初級卷

1-10 題，每題 3 分

1. 算式 2016×2 等於

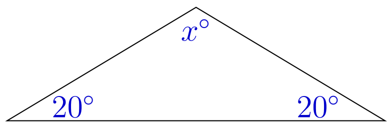
(A) 4026 (B) 4212 (C) 4022 (D) 432 (E) 4032

$2016 \times 2 = 4032$。

答: (E).

2. 在右圖中，請問 x 之值是什麼？

(A) 30 (B) 20 (C) 90 (D) 140 (E) 100



因三角形的內角和為 180°，故知 $x = 180 - 20 - 20 = 140$。

答: (D).

3. 若今天為星期四，請問 30 天後是星期幾？

(A) 星期日 (B) 星期一 (C) 星期二 (D) 星期五 (E) 星期六

因 30 天即為 4 個星期又 2 天，所以 30 天後與 2 天後的星期別相同，即為星期六。

答: (E).

4. 某城市今天的最低溫為 -5°C，而最高溫則比它高 8°C。請問今天的最高溫是什麼？

(A) -3°C (B) 8°C (C) -13°C (D) 13°C (E) 3°C

$-5 + 8 = 3$。

答: (E).

5. 請問 $\frac{1}{2}$ 的 25% 等於什麼？

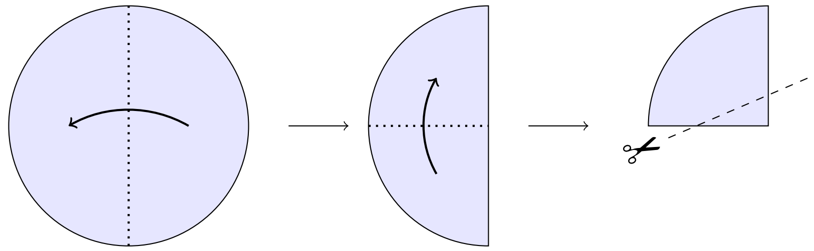
(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2 (E) 1

因 25% 即為 $\frac{1}{4}$，故所求為 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$。

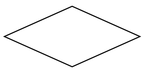
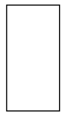
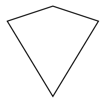
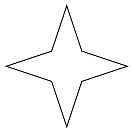
答: (A).

6. (同 國小中年級卷第 12 題)

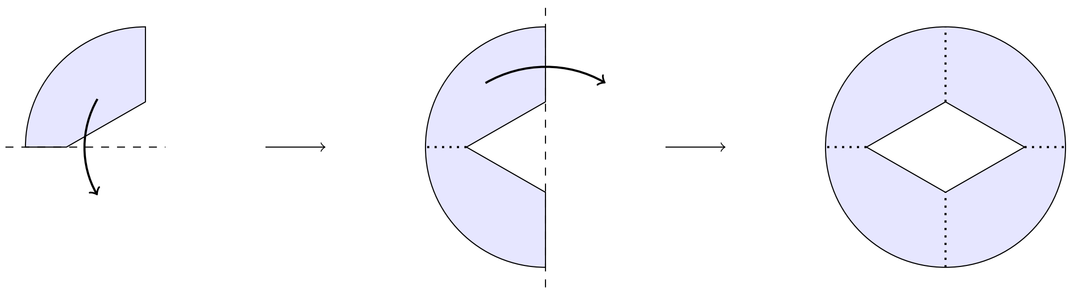
將一張圓形紙片對摺兩次然後剪一刀，如下圖所示。



將剪開後的這張紙片展開，請問位於中央的洞之形狀是什麼？

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

每將這張紙片展開一次，被摺線所分成的兩個部份以此摺線為對稱軸互為鏡像，故可得下圖：



答: (A).

---

7. 我用 \$100 的鈔票同時支付書款 \$29 、計算機款 \$16 及鉛筆款 \$8.95 。請問應找回多少？

(A) \$56.05 (B) \$45.05 (C) \$46.05 (D) \$37.05 (E) \$57.05

$100 - (29 + 16 + 8.95) = 100 - 53.95 = 46.05$。

答: (C).

---

8. 請問下列哪一項內的數介於 0.08 與 0.4 之間？

(A) 0.019 (B) 0.009 (C) 0.109 (D) 0.91 (E) 0.409

將 0.08、0.4 與這些數排列可得 $0.009 < 0.019 < 0.08 < 0.109 < 0.4 < 0.409 < 0.91$
故知 0.109 介於 0.08 與 0.4 之間。

答: (C).

9. 環城公路賽跑於早上 11：50 開始，獲得冠軍的選手共費時 74 分鐘。請問這位冠軍選手在什麼時刻通過終點線？

(A) 下午 1：24 (B) 中午 12：54 (C) 中午 12：04 (D) 下午 1：04 (E) 中午 12：24

可知出發後 10 分鐘即為中午 12 點，因此下午 1 點為出發後 70 分鐘，故知出發後 74 分鐘為下午 1：04。

答: (D).

