高 級 卷

1-10 題，每題 3 分

1. 請問算式 21×2015 之值是什麼？

(A) 45 231　(B) 54 321　(C) 42 315　(D) 14 325　(E) 23 514

$21 \times 2015 = 42315$。

答: (C)

---

2. 已知 $K = L + R^2$、$L = 4$、$K = 85$ 且 R 為正數，請問 R 之值等於什麼？

(A) 5　(B) 7　(C) 9　(D) 4　(E) 8

將 $L = 4$、$K = 85$ 代入等式後可得 $85 = 4 + R^2$，化簡後為 $R^2 = 81$，因此由 R 為正數可知 $R = \sqrt{81} = 9$。

答: (C)

---

3. 小欣與小紅利用學校假期到農場打工採摘水果，小欣工作 5 天，小紅工作 3 天。農場共支付他們兩人 \$1000。若他們依照工作天數的比率分配這筆錢，請問小紅可以分得多少錢？

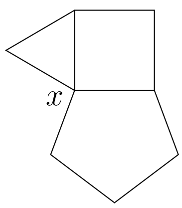
(A) \$325　(B) \$300　(C) \$250　(D) \$375　(E) \$500

因兩人合計工作 $5 + 3 = 8$ 天，故小紅可以分得 $\$1000 \times \dfrac{3}{8} = \$375$。

答: (D)

---

4. 一個正三角形、一個正方形、一個正五邊形以邊對邊連接在一起，如右圖所示。請問角 x 之大小是什麼？



(A) 108°　(B) 105°　(C) 90°　(D) 120°　(E) 102°

可知正三角形、正方形、正五邊形的內角角度依序為 60°、90°、108°，合計 258°，因此 $x^\circ = 360^\circ - 258^\circ = 102^\circ$。

答: (E)

5. 算式 $3^{-2}-2^{-3}$ 等於

(A) -1 (B) 0 (C) $-\frac{1}{72}$ (D) $\frac{1}{72}$ (E) $\frac{17}{72}$

$3^{-2}-2^{-3}=\frac{1}{9}-\frac{1}{8}=\frac{8}{72}-\frac{9}{72}=-\frac{1}{72}$。

答: (C)

---

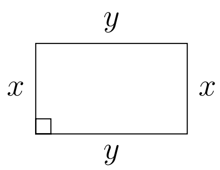
6. **(同 初級卷第 17 題、中級卷第 11 題)**

小英丈量一個矩形的其中三邊長，得到它們的總和為 80 cm。小芳丈量同一個矩形的其中三邊長，得到它們的總和為 88 cm。請問這個矩形的周長是什麼？

(A) 112 cm (B) 132 cm (C) 96 cm (D) 168 cm (E) 156 cm

解法 1

可令此矩形的長與寬分別為 x 與 y。



故可令 $2y+x=88$ 與 $2x+y=80$。將兩式相減，可得 $y-x=88-80=8$，即 $y=x+8$。再將 y 的表示式代回等式 $2x+y=80$ 即有

$$\begin{aligned}2x+x+8&=80\\3x&=72\end{aligned}$$

故知 $x=24$，且 $y=32$。因此這個矩形的周長為 $2x+2y=112$cm。

答: (A)

解法 2

可判斷出小英必是沒有計算到矩形的長邊而小芳必是沒有計算到矩形的短邊，故可判斷出矩形的長邊比短邊長 $88-80=8$cm，因此可假設矩形的長與寬分別為 x cm 與 $(x+8)$ cm，且由小英的丈量結果可知 $2x+x+8=80$，化簡後為 $3x=72$，即 $x=24$。因此這個矩形的周長為 $2x+2(x+8)=2\times24+2\times32=112$ cm。

答: (A)

解法 3

可令此矩形的寬為 w、長為 h，則可得知二人分別丈量出了 $2w+h$ 與 $2h+w$ 的值。將這兩式相加，即有 $3w+3h=80+88=168$，化簡可得 $w+h=168\div3=56$。因此這個矩形的周長為 $2(w+h)=112$ cm。

答: (A)

7. **(同 初級卷第 22 題、中級卷第 14 題)**

投擲二枚標準骰子，然後將顯示的二個點數相乘得出其乘積。請問所投擲出的乘積為 6 的倍數的機率是什麼？

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{5}{12}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

可知兩個骰子所投擲出的乘積為 6 的倍數的情況為其中一個恰擲出 6，或是其中一個恰擲出 3 且另一個恰擲出 2 或 4。故可將擲出機率相等的 36 種情況中滿足題意的情況列表如下：

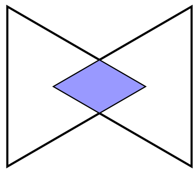
第二個骰子點數

第一個骰子點數	1	2	3	4	5	6
1						✓
2			✓			✓
3		✓		✓		✓
4			✓			✓
5						✓
6	✓	✓	✓	✓	✓	✓

故知所投擲出的乘積為 6 的倍數的機率是 $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$。

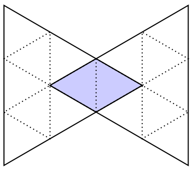
答: (B)

8. 兩個全等的正三角形部分重疊在一起，構成一個凹六邊形，如右圖所示。每個正三角形都有一個頂點與另一個正三角形的中心重合。請問塗上陰影部分的面積佔整個凹六邊形的幾分之幾？



(A) $\frac{2}{9}$　(B) $\frac{1}{8}$　(C) $\frac{1}{5}$　(D) $\frac{1}{7}$　(E) $\frac{1}{6}$

解法 1

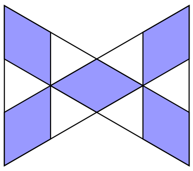


作平行於正三角形各邊且經過各邊的三等分點的直線後，可將此凹六邊形分成 16 個單位正三角形，如圖所示。可知其中有 2 個單位正三角形是塗上陰影的，故知塗上陰影部分的面積佔整個凹六邊形的 $\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$。

