

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 [ccmp@seed.net.tw](mailto:ccmp@seed.net.tw)

**Notice:**

**Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.**

**Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN [ccmp@seed.net.tw](mailto:ccmp@seed.net.tw)**

## 中級卷

### 1-10 題，每題 3 分

1. 算式  $20 \times 16$  等於

(A) 320                      (B) 140                      (C) 2016                      (D) 32                      (E) 800

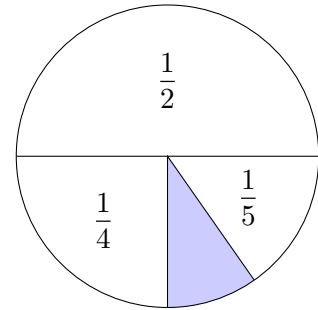
---

$20 \times 16 = 320$ 。

答: (A).

2. 右圖中，陰影部份佔整個圓的幾分之幾？

(A)  $\frac{1}{20}$                       (B)  $\frac{1}{10}$                       (C)  $\frac{1}{2}$   
 (D)  $\frac{1}{60}$                       (E)  $\frac{1}{40}$



---


$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{10 + 5 + 4}{20} = \frac{19}{20}$$

故可得知陰影部份佔整個圓的  $1 - \frac{19}{20} = \frac{1}{20}$ 。

答: (A).

3. 環城公路賽跑於上午 11:15 開始，冠軍選手在同日下午 2:09 抵達終點。請問冠軍選手費時多少分鐘？

(A) 135                      (B) 174                      (C) 164                      (D) 294                      (E) 186

---

從上午 11:15 到下午 2:09 共有  $45 + 120 + 9 = 174$  分鐘。

答: (B).

4. (同 初級卷第 10 題)

請問分數  $\frac{720163}{2016}$  的值符合下列哪一項敘述？

(A) 介於 0 與 1 之間                      (B) 介於 1 與 10 之間                      (C) 介於 10 與 100 之間  
 (D) 介於 100 與 1000 之間                      (E) 大於 1000

---

粗略估計可得： $\frac{720163}{2016} \approx \frac{720000}{2000} = \frac{720}{2} = 360$ 。因此知  $100 < \frac{720163}{2016} < 1000$ 。

而驗算可得  $201600 < 720163 < 2016000$ ，故有  $100 < \frac{720163}{2016} < 1000$ 。

答: (D).

5. 算式  $(1 \div 2) \div (3 \div 4)$  等於

- (A)  $\frac{2}{3}$                       (B)  $\frac{3}{2}$                       (C)  $\frac{3}{8}$                       (D)  $\frac{1}{6}$                       (E)  $\frac{1}{24}$

$$\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}。$$

答: (A).

6. 一個數的 0.75% 等於 6，請問這個數是什麼？

- (A) 800                      (B) 300                      (C) 1200                      (D) 400                      (E) 100

*解法 1*

令這個數為  $x$ ，則有  $\frac{3}{4} \times \frac{1}{100} \times x = 6$ ，化簡可得  $\frac{x}{400} = 2$ ，因此  $x = 800$ 。

答: (A).

*解法 2*

可知這個數的 0.25% 為 6 的三分之一，即 2，因此這個數的 1% 是 8，所以這個數的 100% 是 800。

答: (A).

7. (同 初級卷第 16 題)

在以下算式中，字母  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$  代表數 1、2、3、4、5 之一，但不一定依此順序。

$$A \times B + C \times D + E.$$

請問此算式之最大可能值是什麼？

- (A) 24                      (B) 27                      (C) 26                      (D) 51                      (E) 25

可知數  $X \geq 2$ 、 $Y \geq 2$  時，恆有  $X \times Y + 1$  大於  $1 \times X + Y = X + Y$ 。因此可得知恆可交換算式  $A \times B + C \times D + E$  中的數使得  $E = 1$  而得到最大值。故只需考慮以下三種情況：

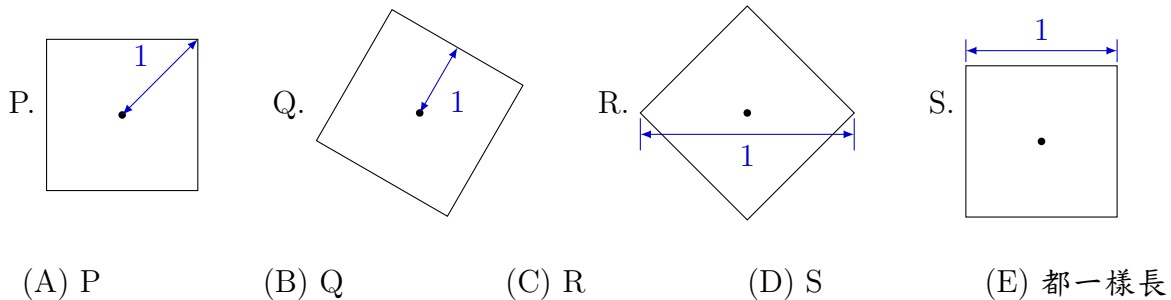
- $2 \times 3 + 4 \times 5 + 1 = 27$
- $2 \times 4 + 3 \times 5 + 1 = 24$
- $2 \times 5 + 3 \times 4 + 1 = 23$

故知此算式之最大可能值為 27。

答: (B).

## 8. (同高級卷第4題)

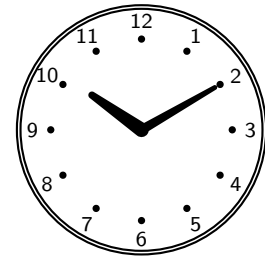
在下圖的這些正方形中，標記的長度都是1單位長。請問哪一個正方形的周長最長？



正方形 P、Q、R、S 的周長依序為  $4\sqrt{2}$ 、8、 $2\sqrt{2}$  與 4，故正方形 Q 的周長最長。  
答: (B).