---

10. (同 中級卷第 4 題)

請問分數 $\frac{720163}{2016}$ 的值符合下列哪一項敘述？

(A) 介於 0 與 1 之間 (B) 介於 1 與 10 之間 (C) 介於 10 與 100 之間 (D) 介於 100 與 1000 之間 (E) 大於 1000

粗略估計可得：$\frac{720163}{2016} \approx \frac{720000}{2000} = \frac{720}{2} = 360$。因此知 $100 < \frac{720163}{2016} < 1000$。

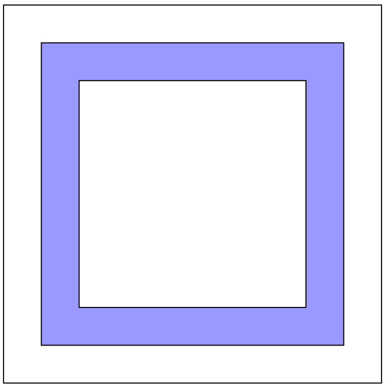
而驗算可得 $201600 < 720163 < 2016000$，故有 $100 < \frac{720163}{2016} < 1000$。

答: (D).

11-20 題，每題 4 分

11. 如圖所示的三個正方形之邊長分別為 3、4、5。請問圖中最大正方形面積的百分之多少被塗上陰影？

(A) 27% (B) 28% (C) 25% (D) 24% (E) 20%



可知這三個正方形的面積由小至大依序為 9、16、25，因此陰影部份的面積為 $16 - 9 = 7$，故可得知最大正方形面積的 $100\% \times \frac{7}{25} = 28\%$ 被塗上陰影。

答: (B).

---

12. 小珍持有的珠子數量是小莉的 3 倍。若小珍給小莉3 顆珠子，則她們兩人持有的珠子數量相同。請問她們兩人總共持有多少顆珠子？

(A) 18 (B) 6 (C) 8 (D) 12 (E) 16

解法 1

假設小莉持有 m 顆珠子，則小珍持有 $3m$ 顆珠子。而由題意可得知 $3m-3 = m+3$，化簡後得 $2m = 6$，此即 $m = 3$。因此她們總共持有 $4m = 12$ 顆珠子

解法 2

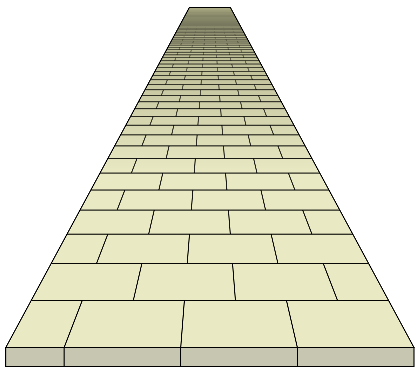
可知在全部的珠子中，小珍原來所持有的珠子佔 $\frac{3}{4}$ 而小莉原來所持有的珠子佔 $\frac{1}{4}$。小珍給小莉3 顆珠子後，兩人所持有的珠子各佔全部珠子的 $\frac{1}{2}$，故可得知全部珠子的 $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 為 3 顆，因此總共有 12 顆珠子。

答: (D).

---

13. 公園的人行道的寬度恰好為 $3\frac{1}{2}$ 塊石磚的寬度，它們鋪設的型式如右圖所示。
資料顯示此人行道共使用 1750 塊石磚。請問建造此人行道必須將多少塊石磚切為兩半？

(A) 250 (B) 350 (C) 175 (D) 125 (E) 500



由圖可知每二列共使用 7 塊石磚，其中一塊被切為兩半。因此共有 $1750 \div 7 = 250$ 塊石磚被切為兩半。

答: (A).

---

14. 星期一，我將 10 棵蘋果樹種成一排。星期二，我在同一排內種橘子樹，使得任兩棵蘋果樹都互不相鄰。星期三，我又在同一排內種桃樹使得蘋果樹與橘子樹都互不相鄰。請問這三天我至少共種了多少棵樹？

(A) 28 (B) 43 (C) 37 (D) 40 (E) 36

星期一，我種了 10 棵蘋果樹，因此在星期二，我至少需種 9 棵橘子樹，使得在任兩棵蘋果樹之間都有一棵橘子樹。接著在星期三，可判斷出我至少需種 18 棵桃樹，使得在相鄰的蘋果樹與橘子樹之間都有一棵桃樹。所以這三天我至少共種了 $10+9+18=37$ 棵樹。

答: (C).

---

15. (同 國小高年級卷第 23 題、中級卷第 15 題)

只有 A、B、C 三人參加的一系列之運動比賽，每一個項目的第一名獲得積分 3 分、第二名獲得積分 2 分、第三名獲得積分 1 分。經過數項比賽後，A 共得 8 分、B 共得 11 分、C 共得 5 分。請問 A 有幾個項目比賽得到第二名？

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

可知在每一項比賽後三人共得積分 6 分，而現已知三人的總積分為 $8+11+5=24$ 分，故可知共有 4 個運動項目。因 B 共得 11 分，故可判斷出 B 必定是獲得 3 項比賽第一名、1 項比賽第二名；而因 C 僅得 5 分，故可判斷出 C 沒有在任何一項中取得第一名，否則他至少會得到 6 分，所以可推得 C 僅獲得 1 項比賽的第二

名。此時即可判斷出 A 共獲得 2 個項目比賽的第二名。

答: (C).