答: (B)

解法 2

分別以兩個正三角形的中心為旋轉中心，旋轉塗上陰影的菱形 $\pm 120^\circ$ 後可得下圖：



可知剩下的 6 個白色小三角形都是彼此兩兩全等的，且其總面積恰等於 3 個菱形面積，故知此凹六邊形的面積恰等於 8 個菱形面積，所以塗上陰影部分的面積佔整個凹六邊形的 $\frac{1}{8}$。

答: (B)

9. 兩個數之差為 20。當將每個數都加上 4，此時較大的數等於較小的數之三倍。請問原來的兩個數之中，較大的數是什麼？

(A) 26　(B) 40　(C) 38　(D) 22　(E) 32

解法 1

令較小的數為 x，則較大的數為 $x+20$。因 $x+20+4=3(x+4)$，可得 $x=6$，故較大的數為 $6+20=26$。

答: (A)

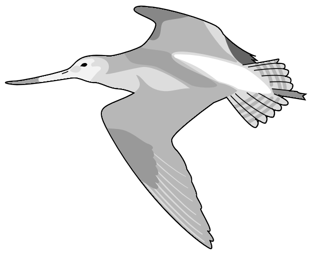
解法 2

可知當兩個數都加上 4 後，其差仍不回改變，故知這兩個數都加上 4 後較大的數與較小的數之差為 20，且可判斷知此恰為較小的數加上 4 後的 2 倍，因此這兩個數都加上 4 後必為 $20\div 2=10$ 與 $10\times 3=30$，故原來的兩個數為 $10-4=6$ 與 $30-4=26$。

答: (A)

10. **(同 中級卷第 12 題)**

有一隻候鳥被安裝上衛星定位腳環，結果發現牠在 8 天內總共飛行 11 500 km。請問牠每小時的平均速度大約為多少 km ？



(A) 120　(B) 6　(C) 1　(D) 24　(E) 60

可知 8 天一共有 $8 \times 24 = 192$ 小時，所以牠每小時的平均速度大約是

$$\frac{11500}{192} \approx \frac{12000}{200} = 60\,\mathrm{km}。$$

答: (E)

11-20 題，每題 4 分

11. 令集合 A 為 $\{0, 1, 2\}$、集合 B 為 $\{3, 6, x\}$，其中 x 為整數。現將在集合 A 中的每一個數乘以在集合 B 中的每一個數，令集合 C 為它們的積所構成的集合。若 C 恰有 5 個不同的元素，請問 x 可能之值是什麼？

(A) 12　(B) 4　(C) 24　(D) 0　(E) 6

可知將在集合 A 中的每一個數乘以在集合 B 中的每一個數後所得的乘積為 0、0、0、3、6、x、6、12、$2x$ 這 9 個數，故知

$$C = \{0, 3, 6, 12, x, 2x\}。$$

因為 C 恰有 5 個不同的元素，故知：

(i) $x \in \{0, 3, 6, 12\}$ 且 $2x \notin \{0, 3, 6, 12\}$，此時僅 $x = 12$ 滿足，而有 $2x = 24$；

(ii) $2x \in \{0, 3, 6, 12\}$ 且 $x \notin \{0, 3, 6, 12\}$，但因 $2x \in \{0, 3, 6, 12\}$ 僅當 $x = 0$、3 或 6 時才會發生，故不可能。

答: (A)

12. 請問以下算式之值是什麼？

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}+\frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}}$$

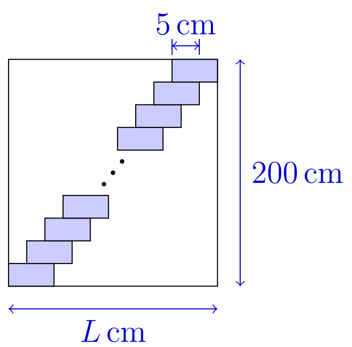
(A) $\frac{5}{16}$ (B) $\frac{3}{14}$ (C) $\frac{60}{77}$ (D) $\frac{45}{154}$ (E) $\frac{70}{66}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}+\frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}} &= \frac{1}{\frac{1}{\frac{5}{6}}+\frac{1}{\frac{9}{20}}} \\ &= \frac{1}{\frac{6}{5}+\frac{20}{9}} \\ &= \frac{1}{\frac{154}{45}} \\ &= \frac{45}{154}\end{aligned}$$

答: (D)

13. 將一個 $L\,\text{cm}\times 200\,\text{cm}$ 矩形地面沿對角線鋪設磁磚，如右圖所示。已知每塊磁磚的尺寸為 $8\,\text{cm}\times 4\,\text{cm}$，相鄰兩塊磁磚接合在一起的長度為 5 cm。請問 L 之值是什麼？

(A) 253 (B) 155 (C) 400 (D) 250 (E) 158



可知沿對角線共鋪設了 $200\div 4=50$ 塊磁磚，且除了最下面的磁磚以外，每一塊磁磚都比它下一塊相鄰的磁磚還往右凸出了 $3\,\text{cm}$，故知最上面的磁磚比最下面的磁磚往右凸出了 $3\times 49=147\,\text{cm}$，因此 $L=147+8=155$。

答: (B)

14. 某班級共有 25 位學生，其中 11 位學生現年 15 歲，其他的學生現年 16 歲。已知此班級共有 15 位男生，且 16 歲的男生人數恰為 15 歲男生人數的二倍。請問 16 歲女生的人數佔全班人數的幾分之幾？

(A) $\frac{7}{25}$　(B) $\frac{2}{5}$　(C) $\frac{4}{25}$　(D) $\frac{1}{5}$　(E) $\frac{6}{25}$

