 c 的情況，故不合。所以最少枚數為 10 枚。

答: (B)

20. 請問右圖中塗上陰影的小正三角形面積佔大正三角形面積的幾分之幾？

(A) $\frac{1}{6}$　(B) $\frac{1}{3}$　(C) $\frac{4}{9}$　(D) $\frac{1}{2}$　(E) $\frac{2}{5}$



解法 1

令大正方形的高為 h，則其面積為 $A=\frac{1}{2}\times 3\times h=\frac{3}{2}h$。

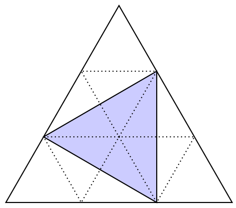
而此時也可判斷出圖中左下角的白色三角形水平邊上的高為 $\frac{h}{3}$，且其面積為 $A_1=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{h}{3}=\frac{h}{3}$。

因另二個白色三角形都與左下角的白色三角形全等，故可得知塗上陰影的小正三角形面積為 $A_2=A-3A_1=\frac{3}{2}h-h=\frac{1}{2}h$，即知塗上陰影的小正三角形面積佔大正三角形面積的 $\frac{1}{3}$。

答: (B)

解法 2

作平行於大正三角形各邊且經過各邊的三等分點的直線後，可將此大三角形分為數個單位正三角形，如圖所示：



可知大正三角形共由 9 個單位正三角形所組成，而塗上陰影的小正三角形面積與 $6\times\frac{1}{2}=3$ 個單位正三角形面積相等，因此塗上陰影的小正三角形面積佔大正三角形面積的 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$。

答: (B)

解法 3

由共角定理知圖中左下角的白色三角形面積佔大正三角形面積的 $\frac{1\times 2}{3\times 3}=\frac{2}{9}$，因另二個白色三角形都與左下角的白色三角形全等，故可得知塗上陰影的小正三角形面積佔大正三角形面積的 $1-3\times\frac{2}{9}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$。

答: (B)

21-25 題，每題 5 分

21. 一位學生發現某五個正整數裡只有一個眾數，且這五個正整數的平均數、中位數與眾數分別為遞增的連續正整數。請問這五個數中最大的數減最小的數所得的差之最大值是什麼？

(A) 5　　(B) 9　　(C) 8　　(D) 7　　(E) 6

假設平均數為 $x-1$、中位數為 x 而眾數為 $x+1$。則可令這五個正整數由小至大依序為

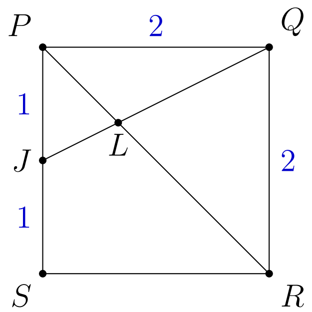
a	b	x	$x+1$	$x+1$

$\rightarrow$ 總和為 $5x-5$

因此知 $a+b=5x-5-(3x+2)=2x-7$。
因 b 的最大值可取為 $x-1$，所以 a 的最小值可取為 $x-6$
故知這五個數中最大的數減最小的數所得的差之最大值是 $(x+1)-(x-6)=7$。

答: (D)

22. 正方形 $PQRS$ 的邊長為 2 單位，點 J 為 PS 邊之中點。線段 QJ 與對角線 PR 交於點 L。請問 PL 之長度是多少單位？



(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　(E) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

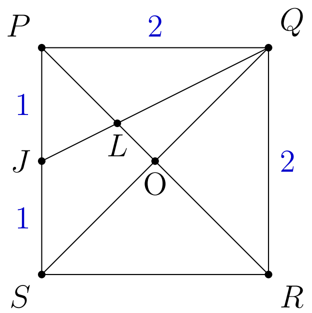
$\boxed{\text{解法 1}}$

在 $\triangle PJL$ 與 $\triangle RQL$ 中，因 $\angle LPJ = \angle LRQ = 45^\circ$、$\angle PLJ = \angle RQL$，所以 $\triangle PJL$ 與 $\triangle RQL$ 為相似三角形，因此知 $\frac{RL}{PL} = \frac{RQ}{PJ} = 2$，即可得 $RL = 2PL$，所以 $PL = \frac{1}{3}PR = \frac{1}{3}\sqrt{8} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$。

答: (E)