## 9. 在一個鐘面上，通過 9 與 3 連接一條直線、通過 12 與 8 連接另一條直線。請問這二條直線所夾的銳角是什麼？

- (A)  $45^\circ$                       (B)  $60^\circ$                       (C)  $50^\circ$   
(D)  $30^\circ$                       (E)  $22.5^\circ$

*解法 1*

可知連接 10 與 2 的直線跟連接 9 與 3 的直線平行、連接 2 與 6 的直線跟連接 12 與 8 的直線平行，若再作連接 6 與 10 的直線，可得一個等邊三角形，因此可判斷出所求的二條直線所夾的銳角是  $60^\circ$ 。

答: (B).

*解法 2*

可知連接 1 與 7 的直線跟連接 12 與 8 的直線平行，因此這條直線跟連接 9 與 3 的直線所夾的銳角即為所求的角度。而因連接 1 與 7 的直線跟連接 9 與 3 的直線都經過鐘面的圓心，所以這二條直線所夾的銳角是  $\frac{2}{12} \times 360^\circ = 60^\circ$ 。

答: (B).

## 10. 在一個盒子內有 3 枝藍色筆、4 枝紅色筆、5 枝黃色筆。若不看盒子，逐一從盒子內取出筆，請問至少要從盒子取出多少枝筆才能保證三種顏色的筆都有？

- (A) 8                      (B) 9                      (C) 10                      (D) 11                      (E) 12

在至少有一種顏色的筆都沒有取出的情況下，最多可取出  $4 + 5 = 9$  枝筆，此情況會發生在將 4 枝紅色筆、5 枝黃色筆都取出時。故至少要從盒子取出 10 枝筆才能保證三種顏色的筆都有。

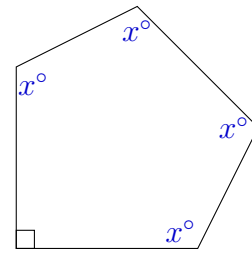
答: (C).

## 11-20 題，每題 4 分

11. (同高級卷第 7 題)

右圖中，請問  $x$  之值等於什麼？

- (A) 120                      (B) 108                      (C) 105  
(D) 135                      (E) 112.5



解法 1

由五邊形的外角和可得知  $360 = 90 + 4 \times (180 - x)$ ，化簡得  $180 - x = \frac{270}{4} = 67.5$ ，因此  $x = 180 - 67.5 = 112.5$ 。

答: (E).

解法 2

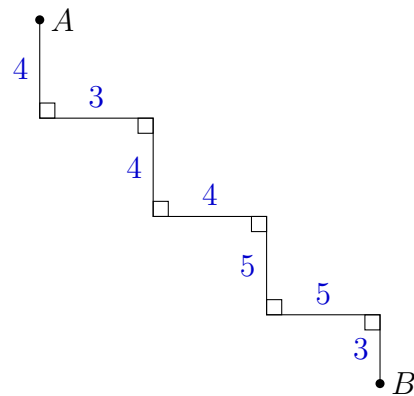
由五邊形的內角和可得知  $3 \times 180 = 90 + 4x$ ，因此  $x = \frac{450}{4} = 112.5$ 。

答: (E).

12. (同高級卷第 8 題)

右圖中，每個拐角都是直角，標記在線段旁的數是此線段的長度。請問線段  $AB$  的長度為多少單位？

- (A) 20                      (B) 28                      (C)  $10 + 9\sqrt{2}$   
(D)  $8 + 9\sqrt{2}$                       (E) 16

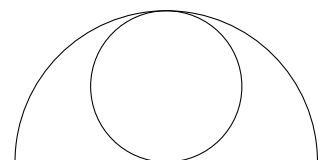


令  $C$  點在  $A$  點的正下方且也同時在  $B$  點的正左方，則直角三角形  $ABC$  的兩股長為 16 與 12，且若令其斜邊長為  $x$ ，則有  $x^2 = 16^2 + 12^2 = 400$ ，因此知  $x = 20$ 。

答: (A).

13. 一個半徑為 1 m 的小圓內切於一個半徑為 2 m 的半圓。請問在這個半圓內部但不在這個小圓內部的區域之面積為多少  $\text{m}^2$ ？

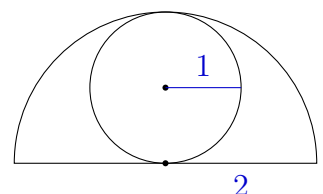
- (A)  $2\pi$                       (B)  $\pi - 1$                       (C) 2  
(D)  $2\pi - 1$                       (E)  $\pi$



可知半圓的面積為  $\frac{1}{2}\pi \times 2^2 = 2\pi$ ，

而小圓的面積為  $\pi$ 。

故所求之面積為  $2\pi - \pi = \pi$ 。



答: (E).

14. 請問滿足  $4^{n+1} = 2^{10}$  的  $n$  值是什麼?

- (A) 9 (B) 8 (C) 4 (D) 10 (E) 2

可知  $2^{10} = (2^2)^5 = 4^5$ ，故  $4^{n+1} = 4^5$ ，即有  $n+1 = 5$ ，因此  $n = 4$ 。

答: (C).

15. (同 初級卷第 15 題)

只有 A、B、C 三人參加的一系列之運動比賽，每一個項目的第一名獲得積分 3 分、第二名獲得積分 2 分、第三名獲得積分 1 分。經過數項比賽後，A 共得 8 分、B 共得 11 分、C 共得 5 分。請問 A 有幾個項目比賽得到第二名?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

可知在每一項比賽後三人共得積分 6 分，而現已知三人的總積分為  $8 + 11 + 5 = 24$  分，故可知共有 4 個運動項目。因 B 共得 11 分，故可判斷出 B 必定是獲得 3 項比賽第一名、1 項比賽第二名；而因 C 僅得 5 分，故可判斷出 C 沒有在任何一項中取得第一名，否則他至少會得到 6 分，所以可推得 C 僅獲得 1 項比賽的第二名。此時即可判斷出 A 共獲得 2 個項目比賽的第二名。

答: (C).