解法 1

	15 歲	16 歲	
男生	5	10	15
女生	6	4	
	11	14	

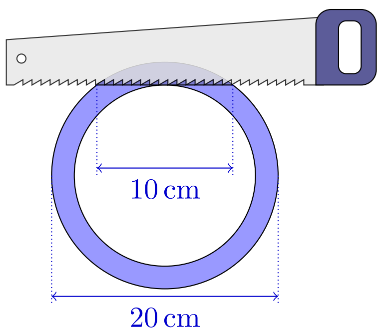
答: (C)

解法 2

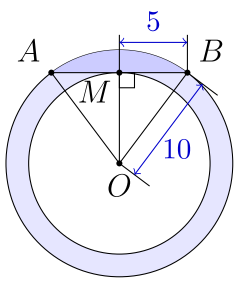
可知在 15 位男生中，15 歲的有 $15 \div (1+2) = 5$ 位而 16 歲的有 $15 - 5 = 10$ 位，因此在 14 位 16 歲的學生中，有 $14 - 10 = 4$ 位是女生，所以 16 歲女生的人數佔全班人數的 $\frac{4}{25}$。

答: (C)

15. 小輝用一把鋸子打算將一根外徑為 20 cm 的水管鋸開。當他恰好切穿管壁時，鋸子有 10 cm 在管壁內，如右圖所示。請問管壁的厚度為多少 cm？



(A) 5　(B) $5\sqrt{3} - 5$　(C) $10 - 5\sqrt{2}$　(D) $4 - \sqrt{10}$　(E) $5(2 - \sqrt{3})$



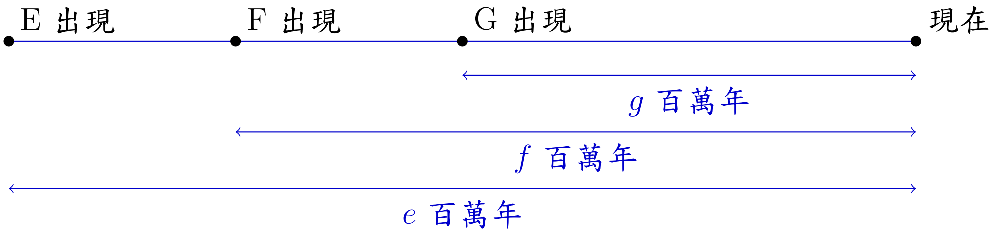
在水管的被切的橫截面上，令圓的圓心為點 O、鋸子所切到的線為 AB 且其中點為 M。此時可知 $MB = 10 \div 2 = 5\,\text{cm}$ 以及 $OB = 20 \div 2 = 10\,\text{cm}$。再令內圈的半徑為 $r = OM$，則在 $\triangle MBO$ 上利用勾股定理可知 $r^2 = 10^2 - 5^2 = 75$，故有 $r = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$，因此管壁的厚度為 $10 - 5\sqrt{3} = 5(2 - \sqrt{3})\text{cm}$。

答: (E)

16. 某地發現三種恐龍化石。E 品種恐龍出現距今的年數為 G 品種恐龍出現距今年數的二倍。當 G 品種恐龍出現時，E 品種恐龍已經出現的年數為 F 品種恐龍已經出現的年數之二倍。已知這三種恐龍距今的年數之總和為 360 百萬年，請問在 F 品種恐龍出現之後多少百萬年 G 品種恐龍才出現？

(A) 120 (B) 40 (C) 80 (D) 60 (E) 20

令 e、f、g 依序分別為 E 品種恐龍、F 品種恐龍、G 品種恐龍出現距今的百萬年數，可依題意繪出如下圖所示之時間軸：



則知 $e+f+g=360$ 且 $e=2g$，且此時可知當 G 品種恐龍出現時，E 品種恐龍已出現了 g 百萬年而 F 品種恐龍已出現了 $0.5g$ 百萬年，故可再推得 $f=1.5g$。此時可解方程式如下：

$$\begin{aligned} e+f+g &= 360 \\ 2g+1.5g+g &= 360 \\ g &= \frac{360}{4.5} = 80 \end{aligned}$$

因此 $f-g=0.5g=40$，即在 F 品種恐龍出現之後 40 百萬年 G 品種恐龍才出現。

答: (B)

17. 某班級兩周 (10 天) 的課表如下圖所示，其中每天有 5 節課：

節		星期一	星期二	星期三	星期四	星期五
	1	英文	電腦			
	2	數學	美術			
節	3	自然	英文			
	4	地理	⋮			
	5	歷史				

星期一	星期二	星期三	星期四	星期五

學生必修的七個科目依照英文、數學、自然、地理、歷史、電腦、美術等順序循環。從第 1 天第 1 節英文課開始，在兩週內共會上 49 堂課，其中有一節的課安排作為集會，集會可能被安排在第二周的某一天的第一節。無論第二周哪一天集會，請問在第二周的第一節哪個科目不可能被安排到？

(A) 英文　(B) 數學　(C) 地理　(D) 電腦　(E) 美術

為了方便起見，可令科目 1 為英文、科目 2 為數學、科目 3 為自然、科目 4 為地理、科目 5 為歷史、科目 6 為電腦、科目 7 為美術。若集會安排在星期五，則課表的形式會如同下表所示：

節		星期一	星期二	星期三	星期四	星期五
	1	1	6	4	2	7
	2	2	7	5	3	1
節	3	3	1	6	4	2
	4	4	2	7	5	3
	5	5	3	1	6	4

星期一	星期二	星期三	星期四	星期五
5	3	1	6	**集會**
6	4	2	7	4
7	5	3	1	5
1	6	4	2	6
2	7	5	3	7

可知科目 5、3、1、6(即在第 1 節這一列中塗上陰影的部分) 是第二周課程第一節會上的課。若集會往前移動至星期 X，則原來表中星期 X 最後一節課會變成隔天的第一節課，因此知表中第二周星期一到四的第 5 節課都可能變成隔天的第一節課，即科目 2、7、5、3 是第二周課程第一節可能會上的課。所以僅科目 4(地理) 不可能安排到第二周的第一節。