$\boxed{\text{解法 2}}$

作另一條對角線 SQ，且令正方形的中心為點 O，如圖所示。



此時可知 PO 與 JQ 為 $\triangle PQS$ 的二條中線，且知 $PO = \sqrt{2}$。因中線交點即為重心，會將每一條中線分成 1:2 的兩部分，因此可得知 $PL = \dfrac{2}{3}PO = \dfrac{2}{3}\sqrt{2}$。

答: (E)

23. 小偉將從 0 到 999 這一千個數的數碼和逐個寫下。請問這一千個數碼和之平均值是什麼？

(A) 13.5　(B) 15　(C) 12　(D) 12.5　(E) 10.5

解法 1

若分別在一位數、二位數的前面補上數碼 0 而使它們都可看成三位數，則在這 1000 個數的百位數碼、十位數碼與個位數碼這些位置中，從 0 到 9 的每一個數碼出現的次數都相同，因此每一個數碼會在每一個位置各出現 $1000 \div 10 = 100$ 次，所以從 0 到 999 所有出現的數碼的總和為

$$3 \times 100 \times (0+1+2+\cdots+9) = 13500$$

因此小偉所寫的 1000 個數之平均是 $13500 \div 1000 = 13.5$。

答: (A)

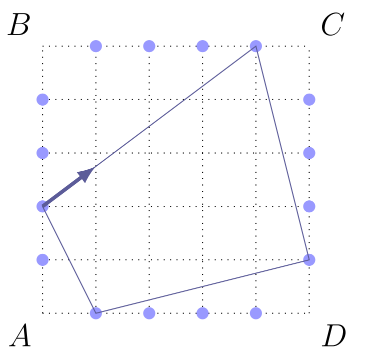
解法 2

將這一千個數配對為 (0, 999)、(1, 998)、$\cdots$、(499, 500) 等 500 對，每對之數碼和都等於 27，即這一千個數碼和之平均為 $27 \div 2 = 13.5$。

答: (A)

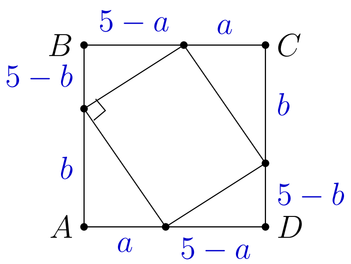
24. 由方格表 AB 邊上的格子點劃出折線，依序分別經過 BC、CD、DA 邊上的格子點，最後再回到原出發點而構成一個四邊形。所畫的折線都不得通過 A、B、C、D 點。請問所有畫出的四邊形中，有多少個不是矩形 (注意：正方形也是一種矩形)？

(A) 256 (B) 252 (C) 64 (D) 248 (E) 76



解法 1

由圖示可知對於每一個頂點，都有四個選擇，因此共可畫出 $4^4 = 256$ 個四邊形，其中也包含了矩形。為了計算出共有多少個矩形，可觀察如下圖所示的邊長：

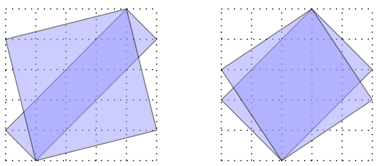


由相似三角形的性質可以得知 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{5-b}{5-a}$，即 $a(5-a) = b(5-b)$。

若 $a=1$ 或 $a=4$，則有 $b^2-5b+4=(b-1)(b-4)=0$，故 $b=1$ 或 $b=4$；

若 $a=2$ 或 $a=3$，則有 $b^2-5b+6=(b-2)(b-3)=0$，故 $b=2$ 或 $b=3$。

故知共有 8 個矩形，其中 4 個如下圖所示，而另 4 個為其鏡像：



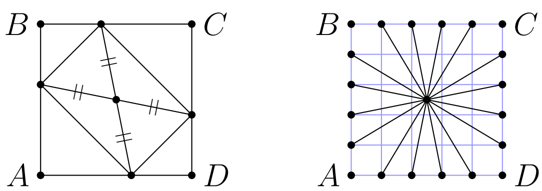
因此所有畫出的四邊形中，有 $256-8=248$ 個不是矩形。

答: (D)

解法 2

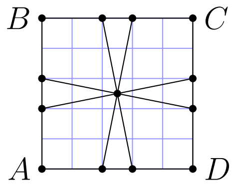
如同解法 1 的想法，將在所畫出的 $4^4=256$ 個四邊形中計算矩形的個數。