---

16. (同 中級卷第 7 題)

在以下算式中，字母 A、B、C、D、E 代表數 1、2、3、4、5 之一，但不一定依此順序。

$$A \times B + C \times D + E.$$

請問此算式之最大可能值是什麼？

(A) 24 (B) 27 (C) 26 (D) 51 (E) 25

可知數 $X \geq 2$、$Y \geq 2$ 時，恆有 $X \times Y + 1$ 大於 $1 \times X + Y = X + Y$。因此可得知恆可交換算式 $A \times B + C \times D + E$ 中的數使得 $E = 1$ 而得到最大值。故只需考慮以下三種情況：

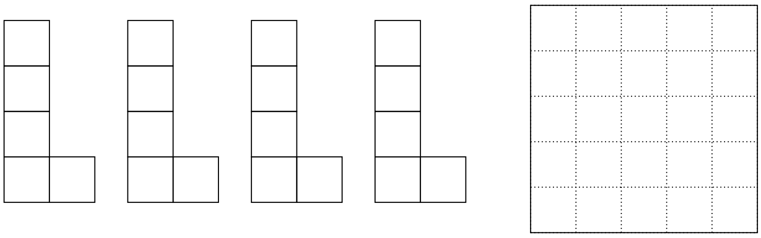
- $2 \times 3 + 4 \times 5 + 1 = 27$
- $2 \times 4 + 3 \times 5 + 1 = 24$
- $2 \times 5 + 3 \times 4 + 1 = 23$

故知此算式之最大可能值為 27。

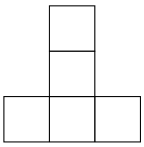
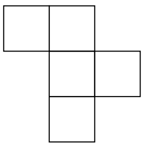
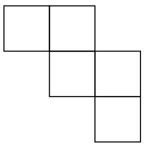
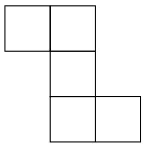
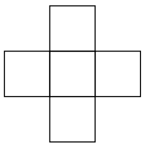
答: (B).

---

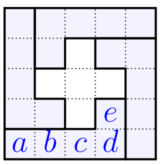
17. 小李用四片 L 型五方塊與另一片五方塊不重疊地恰好拼成一個 5×5 的方格表：



請問下列哪一項內的五方塊可以是另外的這一片五方塊？

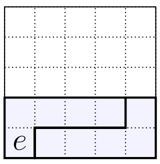
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

經嘗試錯誤後可以找出圖 (i) 的排法，其中的另一片五方塊為選項 (E)。接下來驗證這是唯一可滿足題意的。

(i) 

非 L 型五方塊至多可以佔據此方格表四個位於角落的小方格之一，因此會有 3 片或 4 片 L 型五方塊各佔據一個位於角落的小方格。可如圖 (i) 內所示之方式用 a、b、c、d、e 標記 L 型五方塊各位置的小方格，則可能在 5×5 方格表中位於角落的小方格為 a、d、e。

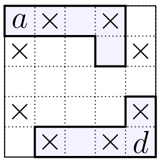
若位於角落的小方格是 e，則必有另一片 L 型五方塊如圖 (ii) 之方式與其拼合，而另外的 5×3 矩形必包含兩片 L 型五方塊，且剩餘的方格為另一片五方塊。可判斷出拼合的方式僅可能由兩片 L 型五方塊再

(ii) 

拼成一個 5×2 矩形，使剩餘的方格為一片 5×1 的五方塊。但此不在選項中，故可知沒有 L 型五方塊位於角落的小方格是 e。

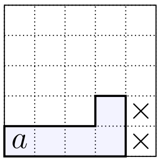
所以僅 a 或 d 可能是位於角落的小方格。現考慮在圖 (iii) 中，8 個被標記上 $\times$ 的小方格。若有一片 L 型五方塊位於角落的小方格是 a，則一定會覆蓋住其中 2 個被標記上 $\times$ 的小方格；若有一片 L 型五方塊位於角落的小方格是 d，則一定會覆蓋住其中 3 個被標記上 $\times$ 的小方格。故可得知不可能三片 L 型五方塊位於角落的小方格全是 d，即至少有一片 L 型五方塊位於角落的小方格是 a。

(iii)

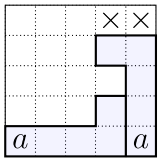


現如圖 (iv) 所示放置一片位於角落的小方格是 a 的 L 型五方塊，則選項 (A)–(E) 的五方塊都必無法填入圖中標記上 $\times$ 的兩個小方格，因此一定是由另一片 L 型五方塊所填入，如圖 (v) 所示。

(iv)



(v)



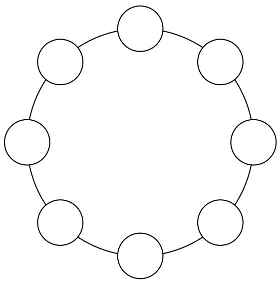
同理類推下去，答案已經非常明顯，此可得到唯一的解。

答: (E).