答: (C)

18. 正整數 x、y 滿足 $(2^x+1)(2^y-1)=2015$。請問 xy 之值是什麼？

(A) 36　(B) 40　(C) 12　(D) 30　(E) 24

將 2015 作質因數分解可得 $2015=5\times 13\times 31$，所以在寫成如題意的分解式的情況下，因 2015 與 2 的冪次之差不為 1，故必其中恰有一個因式之值為 5、13 或 31，而僅 31 與 2 的冪次差 1，故有 $2^y-1=31=2^5-1$，此時 $2^x+1=5\times 13=65=2^6+1$，即 $x=6$、$y=5$，故 $xy=5\times 6=30$。

答: (D)

19. 已知 N 為大於 1 的整數，將 N 與 N 的第二大的因數相加，求出其和。例如，當 $N=55$，這個和為 $55+11=66$。請問有多少個 N 使得此和等於 42？

(A) 3 (B) 4 (C) 1 (D) 0 (E) 2

解法 1

若 N 為偶數，則有 $42=N+\dfrac{N}{2}=\dfrac{3N}{2}$，即 $N=\dfrac{2}{3}\times 42=28$。

若 N 為奇數，則 N 的第二大的因數 $k\le\frac{1}{3}N$，因此 $42=N+k\le\frac{4}{3}N$，即 $N\ge\frac{3}{4}\times 42=31.5$。現逐一驗證 33 到 41 中個各個奇數：

N	33	35	37	39	41
k	11	7	1	13	1
$N+k$	44	42	38	52	42

故知 N 的可能值為 28、35、41，共有 3 個可能。

答: (A)

解法 2

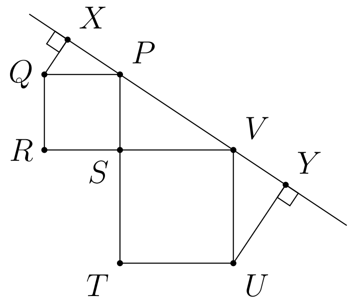
可知 $42=41+1=40+2=39+3=\cdots=28+14$，故可列表檢驗如下：

N	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28
N的第二大因數	1	20	13	19	1	18	7	17	11	16	1	15	1	14
	✓	不合	不合	不合	不合	不合	✓	不合	不合	不合	不合	不合	不合	✓

故知 N 的可能值為 28、35、41，共有 3 個可能。

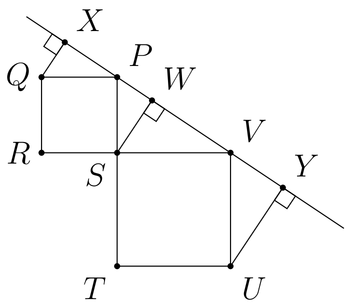
答: (A)

20. 不相等的二個正方形 $PQRS$ 與 $STUV$ 的二條邊 PS、ST 在同一直線上。自點 Q 與點 U 分別向直線 PV 作垂線，垂足分別為點 X 與點 Y，如右圖所示。請問 $XQ+YU$ 之長度與下列哪一項相等？



(A) SU　(B) RV　(C) UQ
(D) PR　(E) PV

在 PV 中取點 W 使得 SW 與 PV 垂直，如圖所示。

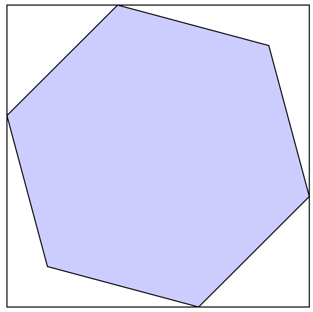


此時由 $PQ=PS$、$\angle XQP=90°-\angle XPQ=\angle WPS$、$\angle XPQ=90°-\angle XQP=\angle WSP$ 知 $\triangle PXQ$ 與 $\triangle SWP$ 全等，因此 $QX=PW$。同理可證得 $YU=WV$，因此 $QX+YU=PW+WV=PV$。

答: (E)

21-25 題，每題 5 分

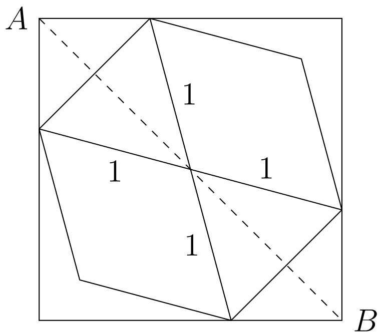
21. 一個邊長為 1 的正六邊形在一個正方形內部，此正六邊形有四個頂點在正方形的邊上、另二個頂點在正方形的對角線上，如右圖所示。請問此正方形的邊長是什麼？



(A) $\sqrt{3}$ (B) $6\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$ (C) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

(D) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$ (E) 2

令 A 為正方形左上角的頂點、B 為正方形右下角的頂點，如圖所示，此時可看出 AB 是由二條斜邊長為 1 的等腰直角三角形斜邊上的高與二條邊長為 1 的正三角形的高所組成的：



因此 $AB = 2\times\frac{1}{2}+2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 1+\sqrt{3}$，即可得知正方形的邊長為 $\frac{1}{\sqrt{2}}AB = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$。

答: (D)

22. 小銘與小仁以數 3 與數 5 開始輪流填加一個數在以下數列的最右側，由小銘先填。

$$3 \quad 5 \quad 15 \quad \boxed{\tfrac{1}{3}} \quad 5 \quad \boxed{\tfrac{1}{15}} \quad \cdots$$