因矩形的兩條對角線必彼此相等且在 $ABCD$ 的中心互相平分，故可從下右圖中選擇適當的兩條線作為矩形的兩條對角線：



可知對角線只有 $\sqrt{26}$ 與 $\sqrt{34}$ 這兩種可能的長度。

若對角線的長度為 $\sqrt{26}$，則兩端點分別在 AB 邊與 CD 邊的對角線有 2 個選擇、兩端點分別在 AD 邊與 BC 邊的對角線有 2 個選擇，故知對角線的長度為 $\sqrt{26}$ 的矩形有 $2\times 2=4$ 個；



同樣地，對角線的長度為 $\sqrt{34}$ 的矩形也是有 $2\times 2=4$ 個。

因此所有畫出的四邊形中，有 $256-8=248$ 個不是矩形。

答: (D)

25. 小鴻需用一又二分之一小時來油漆房間的牆壁，用二小時油漆它的天花板。小珍則需一小時來油漆相同房間的牆壁，用一小時油漆它的天花板。若小鴻與小珍合作油漆此房間的牆壁與天花板，請問他們最少需費多少分鐘？

(A) 72　　(B) 60　　(C) 83　　(D) 75　　(E) 76

可知小珍油漆房間天花板的速度是小鴻的 2 倍而油漆房間牆壁的速度是小鴻的 1.5 倍。因此最有效率的油漆分配計畫為讓小珍油漆房間天花板的時間要儘可能的多。
若小珍從油漆房間天花板開始而小鴻從油漆房間牆壁開始，則經過 1 小時後，小珍已將房間天花板油漆完畢而小鴻已漆完了 $\frac{2}{3}$ 的房間牆壁，尚餘 $\frac{1}{3}$ 的房間牆壁未漆。接著兩人合作，故剩下的部分只需 $\frac{1}{3}\div(1+\frac{2}{3})=\frac{1}{5}$ 小時，即 12 分鐘，所以他們最少需費 $60+12=72$ 分鐘。

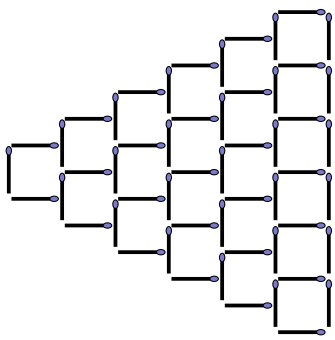
答: (A)

問題 26-30 的答案為 000-999 之間的整數，
請將答案填在答案卡上對應的位置。

第 26 題占 6 分，第 27 題占 7 分，第 28 題占 8 分，
第 29 題占 9 分，第 30 題占 10 分。

---

26. 小威有 2015 根火柴棒，他用這些火柴棒構造一個三角形狀的圖案，如右圖所示。他希望此圖案愈大愈好。請問他最後會剩下多少根火柴棒？



可令共排了 n 行。則擺成水平線的火柴棒共有 $2+3+4+\ldots+(n+1)=\frac{n}{2}(n+3)$ 根而擺成鉛垂線的火柴棒共有 $1+2+\ldots+n+n=\frac{n}{2}(n+1)+n=\frac{n}{2}(n+3)$ 根。因此一共使用了 $n(n+3)=n^2+3n$ 根火柴棒。
為了求出滿足 $n^2+3n<2015$ 的 n 之最大值，可注意到 $44^2=1936$ 而 $45^2=2025$，因此從 44×47 開始計算。因 $44\times 47=2068$ 而 $43\times 46=1978$，故知 n 之最大值為 43，此時共使用了 1978 根火柴棒，所以最後會剩下 $2015-1978=37$ 根火柴棒。

答: (37)

27. (同 高級卷第 26 題)

請問有多少個小於 2015 的正整數 n，使得 $\frac{1}{3}+\frac{1}{n}$ 可以被約分成分母小於 n 的分數？

解法 1

可令

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{n}=\frac{n+3}{3n}=\frac{a}{b},$$

其中 $b<n$ 且 $\gcd\{a,b\}=1$。再令最後被約分的公因數為 $k=\gcd(n+3,3n)$，則有 $k=\frac{3n}{b}>\frac{3b}{b}=3$。

因 k 整除 $n+3$，故知它也整除 $3n+9$。然而 k 也整除 $3n$，故 k 是 9 的因數。再因 $k>3$，故可推得 $k=9$，所以有 $9a=n+3$ 與 $9b=3n$，即有 $n=9a-3$ 以及 $b=3a-1<n$。因此 n 的取值可為 6、15、24、33、...。接著可由以下算式驗證所有這樣的 n 都滿足題意：