---

18. (同 國小高年級卷第 20 題)

小迪有許多紅色、綠色與藍色的籌碼。他依據下列規則將 8 枚籌碼等距離地放在圓周上：

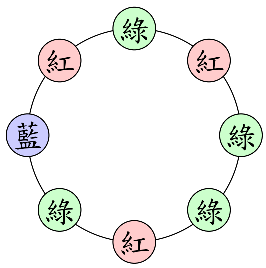


- 任何兩枚紅色籌碼不得相鄰。
- 任何兩枚綠色籌碼不得在同一條直徑的兩端。
- 藍色的籌碼愈少愈好。

請問小迪至少要放置幾枚藍色籌碼？

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

若完全不使用藍色籌碼，可知不可能全部都是紅色籌碼，或全部都是綠色籌碼，不妨從圓圈底部放置一枚紅色籌碼開始討論。此時由第一條規則可知此紅色籌碼兩邊都必須都是綠色籌碼。



接著根據第二條規則知分別與這二枚綠色籌碼在同一條直徑另一端的籌碼都必須是紅色，因此圓圈頂部的籌碼必為綠色。

而最後二個未擺放籌碼的位置都因已與紅色籌碼相鄰，故不能再擺放紅色籌碼；然而這二個位置只能有一個可以放綠色籌碼，另一個必須放藍色籌碼。這樣的論證，如圖所示，滿足題意的三條規則。

所以至少要放置 1 枚藍色籌碼。

答: (B).

19. 有一袋通心麵，其中只有三分之一的通心麵條是完整的，而其它的每一根都斷成二段。在此袋內所有的通心麵條 (包括完整與斷裂的) 中，請問麵條長度不小於原來整根麵條一半的麵條根數至少佔所有根數的幾分之幾？

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{1}{3}$

- -

可知所有在此袋內原來完整的三根麵條，斷裂後變成 5 根。在這 5 根中至少有 3 根不小於原來麵條長度的一半，故至少有 $\frac{3}{5}$ 的根數不小於原來麵條長度的一半。

答: (B).

---

20. (同 國小中年級卷第 20 題)

瑪麗有四位年齡互不相同且都小於 10 歲的小孩，已知這四位小孩的年齡之乘積為 2016。請問這四位小孩的年齡之和是多少歲？

(A) 30 (B) 34 (C) 28 (D) 29 (E) 32

- -

考慮 2016 的質因數分解為 $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$，故知 2016 小於 10 的因數為 1、2、3、4、6、7、8 與 9。

其中僅 7 為質因數，故其中一位小孩的年齡必為 7 歲。

而質因數分解中的 3^2，可能是由 $3 \times 6 = 2 \times 3^2$ 或是 $9 = 3^2$ 這二種情況而得。

若為第一種情況，則四位小孩的年齡乘積之乘式為 $3 \times 6 \times 7 \times 16$，但 16 歲大於 10 歲，故不合；

若為第二種情況，則其中二位小孩的年齡乘式為 7×9，因此另二位小孩的年齡乘積必為 32，此時僅 4×8 這一個乘式可滿足。

故知這四位小孩的年齡為 4、7、8 與 9 歲，其年齡之和為 28。

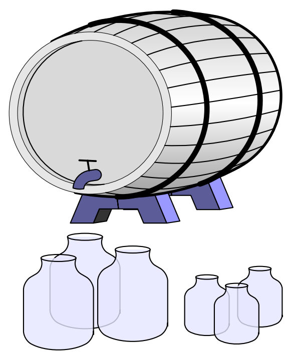
答: (C).

21-25 題，每題 5 分

21. 小安有一桶 50 公升的水，打算將水裝入兩種大小的水瓶內，裝滿水時大水瓶、小水瓶的容量都是整數公升。他將三個大水瓶裝滿水後，剩下的水不足以裝滿第四個大水瓶。再用剩下的水可以將三個小水瓶裝滿水，但此時剩下的水不足以裝滿第四個小水瓶。

請問每個小水瓶的容量為多少公升？

(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2 (E) 1



- -

解法 1

可知大水瓶的容量介於 $\frac{50}{4} = 12\frac{1}{2}$ 公升與 $\frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$ 公升之間，故若假設大水瓶的容量為 x 公升，則其可能值為 13、14、15 或 16 公升，裝滿三個大水瓶後對應剩下的水量依序為 11、8、5 或 2 公升。不妨假設此省下的水量為 $y = 50 - 3x$ 公升。

若再假設小水瓶的容量為 z 公升，則必介於 $\frac{y}{4}$ 與 $\frac{y}{3}$ 之間，此時由 z 為正整數知可造表如下：

x	y	$\frac{y}{4}$	$\frac{y}{3}$	z 的可能取值
13	11	$2\frac{3}{4}$	$3\frac{2}{3}$	3
14	8	2	$2\frac{2}{3}$	—
15	5	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{2}{3}$	—
16	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	—

因此小水瓶的容量僅可為 3 公升。

答: (C).

解法 2

假設一瓶大水瓶的容量為 x 公升而一瓶小水瓶的容量為 y 公升。若 $x = 17$ 或者更大，則不可能裝滿 3 瓶大水瓶；若 $x = 12$ 或者更小，則可裝滿的大水瓶數必大於 3。因此 $x = 13$、14、15 或 16。

若 $x = 16$，則還剩 2 公升的水，此時不可能裝滿 3 瓶小水瓶。

若 $x = 15$，則還剩 5 公升的水，此時一瓶小水瓶的容量只能是 1 公升，但可恰裝滿 5 瓶小水瓶，故不合。

若 $x = 14$，則還剩 8 公升的水，此時一瓶小水瓶的容量只能是 2 公升，但可恰裝滿 4 瓶小水瓶，故不合。

若 $x = 13$，則還剩 11 公升的水。此時由 $11 = 3 \times 3 + 2$ 可以判斷出要能裝滿 3 瓶小水瓶但不可裝滿第四瓶小水瓶，一瓶小水瓶的容量只能是 3 公升，且最後剩下 2 公升的水。

答: (C).