16. 請問使得  $\frac{2016}{N}$  為完全平方數的最小  $N$  值是什麼?

- (A) 14 (B) 2 (C) 56 (D) 12 (E) 7

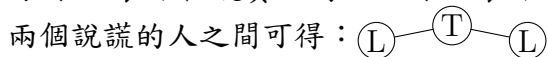
可知當  $N$  值為最小時，數  $\frac{2016}{N}$  將會是 2016 的最大完全平方因數。作因數分解，可得  $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7 = 2 \times 7 \times (2^2 \times 3)^2$ ，故知  $12^2$  是 2016 的最大完全平方因數，此時  $N = 14$ 。

答: (A).

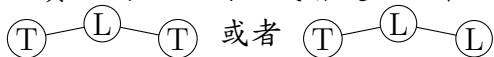
17. 五個人圍坐在一圓桌。有些人恆說實話，而其他人則恆說謊話。每個人都宣稱在他兩旁的人都是說謊者。請問他們之中有多少人恆說實話?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

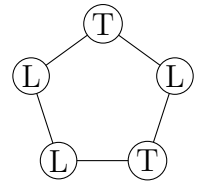
可用 T 表示恆說實話的人、用 L 表示恆說謊話的人。由恆說實話的人表示他坐在兩個說謊的人之間可得：



由恆說謊話的人表示他坐在兩個說謊的人之間可得知有二種情況：他坐在兩個恆說實話的人之間，或者是他坐在一個恆說實話與一個恆說謊話的人之間，此即：



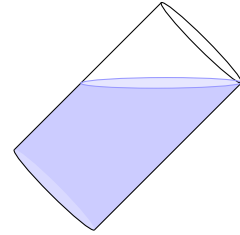
因此不可能出現相鄰的二個人都是恆說實話的人，也不可能出現連續三個人都是恆說謊話的人。所以可得知至少有一個恆說實話的人，且他坐在兩個恆說謊話的人之間。此時可再判斷出最後二人不可能同時為說實話的人，否則會有相鄰的二個人都是恆說實話的人；也不可能同時為說謊話的人，否則會有連續四個人都是恆說謊話的人。因此最後的二個人必是一個恆說實話、另一個恆說謊話。故總共有 3 個恆說謊話的人、2 個恆說實話的人。



答: (C).

18. 一個圓柱體杯子的內部直徑為 6 cm、高為 11 cm。當此杯子裝滿水後傾斜  $45^\circ$ ，導致有些水溢出，如右圖所示。請問杯子內剩下多少的水量？

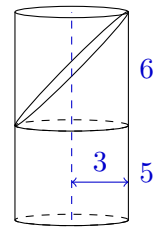
- (A)  $48\pi$  mL                      (B)  $45\pi$  mL                      (C)  $66\pi$  mL  
(D)  $72\pi$  mL                      (E)  $63\pi$  mL



如圖，可判斷出杯子此時剩下的水量相當於一個高為 5 cm 的圓柱體水量與一個高為 6 cm 的圓柱體一半水量之和。故剩下的水量為

$$V = \pi \times 3^2 \times 5 + \frac{1}{2} \times \pi \times 3^2 \times 6 = 45\pi + 27\pi = 72\pi$$

因  $1\text{ cm}^3 = 1\text{ mL}$ ，所以剩下的水量為  $72\pi$  mL。



答: (D).

19. (同 高級卷第 15 題)

十位學生參加一項包含 20 道試題的測驗。其中二位學生答對 8 題、一位學生答對 9 題，其餘的七位學生每人都至少答對 10 題且這七位學生平均的答對題數為一整數。若這十位學生平均的答對題數也為一整數，請問這個整數是什麼？

- (A) 10                      (B) 11                      (C) 12                      (D) 13                      (E) 14

假設其餘的七位學生平均的答對題數為  $m$ ，因為本測驗共有 20 道題且這七位學生每人都至少答對 10 題，故  $10 \leq m \leq 20$ ，則十位學生平均的答對題數為

$$\frac{8 + 8 + 9 + 7m}{10} = \frac{25 + 7m}{10}$$

因此知  $25 + 7m$  可被 10 整除，所以  $m$  為 5 的奇數倍，即  $m$  為 15。所以這十位學生平均的答對題數為  $\frac{25 + 7 \times 15}{10} = 13$ 。

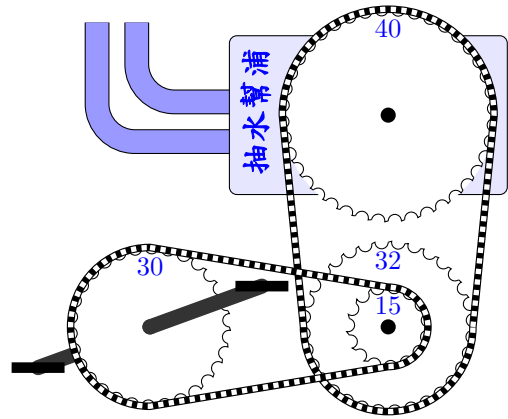
答: (D).