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9a-3}=\frac{3a-1}{9a-3}+\frac{1}{9a-3}=\frac{3a}{9a-3}=\frac{a}{3a-1}=\frac{a}{b}.$$

為了計算共有多少個 n 滿足題意，需解 $n\le 2014$，其中 $n=9a-3$，而 a 是一個正整數：

$$9a-3\le 2015 \implies 9a\le 2018 \implies a\le 224\frac{2}{9} \implies a\le 224。$$

故知共有 224 個這樣的正整數。

答: (224)

解法 2

若 n 不是 3 的倍數，則分母 $3n$ 與分子 $n+3$ 沒有公因數，故無法約分，與分母須小於 n 矛盾。故知僅需確認 n 是 3 的倍數的情形。

n	3	6	9	12	15	18	21	24	27	$\cdots$
$\frac{1}{3}+\frac{1}{n}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{9}{24}$	$\frac{10}{27}$	$\cdots$
約分成最簡分數		$\frac{1}{2}$			$\frac{2}{5}$			$\frac{3}{8}$		$\cdots$

因約分僅會發生在 $\frac{n}{3}+1$ 為 3 的倍數時，因此 n 的取值為 6、15、24、33、...，即 n 的取值為 9 的倍數少 3。而 3 的倍數中，小於 2015 的最大數為 2013，且恰比 $2016=224\times 9$ 少 3，故知 n 的取值範圍為從 $6=1\times 9-3$ 到 $2013=224\times 9-3$，所以共有 224 個這樣的正整數。

答: (224)

28. 一個矩形的邊長都是整數單位，若將它的高增加 3 單位、寬增加 2 單位，則面積會變成三倍。請問滿足上述條件的所有矩形之總面積為多少平方單位？

可令這個矩形原來的長與寬分別為 x 與 y。則

$$\begin{aligned}(x+3)(y+2) &= 3xy\\ xy+3y+2x+6 &= 3xy\\ y(2x-3) &= 2x+6\\ y &= \frac{2x+6}{2x-3}\\ &= 1+\frac{9}{2x-3}\end{aligned}$$

故知 $2x-3=1$、3 或 9，即 $x=2$、3 或 6。
所以共有三個可能的矩形：2×10、3×4、6×2，其面積總和為 $20+12+12=44$。

答: (44)

---

29. (**同 高級卷第 28 題**)

在某車站上，從正中午到午夜，每三分鐘都有一列向南行駛的火車到站，每五分鐘也都有一列向北行駛的火車到站。每一天下午，我步行到此車站的時刻都是隨機的。我搭上最先抵達的火車，無論它是向南或向北行駛。請問我平均必須花費多少秒等火車？

可知從正中午到午夜，每十五分鐘裡，第 0 分鐘、第 3 分鐘、第 5 分鐘、第 6 分鐘、第 9 分鐘、第 10 分鐘、第 12 分鐘與第 15 分鐘都有火車抵達車站。在這些時刻間，共有 2 個一分鐘區間、2 個二分鐘區間與 3 個三分鐘區間。故可得以下狀況：

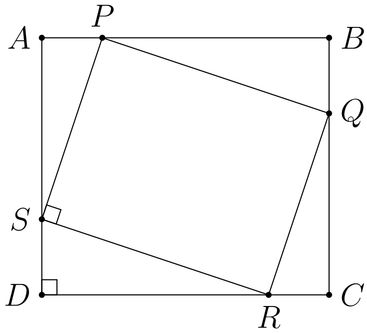
- 在一分鐘區間抵達的機率為 $\frac{2\times 1}{15}$ 且其平均等待時間為 30 秒。
- 在二分鐘區間抵達的機率為 $\frac{2\times 2}{15}$ 且其平均等待時間為 60 秒。
- 在三分鐘區間抵達的機率為 $\frac{3\times 3}{15}$ 且其平均等待時間為 90 秒。

因此我等火車平均必須花費

$$\frac{2}{15}\times 30+\frac{4}{15}\times 60+\frac{9}{15}\times 90=4+16+54=74\text{秒。}$$

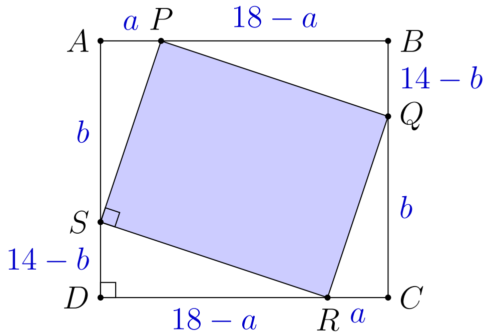
答: (74)