解法 3

假設一瓶大水瓶的容量為 x 公升而一瓶小水瓶的容量為 y 公升，裝滿三個大水瓶、三個小水瓶後最後剩下的水為 z 公升。則 $50 = 3x + 3y + z$，即 $50 - z = 3(x + y)$。因為大、小水瓶的容量都為整數，故 z 只能是 2、5、8、$\cdots$。

當 $z \geq 5$，則 $y \geq 6$、$x \geq 3y+z+1 = 3\times 6+5+1 = 24$。此時 $3x \geq 3\times 24 = 72 > 50$，不合。

故 $z = 2$，則 $y \geq 3$、$x \geq 3y + z + 1 = 3 \times 3 + 2 + 1 = 12$。

當 $y = 3$，$50 = 3x + 3 \times 3 + 2$，故 $x = 13$、$3y + z = 11$，符合要求。

當 $y \geq 4$，$50 \geq 3x + 3 \times 4 + 2$，故 $12 \geq x$，但 $3y + z \geq 14 > 12$，不合。

故只能是大水瓶的容量為 13 公升、小水瓶的容量為 3 公升，最後剩下的水為 2 公升。

答: (C).

---

22. 將數碼 1、2、3、4、5 各一個重新排列後得到一個五位數，要求在這個五位數中，任二個相鄰數碼之差必須不小於 2。請問滿足上述條件的五位數共有多少個？

(A) 24 (B) 14 (C) 18 (D) 20 (E) 10

解法 1

若在中間的數碼為 1，則這個五位數的形式一定為 $\boxed{2}\boxed{}\boxed{1}\boxed{}\boxed{}$ 或 $\boxed{}\boxed{}\boxed{1}\boxed{}\boxed{2}$。無論是哪一種形式，因 4 都不能與 3 或 5 相鄰，故 4 一定在 1 與 2 之間，而 3 與 5 的位置共有二種方式，故在此情況中，共有 4 個五位數。而由對稱性可判斷出當中間的數碼為 5 時，也會有 4 個五位數滿足題意。

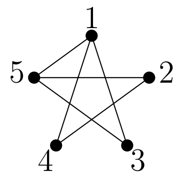
若在中間的數碼為 2，則這個五位數的形式一定為 $\boxed{1}\boxed{}\boxed{2}\boxed{}\boxed{3}$ 或 $\boxed{3}\boxed{}\boxed{2}\boxed{}\boxed{1}$. 無論是哪一種形式，因 4 都不能與 3 相鄰，故 4 一定在 1 與 2 之間，而 5 的位置也隨之決定。因此在此情況中，共有 2 個五位數。而由對稱性可判斷出當中間的數碼為 4 時，也會有 2 個五位數滿足題意。

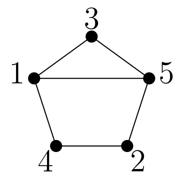
若在中間的數碼為 3，則這個五位數的形式一定為 $\boxed{2}\boxed{}\boxed{3}\boxed{}\boxed{4}$ 或 $\boxed{4}\boxed{}\boxed{3}\boxed{}\boxed{2}$. 無論是哪一種形式，因 1 都不能與 2 相鄰，故 1 一定在 3 與 4 之間，而 5 的位置也隨之決定。因此在此情況中，共有 2 個五位數。

所以滿足題意的五位數共有 $4+4+2+2+2=14$ 個。

答: (B).

解法 2





如第一個圖所示，將可以在五位數中相鄰的數碼用一線段相連接，則滿足題意的五位數個數即為找出經過每一個數碼恰一次的路徑數。可將第一個圖的線段重新安排為第二個圖所示的方法以使它易於理解。

若路徑不經過連接 1–5 的線段，則共有 10 種可能，這是因為第一個數碼有 5 個選擇，接下來第二個數碼有 2 個選擇，且之後其餘的數碼都隨之決定。

若路徑經過連接 1–5 的線段，則共有 4 種可能，這是因為 1、3 之間與 5、3 之間的二條連線僅可選擇一條，並且在選擇之後其餘的連線也隨之決定，而每一條路徑都有以 3 為起點或為終點的 2 種選擇，此即 31524、42513、35142、24153 這四個五位數。

所以滿足題意的五位數共有 $10+4=14$ 個。

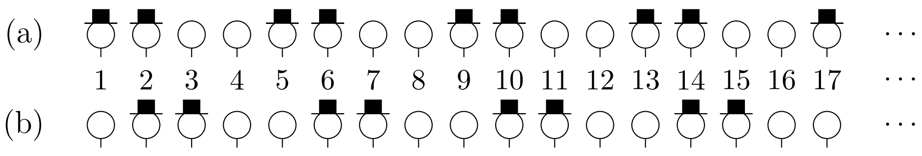
答: (B).