當輪到小銘時，他所填的新數是將前兩項的數相乘所得到的積 (如數列中圓圈內的數)；而輪到小仁時，他所填的新數是將前面第二項的數除以前面一項所得的商 (如數列中方框內的數)。請問此數列的第 2015 項是什麼？

(A) $\frac{1}{15}$ (B) 3 (C) 5 (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{5}$

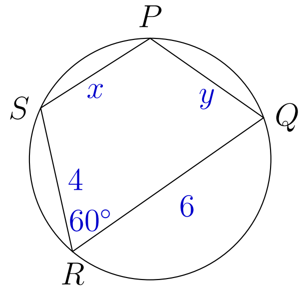
繼續將此數列填寫下去，可得：

$$3 \quad 5 \quad 15 \quad \boxed{\tfrac{1}{3}} \quad 5 \quad \boxed{\tfrac{1}{15}} \quad \tfrac{1}{3} \quad \boxed{\tfrac{1}{5}} \quad \tfrac{1}{15} \quad \boxed{3} \quad \tfrac{1}{5} \quad \boxed{15} \quad 3 \quad \boxed{5}$$

因此這是一個每 12 項循環重複出現的數列。因 $2015 = 12 \times 167 + 11$，故第 2015 項與第 11 項相同，即 $\frac{1}{5}$。

答: (E)

23. 點 P、Q、R、S 在一圓上，$\angle SRQ = 60^\circ$。已知 $RS = 4$、$RQ = 6$、$SP = x$、$PQ = y$，如右圖所示。請問下列哪一項可能是 x、y 之值？

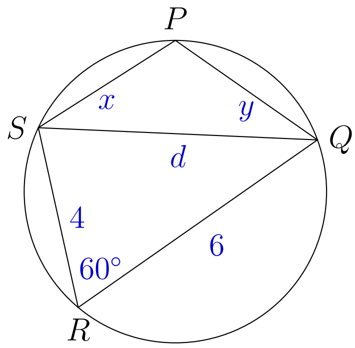


(A) $x = 4$、$y = 2$ (B) $x = y = 3$ (C) $x = y = 4$

(D) $x = 4$、$y = 3$ (E) $x = 5$、$y = 2$

$\boxed{\text{解法 1}}$

連接 SQ 並令 $SQ = d$，則有



因 $PQRS$ 是一個圓內接四邊形，故知 $\angle SPQ = 180^\circ - \angle SRQ = 120^\circ$。此時由餘弦定理可得:

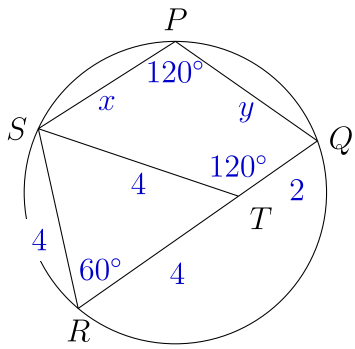
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2xy\cos 120^\circ &= d^2 = 4^2 + 6^2 - 2\times 4\times 6\times \cos 60^\circ \\ x^2 + y^2 + xy &= 16 + 36 - 24 = 28 \\ (x+y)^2 - xy &= 28 \qquad (1) \end{aligned}$$

將選項中的取值逐個代入計算，知僅 $x = 4$、$y = 2$ 可滿足等式。

答: (A)

$\boxed{\text{解法 2}}$

因 $PQRS$ 是一個圓內接四邊形，故知 $\angle SPQ = 180^\circ - \angle SRQ = 120^\circ$。此時可在 RQ 取點 T 使得 $\triangle SRT$ 為正三角形，如圖所示。



觀察四邊形 $PQTS$，可發現當 $x = 4$、$y = 2$ 時可使 $PQTS$ 成為箏形，而 $x = 2$、$y = 4$ 時可使 $PQTS$ 成為平行四邊形。因此選項中僅 $x = 4$、$y = 2$ 可滿足。

答: (A)

24. 有七個正整數 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7$，其中每個數都小於 100，且除了最後一個數外，其它每個數都是下一個數的因數。請問滿足上述條件的數列有多少個？

(A) 3 (B) 7 (C) 4 (D) 6 (E) 1

解法 1

可令 $b_i = \frac{a_{i+1}}{a_i}$ 為連續二項的比值，其中 $1 \leq i \leq 6$，則由題意的條件即可推得 $a_7 = a_1 b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 < 100$，其中 b_i 為大於或等於 2 的數。

- 若 $a_1 \geq 2$，則有 $a_7 \geq 2^7 = 128$，矛盾，因此知 $a_1 = 1$。
- 若 b_i 中有任何一數為大於或等於 4 的數，則有 $a_7 \geq 1 \times 2^5 \times 4 = 128$，矛盾，因此知 $b_i \leq 3$，其中 $1 \leq i \leq 6$。
- 若 b_i 中有二個數等於 3，則有 $a_7 \geq 1 \times 2^4 \times 3^2 = 144$，矛盾。

因此可推得整數組 $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$ 為 $(2,2,2,2,2,2)$ 或是 $(2,2,2,2,2,3)$ 的某一種排列，故一共有 7 種可能的情況。而對於 b_1、b_2、b_3、b_4、b_5、b_6 的每一種可能，都對應出了 a_1、a_2、a_3、a_4、a_5、a_6、a_7 每一種滿足條件的情況。故共有 7 個滿足題意的數列。

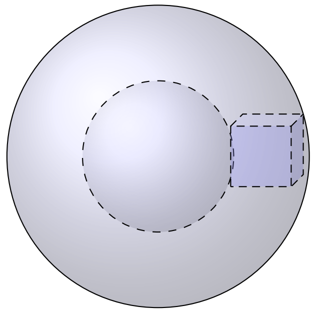
答: (B)