30. 一個 14×18 的矩形 $ABCD$，點 P、Q、R、S 分別為在 AB、BC、CD、DA 邊上的點，如右圖所示。已知 AP、PB、BQ、QC、CR、RD、DS、SA 的長度都是正整數單位長，且 $PQRS$ 為矩形，請問矩形 $PQRS$ 的面積之最大可能值是什麼？



解法 1

如圖所示方式定義各線段長度，並計算矩形 $PQRS$ 的面積：



$$\begin{aligned}\text{矩形 } PQRS \text{ 的面積} &= 18\times 14-ab-(18-a)(14-b)\\ &= 18b+14a-2ab\end{aligned}$$

不妨假設 $1\le a\le 9$。因 $\triangle APS$ 與 $\triangle BQP$ 為相似三角形，故有 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{14-b}{18-a}$，化簡即得 $b^2-14b+a(18-a)=0$。因此

$$\begin{aligned}b&=\frac{14\pm\sqrt{14^2-4a(18-a)}}{2}\\ &=7\pm\sqrt{49-a(18-a)}\end{aligned}$$

接著直接代入 $a=1$、...、9 來計算 b 的值:

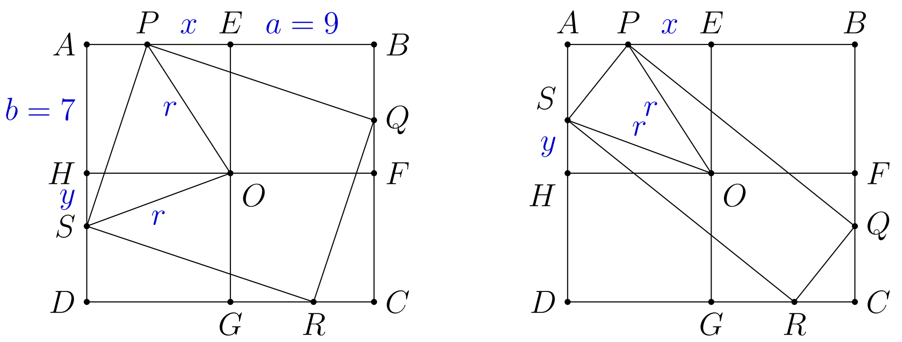
a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$49-a(18-a)$	32	17	4	-7	-16	-23	-28	-31	-32
b	$\times$	$\times$	7 ± 2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

故可得知僅有 $(a,b)=(3,5)$ 與 $(a,b)=(3,9)$ 這二個解，其中前者可得矩形 $PQRS$ 的面積為 102 而後者可得矩形 $PQRS$ 的面積為 150，即矩形 $PQRS$ 的面積之最大可能值是 150。

答: (150)

解法 2

可知這兩個矩形有共同的中心點 O，且因 $PR=QS$，故可令 $r=OP=OS$。如圖，令矩形 $ABCD$ 四邊的中點為 E、F、G、H，且各線段長度如圖所標示。若每給定一組 x 與 y 的值，可得 4 種情況，其中 2 種如下圖所示，而另 2 種為其鏡像。



在每一種情況中，$PQRS$ 的面積可利用 $ABCD$ 的面積減去四個三角形的面積，其中 $ABCD$ 的面積為 $4ab$：

$$A_1 = 4ab - (a-x)(b+y) - (a+x)(b-y) = 2ab + 2xy$$
$$A_2 = 4ab - (a-x)(b-y) - (a+x)(b+y) = 2ab - 2xy$$

因 $A_1 \geq A_2$，故要求最大可能值僅需考慮上左圖的情況。
在 $\triangle EOP$ 中，$x^2 + b^2 = r^2$，而在 $\triangle HOS$ 中，$y^2 + a^2 = r^2$。故有

$$x^2 - y^2 = a^2 - b^2 = 81 - 49 = 32$$
$$(x+y)(x-y) = 32$$

而 32 寫成 2 個數之乘積的分解式有 32×1、16×2、8×4，再因 $x < 9$ 與 $y < 7$，故只有 $x + y = 8$ 與 $x - y = 4$ 是可能發生的，因此知 $x = 6$、$y = 2$。
所以此時 $PQRS$ 的面積為 $A_1 = 2ab + 2xy = 126 + 24 = 150$。

答: (150)