---

23. 將一些人排成一列，使得每個人都恰好與一位戴帽子的人相鄰。請問下列哪一項內的數量*不可能*是這一列的總人數？

(A) 98 (B) 99 (C) 100 (D) 101 (E) 102

可將這一列的人依序編號 1、2、3、$\cdots$ 。可知 1 號的情況有：(a) 戴著帽子 (b) 沒戴帽子。無論是哪一種情況，接下來的人之戴帽子情況都可由前一位是否恰好與一位戴帽子的人相鄰來判斷出來，如下圖：



可發現都是以相鄰的四個人為一組，一直循環重複出現，這是因為若第 n 號沒有戴帽子，則第 $n+2$ 號一定戴帽子，反之亦然。

可發現第 1、3、5、7、$\cdots$(奇數號) 號可能有戴帽子，也可能沒有戴帽子；第 4、8、12、16、$\cdots$(4 的倍數) 號全都沒有戴帽子；第 2、6、10、14、$\cdots$(偶數，但不為 4 的倍數) 號全都有戴帽子。

因第 2 號一定有戴帽子，倒數第二個人也一定有戴帽子。但因第 100 號一定沒有戴帽子，故可判斷出不可能有 101 人。而其餘的選項 98、99、100、102 都是可能的人數，這是因為 97、98、99、101 都不是 4 的倍數，故他們都可能滿足 (a) 或 (b) 中的戴帽子情況。

答: (D).

---

24. 小杰、小如、小姍各有一堆棒棒糖。小杰取出一些棒棒糖，將其他二人原有棒棒糖數量加倍。接著由小如取出一些棒棒糖，將其他二人現有棒棒糖數量加倍。最後由小姍取出一些棒棒糖，將其他二人現有棒棒糖數量加倍。

若最後他們三人都各有 32 根棒棒糖，請問最初始時小杰有多少根棒棒糖？

(A) 64 (B) 96 (C) 28 (D) 16 (E) 52

解法 1

可如下表所示，將三人獲得棒棒糖的情況逐步回溯：

小杰	小如	小姍	
32	32	32	(最後的情況)
16	16	64	(小杰、小如加倍成 32 根前的情況)
8	56	32	(小杰加倍成 16 根前、小姍加倍成 64 根前的情況)
52	28	16	(小如加倍成 56 根前、小姍加倍成 32 根前的情況)

故知最初始時小杰有 52 根棒棒糖。

答: (E).

解法 2

可知三人共有 96 根棒棒糖。假設最初始時小杰有 x 根棒棒糖，則此時小如與小姍共有 $(96-x)$ 根棒棒糖，因此小杰共給出了 $(96-x)$ 根棒棒糖，而剩下 $x-(96-x)=2x-96=2(x-48)$ 根棒棒糖。

接著小如給小杰$2(x-48)$ 根棒棒糖使得此時小杰共有 $4(x-48)$ 根棒棒糖。

最後小姍給小杰$4(x-48)$ 根棒棒糖使得此時小杰共有 $8(x-48)$ 根棒棒糖。

因此知 $8(x-48)=32$，化簡可得 $x-48=4$，故知 $x=52$。

答: (E).

---

25. 一首詩可以有任意多行，任一行都可以與另一行互相押韻或互不押韻。

對於只有二行的詩，它們有二種不同的韻律結構：互相押韻或互不押韻。

對於三行的詩，它們有五種韻律結構：三行都押韻，或恰有兩行互相押韻 (共三種選擇)，或全都互不押韻。

對於四行的詩，請問有多少種不同的韻律結構？

(A) 18 (B) 15 (C) 12 (D) 20 (E) 26

解法 1

為了方便起見，不妨將這四行的詩每一行所押的韻以 a、b、c、d 表示，並且若押相同的韻，則以相同的字母表示。而若韻律結構分別為 $abac$ 與 $cdca$ 的形式則不被視為不同，這是因為第一行與第三行詩互相押韻，而第二行詩與第四行詩沒有與其它任何一行互相押韻。此時由以下規則可以列出不同的韻律結構：

1. 第一個所押的韻假設為 a。
2. 唯有依字母排序在前面的字母已經全都被使用才能接著使用新字母

依照字母排序，可列出全部的韻律結構：

$$aaaa、aaab、aaba、aabb、aabc、abaa、abab、$$

$$abac、abba、abbb、abbc、abca、abcb、abcc、abcd$$

故知共有 15 種不同的韻律結構。而若要有系統的計算這些韻律結構，可從三行的詩之五個韻律結構開始考慮：

$$aaa、aab、aba、abb、abc$$

四行詩中的每一組韻律結構皆可在以上的結構中根據上述的第 2 條規則增加一行，共可得 15 種韻律結構：

$$\begin{array}{lll} aaa & +a \text{ 或 } b & = 2 \text{ 種韻律結構} \\ \left.\begin{array}{l} aab \\ aba \\ abb \end{array}\right\} & +a、b \text{ 或 } c & = 3\times 3 = 9 \text{ 種韻律結構} \\ abc & +a、b、c \text{ 或 } d & = 4 \text{ 種韻律結構} \end{array}$$

解法 2
利用這四行詩可能的押韻狀況分別討論如下：

(a) 若四行詩都押同一個韻，則有 1 種韻律結構 1
(b) 若其中三行詩都押同一個韻而另一行詩沒有押韻，則由沒有押韻的行可能為第 1、2、3 或 4 行知共有 4 種韻律結構 4
(c) 若其中二行詩押同一個韻而另二行詩都押另一個韻，則由與第 1 行詩押韻的詩句可能為第 2、3、4 行且其餘二行必同時押另一個韻知共有 3 種韻律結構 3
(d) 若其中二行詩押同一個韻而另二行詩都沒有押韻，則由 (c) 中每一種情況都可再分成二種情況知共有 6 種韻律結構 6
(e) 若四行詩都沒有押韻，則有 1 種韻律結構 1

故知共有 $1+4+3+6+1=15$ 種韻律結構。

答: (B).