20. 右圖所示為利用腳踏車零件組成的腳踏動力抽水幫浦。

它的踏板處的輪盤有 30 齒以一鏈條連結另一個 15 齒的輪盤。在與 15 齒輪盤同一輪軸上有一個 32 齒的輪盤，它以一鏈條連結幫浦上 40 齒的輪盤。

當踏板處轉動 100 圈整時，請問在幫浦處的輪盤轉動幾圈？

- (A) 160            (B) 250            (C) 107  
(D) 93            (E)  $37\frac{1}{2}$



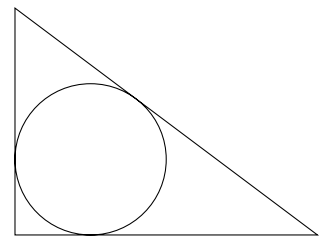
當踏板處轉動 100 圈整時，共轉動了  $100 \times 30 = 3000$  齒，因此 15 齒的轉盤轉了  $3000 \div 15 = 200$  圈，即 32 齒的轉盤轉了 200 圈，故它轉動了  $200 \times 32 = 6400$  齒，因此幫浦處的轉盤轉了  $6400 \div 40 = 160$  圈。

答: (A).

21-25 題，每題 5 分

21. 一位園丁打算在一塊兩股長為 6 m 與 8 m 的直角三角形狀草地之內部建造一個圓形的水池。請問可以在此草地內建造的水池之最大半徑為多少 m？

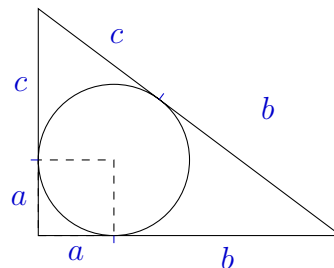
- (A)  $2\sqrt{2} - 1$     (B) 2            (C) 4            (D) 3            (E)  $2\sqrt{2}$



解法 1

因圓外一點與此圓有二條切線，而這一點與二切點之距離相等，如圖所示，故可得：

$$\begin{aligned} a + b &= 8 \\ a + c &= 6 \\ b + c &= \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \\ 2a + 2b + 2c &= 24 \\ a + b + c &= 12 \end{aligned}$$



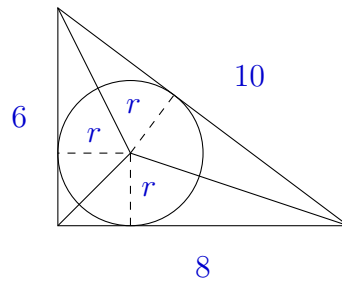
因此  $a = 2$ 、 $b = 6$ 、 $c = 4$ 。而此為直角三角形，故圓的半徑為  $a = 2$ 。

答: (B).



## 解法 2

由勾股定理知此直角三角形的三邊長為 6、8、10 且其面積為  $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24 \text{ m}^2$ 。接著可如下圖所示之方式分成三個三角形，面積分別為  $4r$ 、 $3r$ 、 $5r$ 。



故有  $12r = 24$ ，即  $r = 2$ 。

答: (B).

22. 有 10 個字母排成一列，排列規則如下：

- 字母  $P$  只能緊隨在  $Q$  或  $R$  之後。
- 字母  $Q$  只能緊隨在  $R$  或  $S$  之後。
- 字母  $R$  只能緊隨在  $S$  或  $T$  之後。
- 字母  $S$  只能緊隨在  $T$  或  $P$  之後。
- 字母  $T$  只能緊隨在  $P$  或  $Q$  之後。

請問有多少種可能的排列方法使得第一、第四、第十個字母都為  $Q$ ？

- (A) 63                      (B) 39                      (C) 32                      (D) 45                      (E) 36

## 解法 1

若把字母  $P$ 、 $Q$ 、 $R$ 、 $S$ 、 $T$  依序當作數 0、1、2、3、4，則排序規則即為在模 5 之下，數  $m$  的後面只能是  $m+1$  或  $m+2$ 。若將排出的序列以模 5 之下的數表示為  $(a_1, a_2, \dots, a_{10})$ ，則觀察以下的差

$$(d_1, d_2, \dots, d_9) = (a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_{10} - a_9) \pmod{5}.$$

可知這個九元數組內的數都是 1 或 2。現已知第一、第四、第十個字母都為  $Q$ ，故  $d_1 + d_2 + d_3$  之和一定可被 5 整除且  $d_4 + d_5 + d_6 + d_7 + d_8 + d_9$  也一定可被 5 整除。可知前者成立的充要條件為  $d_1$ 、 $d_2$ 、 $d_3$  中有二個數為 2 而另一個數為 1，故有 3 種可能的方式；後者成立的充要條件為  $d_4$ 、 $d_5$ 、 $d_6$ 、 $d_7$ 、 $d_8$ 、 $d_9$  中有四個數為 2 而另二個數為 1，故有  $\binom{6}{4} = 15$  種可能的方式。因此  $(d_1, d_2, \dots, d_9)$  共有  $3 \times 15 = 45$  種可能，而每一種可能都對應出一組  $(a_1, a_2, \dots, a_{10})$ 。

答: (D).

## 解法 2

此滿足題意的序列為



可將規則中，可跟隨在字母之後的關係以如圖所示之方式用單、雙箭頭連接，其中用單箭頭表示單跨步、雙箭頭表示雙跨步。

根據規則將從一個字母移動到下一個字母的路徑畫出，如圖所示。

若將單跨步視為 +1、雙跨步視為 +2，則任何一條從一個字母沿箭頭方向走回到出發的字母之路徑的和一定是 5 的倍數。

故對於序列中，前四個字母為從  $Q$  出發經過三次移動後回到  $Q$ ，一定是由一個單跨步與二個雙跨步所組成的路徑，可觀察出共有 3 種可能： $1+2+2$ 、 $2+1+2$ 、 $2+2+1$ ，即  $QRT$ 、 $QST$ 、 $QSP$ 。

對於序列中，後七個字母為從  $Q$  出發經過六次移動後回到  $Q$ ，此路徑的和至少為 6、至多為 12，故必為 10，因此一定是由二個單跨步與四個雙跨步所組成的路徑，可得共有以下的可能：

112222	121222	122122	122212	122221
211222	212122	212212	212221	221122
221212	221221	222112	222121	222211

即有 15 種方式，此數量也可由公式  $\binom{6}{2} = 15$  得到。

因此共有  $3 \times 15 = 45$  種可能的排列。

答: (D).