解法 2

可知 a_7 的最小可能值發生在此數列為 1、2、4、8、16、32、64 時，即 $a_7 = 64$。而這一個數列相鄰兩項之間的比為 2，若將其中任意一個更改為 3，可使 $a_7 = 96$，因此共有 6 個數列使 $a_7 = 96$。而若 $a_{k+1} \div a_k$ 之值大於 3 或是其中有二個比大於 2，則會使 $a_7 > 100$。所以合計有 7 個滿足題意的數列。

答: (B)

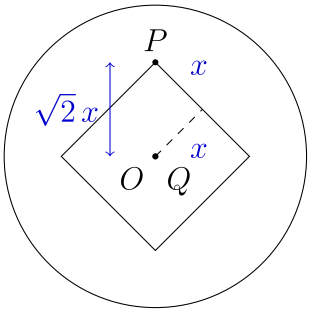
25. 兩個球體有相同的球心，它們的半徑分別為 4 單位與 2 單位，如右圖所示。請問夾在兩球之間的最大正立方體的邊長是什麼？

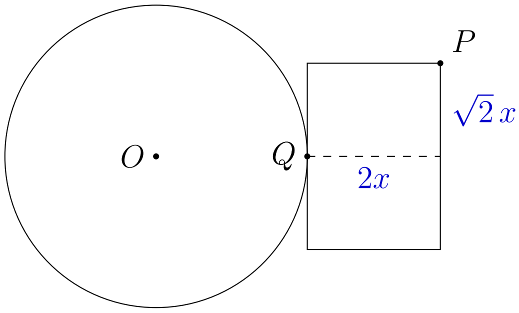


(A) $\frac{6}{5}$ (B) $\frac{1}{3}(\sqrt{19}+1)$ (C) $\frac{\sqrt{21}-2}{3}$

(D) $\frac{2}{3}(\sqrt{22}-2)$ (E) $\frac{12}{5}$

令正立方體的邊長為 $2x$ 且與外球接於點 P、與內球接於點 Q。可知點 Q 為該面的中心而點 P 為正立方體的一個頂點。下圖為關於內球與正立方體的兩個不同方向視圖，其中將點 P 置於上方：





故有

$$(OP)^2 = (2+2x)^2 + (\sqrt{2}\,x)^2 = 4 + 8x + 6x^2$$

因 $OP = 4$，所以

$$\begin{aligned} 6x^2 + 8x + 4 &= 16 \\ 3x^2 + 4x - 6 &= 0 \\ x &= \frac{\sqrt{22}-2}{3} \end{aligned}$$

因此正立方體的邊長為 $2x = \frac{2}{3}(\sqrt{22}-2)$。

答: (D)

問題 26-30 的答案為 000-999 之間的整數，
請將答案填在答案卡上對應的位置。

第 26 題占 6 分，第 27 題占 7 分，第 28 題占 8 分，
第 29 題占 9 分，第 30 題占 10 分。

---

26. (**同 中級卷第 27 題**)

請問有多少個小於 2015 的正整數 n，使得 $\frac{1}{3}+\frac{1}{n}$ 可以被約分成分母小於 n 的分數？

解法 1

可令

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{n}=\frac{n+3}{3n}=\frac{a}{b},$$

其中 $b<n$ 且 $\gcd\{a,b\}=1$。再令最後被約分的公因數為 $k=\gcd(n+3,3n)$，則有 $k=\frac{3n}{b}>\frac{3b}{b}=3$。

因 k 整除 $n+3$，故知它也整除 $3n+9$。然而 k 也整除 $3n$，故 k 是 9 的因數。再因 $k>3$，故可推得 $k=9$，所以有 $9a=n+3$ 與 $9b=3n$，即有 $n=9a-3$ 以及 $b=3a-1<n$。因此 n 的取值可為 6、15、24、33、...。接著可由以下算式驗證所有這樣的 n 都滿足題意：

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9a-3}=\frac{3a-1}{9a-3}+\frac{1}{9a-3}=\frac{3a}{9a-3}=\frac{a}{3a-1}=\frac{a}{b}.$$

為了計算共有多少個 n 滿足題意，需解 $n\le 2014$，其中 $n=9a-3$，而 a 是一個正整數：

$$9a-3\le 2015 \implies 9a\le 2018 \implies a\le 224\frac{2}{9} \implies a\le 224。$$

故知共有 224 個這樣的正整數。

答: (224)

解法 2

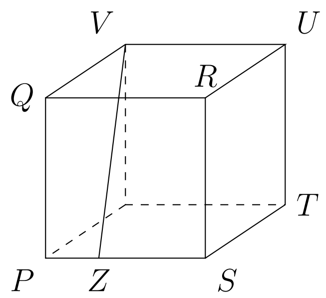
若 n 不是 3 的倍數，則分母 $3n$ 與分子 $n+3$ 沒有公因數，故無法約分，與分母須小於 n 矛盾。故知僅需確認 n 是 3 的倍數的情形。

n	3	6	9	12	15	18	21	24	27	$\cdots$
$\frac{1}{3}+\frac{1}{n}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{9}{24}$	$\frac{10}{27}$	$\cdots$
約分成最簡分數		$\frac{1}{2}$			$\frac{2}{5}$			$\frac{3}{8}$		$\cdots$

因約分僅會發生在 $\frac{n}{3}+1$ 為 3 的倍數時，因此 n 的取值為 6、15、24、33、...，即 n 的取值為 9 的倍數少 3。而 3 的倍數中，小於 2015 的最大數為 2013，且恰比 $2016=224\times 9$ 少 3，故知 n 的取值範圍為從 $6=1\times 9-3$ 到 $2013=224\times 9-3$，所以共有 224 個這樣的正整數。

答: (224)

27. 一個 $100 \times 100 \times 100$ 的正立方體 $PQRSTUVW$ 是由許多 $1 \times 1 \times 1$ 的實心小正立方體構成。點 Z 在稜邊 PS 上，且 $PZ = 33$。請問線段 VZ 穿過多少個 $1 \times 1 \times 1$ 的正立方體內部？