問題 26-30 的答案為 000-999 之間的整數，
請將答案填在答案卡上對應的位置。

第 26 題占 6 分，第 27 題占 7 分，第 28 題占 8 分，
第 29 題占 9 分，第 30 題占 10 分。

---

26. 字母 a、b、c 代表三個數碼。若以下算式正確，請問三位數 $\overline{abc}$ 是什麼？

$$\begin{array}{ccccc} & & a & b & c \\ \times & & & 2 & 4 \\ \hline 1 & c & b & a & 2 \\ \hline \end{array}$$

- -

令 N 為 $\overline{abc}$。則由個位數碼的計算知 $4c$ 的個位數碼為 2，因此 $c=3$ 或 8。
若 $c=8$，則有 $18000<24N<19000$。由下右表列出的 24 的倍數可知 $24\times700=16800$、$24\times800=19200$，因此 $a=7$。再由以下算式中，十位數這一行可得 $3+8+6=17$：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 7 & b & 8 \\
\times & & & 2 & 4 \\
\hline
 & & & 3 & 2 \\
 & & ? & ? & \\
 & 2 & 8 & & \\
 & & 1 & 6 & \\
 & ? & ? & & \\
1 & 4 & & & \\
\hline
1 & 8 & b & 7 & 2 \\
\hline
\end{array}$$

n	$24n$	n	$24n$
1	24	6	144
2	48	7	168
3	72	8	192
4	96	9	216
5	120		

因此 $4b$ 的個位數碼為 8，即可得 $b=2$ 或 $b=7$。但這二值均不符合。
若 $c=3$，則有 $13000<24N<14000$，再由觀察 24 的倍數可推知 $500<N<600$，所以 $a=5$。再由以下算式中，十位數這一行可得 $1+8+6=15$：

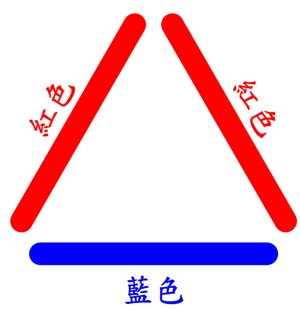
$$\begin{array}{ccccc}
 & & 5 & b & 3 \\
\times & & & 2 & 4 \\
\hline
 & & & 1 & 2 \\
 & & ? & ? & \\
 & 2 & 0 & & \\
 & & & 6 & \\
 & ? & ? & & \\
1 & 0 & & & \\
\hline
1 & 3 & b & 5 & 2 \\
\hline
\end{array}$$

再由 $4b$ 的個位數碼為 8 知 $b=2$ 或者 $b=7$。明顯可知 $b=2$ 太小，而 $b=7$ 時可得一解：$573\times24=13752$。故 $N=573$ 為唯一的解。

答: (573).

---

27. (同 國小高年級卷第 29 題、中級卷第 24 題)
現有非常多的連接棒，它共有五種不同的顏色，打算利用三根連接棒構造儘可能多顏色互相不同的等邊三角形。右圖為其中一個例子。
兩個三角形如果經過旋轉或翻轉可以成為另一個，則視它們為相同的三角形。
請問總共可以構造出多少種不同的三角形？



- -

將三角形塗色有以下三種情況：

(i) 三條邊的顏色都相同，共有 5 種可能。
(ii) 二條邊的顏色相同、另一條邊的顏色不同，共有 $5\times4=20$ 種可能。

(iii) 三條邊的顏色都兩兩互不相同，共有 $\dfrac{5\times4\times3}{6}=10$ 種可能。

故總共有 $5+20+10=35$ 種不同的三角形。

答: (035).

注: 在 (iii) 的算式中，是根據第一條邊有 5 種選擇、第二條邊有 4 種選擇、第三條邊有 3 種選擇，故可得 $5\times4\times3=60$ 種可能。但每一個所選出的三邊顏色為 xyz 的情況，都出現以下 6 種情況 xyz、xzy、yxz、yzx、zxy、zyx，故僅有 $60\div6=10$ 種滿足題意的三角形。此即為從 n 個物品中選取 m 個物品的選擇方法數的一般公式 $\binom{n}{m}$ 之想法。

---

28. 一個數碼互不相同的三位數，它恰好等於它的數碼和的 37 倍。請問滿足上述條件的最大三位數是什麼？

令 $\overline{abc}$ 為滿足題意的三位數，則知 $100a+10b+c=37a+37b+37c$，化簡得 $63a=27b+36c$，再將等式兩邊同時除以 9 後可得 $7a=3b+4c$。此時可觀察出當 $a=b=c$ 時有許多解，但要求 a、b、c 互不相同。因此當 $b\neq c$ 時，尋找 $3b+4c$ 何時為 7 的倍數之解。

因為要找出 $\overline{abc}$ 的最大值，故可從 $a=9$ 開始嘗試。此時 $3b+4c=63$，可知 b 必為奇數，且 $3b\geq63-4\times9=27$，即 $b\geq9$，可得 (b,c)=(9,9)，不滿足題意。

若 $a=8$，則 $3b+4c=56$ ，故知 b 為 4 的倍數且 $3b\geq56-4\times9=20$，即 $b\geq7$，可得 (b,c)=(8,8)，不滿足題意。

若 $a=7$，則 $3b+4c=49$ ，故知 b 為奇數且 $3b\geq49-4\times9=13$，即 $b\geq5$，可得解 (b,c)=(7,7)，不滿足題意。

若 $a=6$，則 $3b+4c=42$ ，故知 c 為 3 的倍數且 $4c\geq42-9\times3=15$，即 $c\geq4$，可得解 (b,c)=(2,9)、(6,6)，其中僅 629 滿足，故知所求之最大值為 629。

答: (629).