23. 小思每天搭乘回家的火車通常在下午 5:30 抵達她家的站，接著她搭乘小倫從家裡開來火車站接她的汽車回家。某日，她搭乘早一班火車於下午 5:00 抵達她家的站，她決定朝小倫從家裡開車來車站的方向步行。小倫從家中準時出發以便於下午 5:30 抵達車站，但這一天他在途中接到小思後比平常早 10 分鐘到家。請問在小倫接到她之前，小思共行走了多少分鐘？

(A) 20                      (B) 30                      (C) 25                      (D) 10                      (E) 15

因為他們比平常早 10 分鐘到家，故可知小倫來回各少行駛  $10 \div 2 = 5$  分鐘，所以小倫是在下午 5:25 接到小思，而非下午 5:30。再因小思從下午 5:00 即開始步行，故她共行走了 25 分鐘。

答: (C).

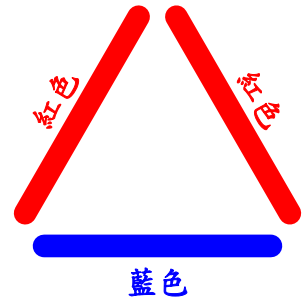
## 24. (同國小高年級卷第 29 題、初級卷第 27 題)

現有非常多的連接棒，它共有五種不同的顏色，打算利用三根連接棒構造儘可能多顏色互相不同的等邊三角形。右圖為其中一個例子。

兩個三角形如果經過旋轉或翻轉可以成為另一個，則視它們為相同的三角形。

請問總共可以構造出多少種不同的三角形？

- (A) 35      (B) 5      (C) 20      (D) 56      (E) 10



將三角形塗色有以下三種情況：

- (i) 三條邊的顏色都相同，共有 5 種可能。
- (ii) 二條邊的顏色相同、另一條邊的顏色不同，共有  $5 \times 4 = 20$  種可能。
- (iii) 三條邊的顏色都兩兩互不相同，共有  $\frac{5 \times 4 \times 3}{6} = 10$  種可能。

故總共有  $5 + 20 + 10 = 35$  種不同的三角形。

答: (A).

注: 在 (iii) 的算式中，是根據第一條邊有 5 種選擇、第二條邊有 4 種選擇、第三條邊有 3 種選擇，故可得  $5 \times 4 \times 3 = 60$  種可能。但每一個所選出的三邊顏色為  $xyz$  的情況，都出現以下 6 種情況  $xyz$ 、 $xzy$ 、 $yxz$ 、 $yzx$ 、 $zxy$ 、 $zyx$ ，故僅有  $60 \div 6 = 10$  種滿足題意的三角形。此即為從  $n$  個物品中選取  $m$  個物品的選擇方法數的一般公式  $\binom{n}{m}$  之想法。

## 25. 一個超級斐波那契數列是一列具有以下性質的正整數：從第三項起，每一項都等於前面所有項之總和。例如：

$$1, 4, 5, 10, \dots$$

請問有多少個以 1 為首項的超級斐波那契數列其中的某一項包含有 2016？

- (A) 1      (B) 3      (C) 5      (D) 7      (E) 9

可判斷出超級斐波那契數列各項的取值會被前二項所決定。令前二項依序為 1、 $x$ ，則接下來各項依序為：

$$1, x, (1+x), 2(1+x), 4(1+x), 8(1+x), \dots$$

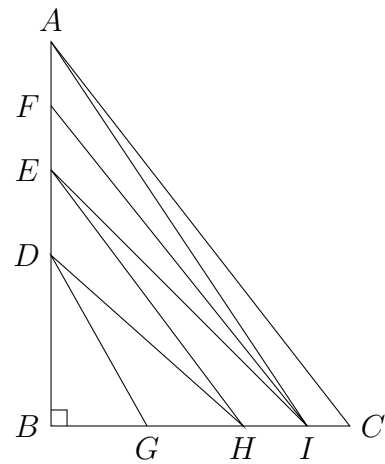
因為前面幾項之總和即為它們之中最後一項的 2 倍，故從第三項起，其形式皆為  $2^k(1+x)$ ，其中  $k \geq 0$ 。而若  $2016 = 2^5 \times 63$  為其中的某一項，則  $k$  的可能取為共有 6 個： $k = 5, 4, 3, 2, 1, 0$ ，此即依序對應出了  $x$  的 6 個可能取值： $x = 62, 125, 251, 503, 1007, 2015$ 。注意到  $x = 2016$  是另一種可能的情況，故共有 7 個滿足題意的超級斐波那契數列。

答: (D).

問題 26-30 的答案為 000-999 之間的整數，  
請將答案填在答案卡上對應的位置。

第 26 題占 6 分，第 27 題占 7 分，第 28 題占 8 分，  
第 29 題占 9 分，第 30 題占 10 分。

26. 直角三角形  $ABC$  的面積為  $2016 \text{ cm}^2$ ，直線  $AI$ 、 $IF$ 、 $IE$ 、 $EH$ 、 $HD$ 、 $DG$  將它分割為 7 個等面積的小三角形，如圖所示。已知三角形  $BIE$  為等腰三角形，請問  $BG$  的長度為多少  $\text{cm}$ ？



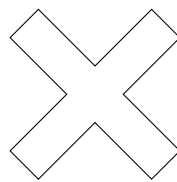
可知所分割出的七個小三角形之面積都是  $\frac{2016}{7} = 288 \text{ cm}^2 = 2 \times 12^2$ ，故三角形  $BIE$  的面積為  $8 \times 12^2 = \frac{1}{2} \times 48^2$ ，此即可推得  $BE = BI = 48 \text{ cm}$ 。

而三角形  $BHD$  的面積為三角形  $BHE$  的面積之  $\frac{2}{3}$  倍，所以知  $BD = \frac{2}{3}BE$ ，即  $BH = 32 \text{ cm}$ 。

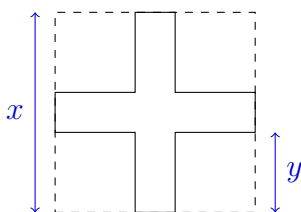
三角形  $BDG$  的面積為  $\frac{1}{2} \times BG \times BD = \frac{1}{2} \times BG \times 32 = 288 \text{ cm}^2$ ，可得  $BG = \frac{288}{16} = 18 \text{ cm}$ 。

答: (018).