可知在 $VUSP$ 這一個斜切平面上，所切過的小正立方體的斜切面組成了 100×100 的 $1 \times \sqrt{2}$ 矩形網格，而直線 VZ 是尺寸為 33×100 這一個矩形的對角線。因 33 與 100 沒有公因數，故知 VZ 沒有經過任何一個格點，再由 VZ 在一個方向上經過了 32 條格線、另一個方向經過了 99 條格線，故知它穿越了小正立方體 $32 + 99 = 131$ 次，即穿過了 $131 + 1 = 132$ 個 $1 \times 1 \times 1$ 的正立方體內部。

答: (132)

28. (**同 中級卷第 29 題**)

在某車站上，從正中午到午夜，每三分鐘都有一列向南行駛的火車到站，每五分鐘也都有一列向北行駛的火車到站。每一天下午，我步行到此車站的時刻都是隨機的。我搭上最先抵達的火車，無論它是向南或向北行駛。請問我平均必須花費多少秒等火車？

可知從正中午到午夜，每十五分鐘裡，第 0 分鐘、第 3 分鐘、第 5 分鐘、第 6 分鐘、第 9 分鐘、第 10 分鐘、第 12 分鐘與第 15 分鐘都有火車抵達車站。在這些時刻間，共有 2 個一分鐘區間、2 個二分鐘區間與 3 個三分鐘區間。故可得以下狀況：

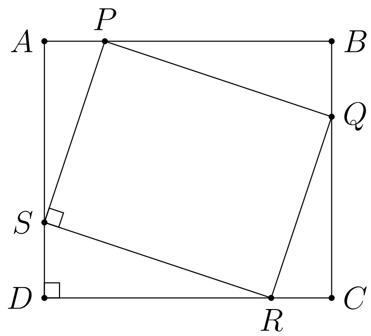
- 在一分鐘區間抵達的機率為 $\dfrac{2 \times 1}{15}$ 且其平均等待時間為 30 秒。
- 在二分鐘區間抵達的機率為 $\dfrac{2 \times 2}{15}$ 且其平均等待時間為 60 秒。
- 在三分鐘區間抵達的機率為 $\dfrac{3 \times 3}{15}$ 且其平均等待時間為 90 秒。

因此我等火車平均必須花費

$$\frac{2}{15} \times 30 + \frac{4}{15} \times 60 + \frac{9}{15} \times 90 = 4 + 16 + 54 = 74\text{秒}。$$

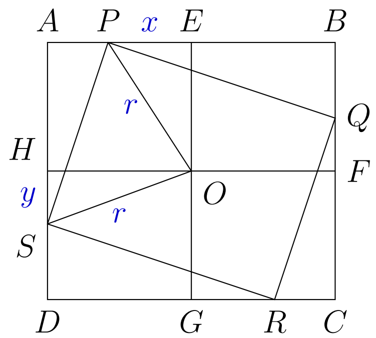
答: (74)

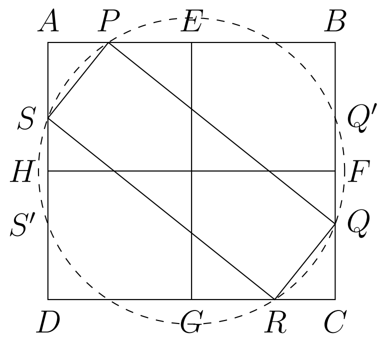
29. 一個 38×32 的矩形 $ABCD$，點 P、Q、R、S 分別為在 AB、BC、CD、DA 邊上的點，如右圖所示。已知 AP、PB、BQ、QC、CR、RD、DS、SA 的長度都是正整數單位長，且 $PQRS$ 為矩形，請問矩形 $PQRS$ 的面積之最大可能值是什麼？



解法 1

可知這兩個矩形有共同的中心點 O，且因 $PR = QS$，故可令 $r = OP = OS$。如圖，令矩形 $ABCD$ 四邊的中點為 E、F、G、H，且各線段長度如圖所標示。若每給定一組 x 與 y 的值，可得 4 種情況，其中 2 種如下圖所示，而另 2 種為其鏡像。





然而在上右圖的情況中，矩形 $PQ'RS'$ 也滿足題設，且因 $\triangle PRS$ 與 $\triangle PRS'$ 有相同的底 PR，但 $\triangle PRS'$ 在 PR 上的高較長，因此 $\triangle PRS'$ 的面積大於 $\triangle PRS$，故知 $PQ'RS'$ 的面積大於 $PQRS$，即上右圖的情況中，$PQRS$ 不可能是最大值發生時的情況。

現觀察上左圖的 $\triangle EOP$，可得 $x^2 + 16^2 = r^2$，以及觀察 $\triangle HOS$，也可得 $y^2 + 19^2 = r^2$。因此有：

$$x^2 - y^2 = 19^2 - 16^2 = 3 \times 35 = 105$$
$$(x + y)(x - y) = 3 \times 5 \times 7$$

其中 $x + y < 35$。因此知：

(i) $x + y = 21$ 且 $x - y = 3$；

(ii) $x + y = 15$ 且 $x - y = 7$。

在 (i) 中，可得知 $x = 13$ 與 $y = 8$，因此 $\triangle APS$ 與 $\triangle CRQ$ 的面積皆為 $\frac{1}{2} \times 6 \times 24 = 72$ 而 $\triangle BQP$ 與 $\triangle DSR$ 的面積皆為 $\frac{1}{2} \times 8 \times 32 = 128$，故 $PQRS$ 的面積為 $38 \times 32 - 2 \times 72 - 2 \times 128 = 816$。