27. 一個四臂都等長且對稱的十字形之面積為  $2016 \text{ cm}^2$ ，它的每一條邊都是整數  $\text{cm}$ 。請問滿足上述條件的十字形之最小周長是多少  $\text{cm}$ ？



可將此十字形視為一個大正方形移除位於四個角落且全等的小正方形後所留下的圖形。由題意知可設大正方形的邊長為整數  $x$ 、四個小正方形的邊長都是整數  $y$ 。則由下圖得：



$$\begin{aligned} \text{面積} &= x^2 - 4y^2 = (x + 2y)(x - 2y) = 2016 \\ \text{周長} &= 4x \end{aligned}$$

因此可判斷出  $x + 2y$  與  $x - 2y$  都是 2016 的因數，且其差為  $4y$ 。

因要找出十字形之最小周長，故要使  $x$  儘可能地小，此亦將導致  $y$  也必須儘可能地小，此即找出兩個乘積為 2016 且儘可能互相接近的數。

可知滿足上述條件之差最接近的二個數為 42 與 48，但此時  $y$  不為整數，故不合。次接近的數為 36 與 56，此時  $y = \frac{56-36}{4} = 5$  為整數滿足題意，且由  $x + 2y = 56$ 、 $x - 2y = 36$  可得知  $2x = 92$ ，因此十字形之最小周長為 184。

答: (184).

28. 小馬班上的十位學生同時參加一項數學測驗，其他九位同學的成績為 82、83、85、89、90、92、95、97、98 分，且小馬的成績為一個正整數。已知老師把小馬的成績算錯了，當老師把小馬的成績修正後，全班成績的平均值與中位數都增加 0.5 分。

小馬的正確成績有二種可能的分數，請問這兩個分數的總和是多少分？

由更正成績後，這 10 個成績的平均分數增加 0.5 分可得知總分增加了 5 分，由於沒有其他人的分數有更動，故小馬的分數增加了 5 分。若小馬更正後的分數為 89 分或以下，或他未更正前的成績為 92 分或 92 分以上，則全班成績的中位數不會變化，故可判斷出小馬未更正前的成績是介於 85 分與 91 分之間（含 85 分與 91 分）。

故可將可能的情況列表如下：

更正前的成績	更正後的成績	更正前的中位數	更正後的中位數
85	90	89.5	90
86, 87, 88, 89	91, 92, 93, 94	89.5	大於 90
90	95	90	91
91	96	90.5	91

可發現僅第一個情況與最後一個情況的中位數變化為 0.5 分，所以小馬可能的正確成績之總和為  $90 + 96 = 186$ 。

答: (186).

29. (同高級卷第 26 題)

某高中的樂隊可以排列為一個矩形陣列，使得每一列恰有 3 位男孩、每一行恰有 5 位女孩。樂隊所排出的陣列有許多不同可能的大小，請問所有這些可能大小的陣列的人數之總和是什麼？

令所排出的矩形陣列共有  $r$  列、 $c$  行，則此陣列共有  $rc$  位學生。

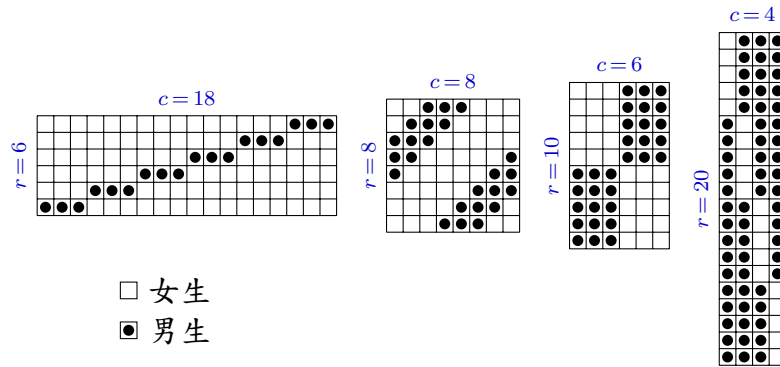
且由題意知共有  $3r$  位男孩、 $5c$  位女孩，故學生數為  $3r + 5c$ 。

此時即可得  $rc - 3r - 5c = 0$ ，此等價於  $(r - 5)(c - 3) = 15$ 。

因此數對  $(r - 5, c - 3)$  可能的取值為  $(1, 15)$ 、 $(3, 5)$ 、 $(5, 3)$ 、 $(15, 1)$ 。注意到 15 雖也可表示成二個負整數之積，但此會導致  $r \leq 0$  或  $c \leq 0$ ，與題意矛盾。

所以可得知  $(r, c)$  的解有  $(6, 18)$ 、 $(8, 8)$ 、 $(10, 6)$ 、 $(20, 4)$ ，即對應的人數  $rc$  依序為 108、64、60、80。