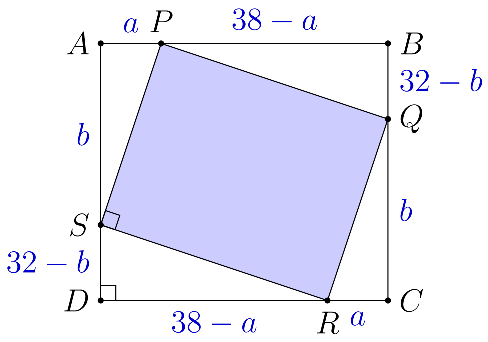
在 (ii) 中，可得知 $x = 11$ 與 $y = 4$，因此 $\triangle APS$ 與 $\triangle CRQ$ 的面積皆為 $\frac{1}{2} \times 8 \times 20 = 80$ 而 $\triangle BQP$ 與 $\triangle DSR$ 的面積皆為 $\frac{1}{2} \times 12 \times 30 = 180$，故 $PQRS$ 的面積為 $38 \times 32 - 2 \times 80 - 2 \times 180 = 696$。

所以矩形 $PQRS$ 的面積之最大可能值是 816。

答: (816)

解法 2

如圖所示方式定義各線段長度，並計算矩形 $PQRS$ 的面積：



$$
\begin{aligned}
\text{矩形 } PQRS \text{ 的面積} &= 38\times 32 - ab - (38-a)(32-b) \\
&= 38b + 32a - 2ab
\end{aligned}
$$

不妨假設 $1 \leq a \leq 19$。因 $\triangle APS$ 與 $\triangle BQP$ 為相似三角形，故有 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{32-b}{38-a}$，化簡即得 $b^2 - 32b + a(38-a) = 0$。因此 b 的解為

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{32 \pm \sqrt{32^2 - 4a(38-a)}}{2} \\
&= 16 \pm \sqrt{256 - a(38-a)}
\end{aligned}
$$

接著直接代入 $a = 1$、...、9 來計算 $256 - a(38-a) = (a-19)^2 - 105$ 的值是否為完全平方數:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$10\ldots19$
$(a-19)^2 - 105$	219	184	151	120	91	64	39	16	-5	< 0
						✓		✓		

可知僅有 $a = 6$、$b = 16 \pm 8$ 以及 $a = 8$、$b = 16 \pm 4$ 可滿足，因此 (a, b) 的解為 $(6, 8)$、$(6, 24)$、$(8, 12)$、$(8, 20)$，其面積依序為 400、816、520、696。所以矩形 $PQRS$ 的面積之最大可能值是 816。

答: (816)

30. 集合 S 是一個由最小為 0、最大為 2015 的相異整數組成的集合。請問在集合 S 內的數之最小可能的平均值是什麼？

$\boxed{\text{解法 1}}$

因集合 S 內的數至少有 0 與 2015，故可假設集合 S 內的數有 $k+2$ 個，其中 k 為整數且滿足 $0 \le k \le 2014$，而為了得到集合 S 內的數之最小可能的平均值，除了 0 與 2015 外的 k 個數要愈小愈好，因此可取 $S = \{0, 1, 2, \ldots, k, 2015\}$。此時集合 S 內的數之平均值為

$$\frac{(0+1+2+\cdots+k)+2015}{k+2} = \frac{\frac{1}{2}k(k+1)+2015}{k+2} = \frac{1}{2}\left(k+2+\frac{4032}{k+2}\right) - \frac{3}{2}. \qquad (\star)$$

此時利用算幾不等式可以得知

$$\frac{1}{2}\left(k+2+\frac{4032}{k+2}\right) \ge \sqrt{(k+2)\times\frac{4032}{k+2}} \qquad \Rightarrow \qquad k+2+\frac{4032}{k+2} \ge 2\sqrt{4032}$$

其中等號成立若且為若 $k+2 = \frac{4032}{k+2}$，即 $k+2 = \sqrt{4032} = 63.49\ldots$，因此 $k = 61.49\ldots$。再因當 $0 \le k \le 2014$ 時，$k+2+\frac{4032}{k+2}$ 為一個以 k 為變數的凸函數，故可推知當限定 k 為正整數時，$(\star)$ 的最小值發生在 $k=61$ 或 $k=62$。
當 $k=61$ 時，集合 S 內的數之平均值為 $\frac{1}{2}\left(63+\frac{4032}{63}\right) - \frac{3}{2} = 62$，而當 $k=62$ 時，集合 S 內的數之平均值為 $\frac{1}{2}\left(64+\frac{4032}{64}\right) - \frac{3}{2} = 62$。故可得知集合 S 內的數之最小可能的平均值是 62。

答: (62)

$\boxed{\text{解法 2}}$

若集合有 n 個元素，為了使所有除了 0 與 2015 外的數愈小與好，現考慮集合 $S_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-2, 2015\}$，其中 $2 \le n \le 2015$。再令 m_n 為 S_n 的平均值，則有

$$m_n = \frac{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2015}{n} = \frac{n^2-3n+4032}{2n}$$

因 $S_{n+1} = S_{n-1} \cup \{n-1\}$，故當 $n-1 < m_n$ 時，知數列 m_2、m_3、m_4、$\cdots$ 會是一個遞減的數列，而當 $n-1 = m_n$ 會是一個常數，其餘的情況則會是一個遞增的數列。現因 $n > 0$，故 $n-1 < m_n$ 等價於 $2n(n-1) < 2nm_n$，因此有：

$$\begin{aligned} 2n^2 - 2n &< n^2 - 3n + 4032 \\ n^2 + n - 4032 &< 0 \end{aligned}$$

觀察 $4032 = 2^6 \times 3^2 \times 7 = 63 \times 64$，可得

$$\begin{aligned} (n-63)(n+64) &< 0 \\ -64 < n &< 63 \end{aligned}$$

故可推得數列 m_2、m_3、m_4、$\cdots$ 會一直遞減到 $m_{63} = m_{64} = 62$ 並且之後即會開始遞增。

答: (62)