而對於每一種解的可能情況，可將男生、女生安排如下：

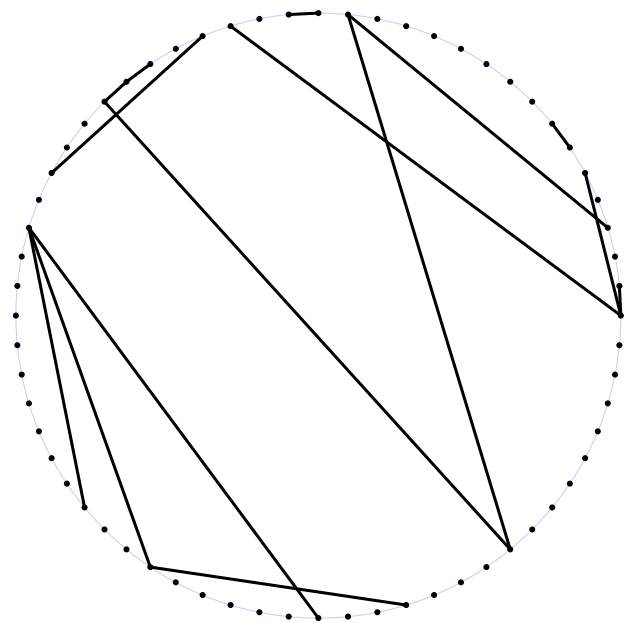


故所有這些可能大小的陣列之人數的總和為  $108 + 64 + 60 + 80 = 312$ 。

答: (312).

30. (同 高級卷第 29 題)

在一個圓周上等距離地取 64 個點，可知它們之間共可能畫出  $64 \times 63 \div 2 = 2016$  條弦。  
在此圓上畫出其中一些弦，要求每一條弦都不可從中切過多於一條其它的弦。  
請問最多可以畫出多少條弦？



解法 1

可在由這些點所形成的 64 邊形中，選擇一條弦後，將與這條弦平行的 31 條弦畫出而將此 64 邊形分成 31 個梯形。接著將每一個梯形的兩條對角線都畫出，此時可得  $64 + 30 + 2 \times 31 = 156$  條弦。

現證明此數量此即為最大值，

首先，當圓上有  $n$  個點時，其中  $n$  為偶數，令  $M_n$  為可畫出最多條弦時的弦數，則由相同的作法知  $M_n \geq n + \frac{n}{2} - 2 + 2 \times (\frac{n}{2} - 1) = \frac{5}{2}n - 4$ 。

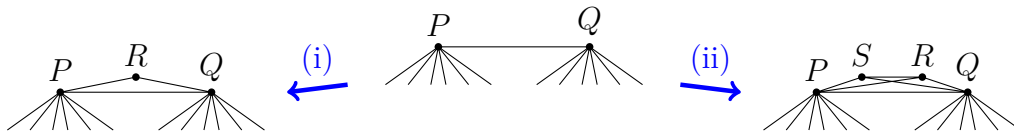
引理 對於所有的偶數  $n$ ，恆有  $M_n = \frac{5}{2}n - 4$ 。

明顯可知當  $n = 4$  時， $M_n = 6 = \frac{5}{2} \times 4 - 4$ ，即此引理成立。



對於邊上已有弦  $PQ$  的情況時，考慮以下兩種添加弦的方式：

- (i) 圓周上在點  $P$  與  $Q$  之間，加上一個點  $R$ ，此時可作兩條弦  $PR$  與  $QR$ 。
- (ii) 圓周上在點  $P$  與  $Q$  之間，加上二個點  $R$ 、 $S$ ，此時可作五條弦  $PR$ 、 $PS$ 、 $QR$ 、 $QS$ 、 $RS$ 。

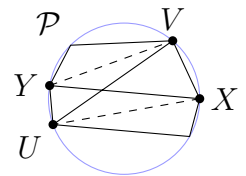


可發現 (ii) 可添加的弦數較多，因此從 4 個點的圖開始，並遵循 (i) 與 (ii) 添加弦時，若能使利用 (ii) 的方法儘可能多，則可得到最多的弦數。而對於偶數點時，可全部都利用 (ii) 的方法，此時所得到的圖共有  $6 + 5 \times \frac{1}{2}(n-4) = \frac{5}{2}n - 4$  條弦。

此時唯一的不確定性為僅利用 (i) 與 (ii) 時，是否真的能夠從  $n = 4$  開始來構造出最多弦數發生的情況。

假設已構造出最多弦數發生的圖。則圖上任何一條弦會是  $n$  邊形的一條邊，或是一條相交的弦，或是一條未相交的弦。而一條未相交的弦會將  $n$  邊形切成邊數較少的圖形。若所切出的圖形中有三角形與四邊形，則  $n$  邊形必可利用 (i) 與 (ii)，每操作一次而增加一個多邊形而得到。

現假設有一個依此方式構造出的多邊形  $P$ ，此多邊形至少有 5 條邊且每條邊都是沒有交點的弦。因為此時的圖是有最多滿足題意的弦之情況，所以圖中存在一條弦  $XY$  與另一條弦  $UV$  相交，否則  $XY$  必可將  $P$  再切成邊數更少的多邊形。而任何一條與四邊形  $XUYV$  的任一條邊有交點的弦都必會與  $XY$  或  $UV$  有交點，即與二條弦有交點，



故這樣的弦是不允許出現的。因此四邊形  $XUYV$  的每一條邊都不會與其它的弦有交點，所以這樣的邊在圖中一定是沒有交點的弦（因此時的圖是有最多滿足題意的弦之情況）。現因為  $P$  至少有 5 條邊，所以  $XUYV \neq P$ ，因此  $XUYV$  至少有一條邊不是  $P$  的邊，不妨令這條邊為  $XU$ ，則  $XU$  是一條沒有交點的弦，並將  $P$  切成邊數更少的多邊形，矛盾。故  $P$  至多有 4 條邊。

綜上所述，可以得知任何一個有最多滿足題意的弦之圖都必是由 4 點的圖依照 (i) 與 (ii) 的方法所構造出來的。當  $n$  為偶數時，則僅利用 (ii) 即可構造出最多的弦之圖，此時  $M_n = \frac{5}{2}n - 4$ 。因此可推知  $M_{64} = 160 - 4 = 156$ 。

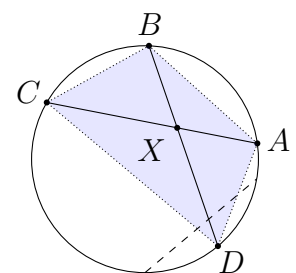
答: (156).

### 解法 2

如同解法 1，可得  $64 + 30 + 2 \times 31 = 156$  條弦。

現證明此數量此即為最大值，假設已經畫出此最大數量的弦，即無法再添加任何一條弦。事實上，所有不會與其他弦相交的弦都必須被畫出，此包括了正 64 邊形的所有邊。此也表示只有頂點全在圓周上的多邊形與內部沒有弦的三角形，否則可以再畫一條對角線。

如圖，若其中兩條弦  $AC$  與  $BD$  相交在內部的點  $X$ ，則不可再有其它的弦與  $AC$ 、 $BD$  相交，故可判斷出不會有其它的弦經過四邊形  $ABCD$ ，所以弦  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$ 、 $DA$  不會再與其它的弦相交，故它們都必須被選入。此時  $ABCD$  為所有的邊與對角線都被繪出，稱之為「全繪出四邊形」。



現可利用歐拉公式  $f + v = e + 2$ 。若把此圖視為平面圖形，其中頂點包括原來的 64 個點與交點，其邊包括沒有被其它弦切過的弦與被其它弦切為二段的弦。我們可得三種類型的面：64 邊形的外部、全繪出四邊形所得出的四個三角形、三個頂點都在圓周上的三角形。假設有  $q$  個繪出的四邊形與  $t$  個三角形。則

- 總頂點數為  $v = 64 + q$ ，此即 64 個原來的頂點加上每個全繪出四邊形的一個交點。

- 總面數為  $f = 1 + t + 4q$ ，此即 64 邊形外部、 $t$  個三角形、每個全繪出四邊形的四個三角形。
- 總邊數為  $e$ ，其中  $2e = 64 + 3(t + 4q)$ ，此和為將每個面的所有邊數相加，每條邊都被算了二次。
- 總弦數為  $c = e - 2q = 32 + \frac{3}{2}t + 4q$ ，因為每個全繪出四邊形都多算二條弦。

故由歐拉公式  $f + v = e + 2$ ：

$$\begin{aligned} 0 &= (f + v) - (e + 2) = (65 + t + 5q) - (34 + \frac{3}{2}t + 6q) \\ &= 31 - \frac{1}{2}t - q \\ c &= 32 + \frac{3}{2}t + 4(31 - \frac{1}{2}t) \\ &= 156 - \frac{1}{2}t \end{aligned}$$

因此弦數的最大值為 156，且此值發生在  $q = 31$ 、 $t = 0$  時。

答: (156).

### 解法 3

如同解法 1，可得  $64 + 30 + 2 \times 31 = 156$  條弦。

現證明此數量此即為最大值，假設已將滿足題意的最多弦繪出，即所繪出的弦中，沒有與兩條或更多的弦相交，或是可與一條弦相交的情況都繪出。可知所繪出的這些弦中，包含了可連接這 64 個點而形成 64 邊形的弦。

現將這些弦塗色。若一條弦沒有與其它的弦相交，則將這條弦塗成黑色；若一對弦彼此相交，則將其中一條塗成藍色、另一條塗成紅色。如果移除紅色的弦，並觀察藍色與黑色的弦所構成的圖形。因此時已沒有相交的弦，故 64 邊形可被切割成數個多邊形，這些多邊形的頂點都是原來 64 個點中的一些點。

現驗證這些多邊形都是三角形。

若存在一個多邊形的頂點數是 4 個或是 4 個以上，並將這個多邊形稱為  $P$ 。

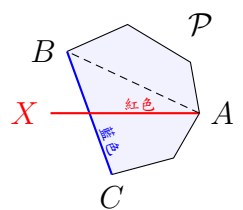
若  $P$  的所有邊都是黑色的，則由其必沒有藍色的弦可知原來也不會有紅色的弦經過  $P$ 。此時能判斷出在  $P$  中可再繪出一條對角線，使得在原始情況中，此對角線為黑色的弦，此與假設已繪出滿足題意的最多弦之情況矛盾。

若  $P$  至少有一條藍色的邊  $BC$ ，如圖所示，則知存在一條紅色的弦  $AX$  與其相交，其中  $A$ 、 $B$ 、 $C$  為  $P$  的頂點而  $X$  為圓上且在  $P$  外面的點。因  $P$  不是三角形  $ABC$ ，因此  $AB$ 、 $AC$  中至少有一條弦不是  $P$  的邊，可不妨令這條弦為  $AB$ 。

因為  $AB$  在  $P$  內，故  $AB$  不會與黑色或是藍色的弦相交；且  $AB$  也不會與紅色的弦相交，否則這條弦也會與  $BC$  相交，但  $BC$  已經與  $AX$  相交，不合。所以  $AB$  在原始情況中為黑色的弦，此與假設已繪出滿足題意的最多弦之情況矛盾。

所以知在藍色與黑色的弦所構成的圖形中，64 邊形是被切割成數個三邊形。因將 64 邊形利用不相交的對角線切成數個三邊形時，一定是切成 62 個三角形，且此時在圓上共有  $64 + 61 = 125$  條弦。觀察可知每一條紅色的弦都會通過其中二個三角形，因此至多有 31 條紅色的弦，即最多有  $125 + 31 = 156$  條弦。

而將 64 邊形切成 62 個三邊形且每一個三角形都有一個共同頂點時，可將三角形依序兩兩配成 31 對，使得每一對都可恰繪出一條紅色的弦，即共可繪 156 條弦。



答: (156).