注: 已知三位數中 37 的最大倍數為 $27\times37=999$，逐項向下檢驗，接著是 962、925、888、851、814、777、740、703、666，直到 $629=(6+2+9)\times37=17\times37$ 才符合。

---

29. 小魯發現數列 2、1、3、4、7、$\cdots$ ，自第二項之後，每一項的數都是前二項的數之和。他試圖寫下前 100 項的數，但他在計算第 90 項時發生錯誤，結果與正確值相差 1。請問他所算出第 100 項的數與正確值相差多少？

因從第二項之後，每一項都是前二項數之和，故一旦計算錯誤，接來所得的值之誤差也會依相同模式累積。因第 89 項仍是正確的，而第 90 項的誤差為 1，故可得下表的累積誤差

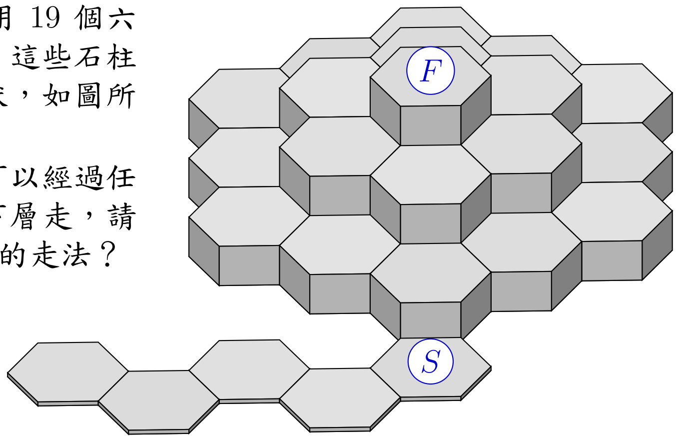
項數	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
誤差	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

故可得知第 100 項所計算出的值與正確值的誤差為 89。注意到此表中的誤差並不須要知道發生錯誤時的誤差是比正確值多算 1 或者是少算 1。

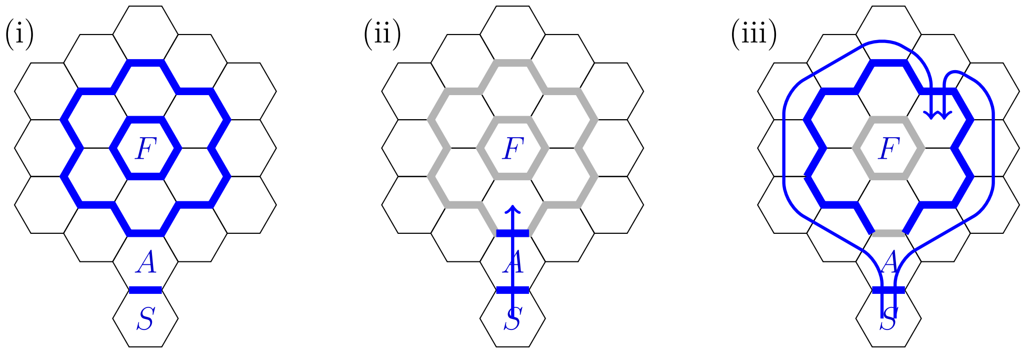
答: (089).

30. 為了搭配六邊形磁磚步道，利用 19 個六邊形石柱建造了一座園林造景，這些石柱排成高低不同的三層六邊形形狀，如圖所示。

若只能走入相鄰的石柱，且不可以經過任何石柱超過一次，並且不可往下層走，請問從 S 到 F 總共有多少種不同的走法？

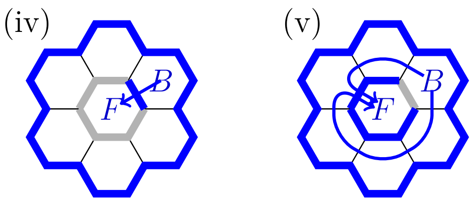


令磁磚 S 在第 0 層，逐層登上至 F 所在的第 3 層。圖 (i) 粗線表示可以向上爬一層的邊：



可發現在第 1 層與第 2 層之間共有 18 條邊。對於 A 上方的邊來說，圖 (ii) 顯示了唯一一條從 S 出發並跨越該邊的路徑，而圖 (iii) 則顯示了對於其它 17 條邊來說都有順時針與逆時針二條路徑，因此從 S 出發時，從第一層跨越其中一條邊至第二層共有 35 條路徑。

接著若 B 是由第二層中首先跨上第三層的石柱，則對於 F 的六條邊來說，僅有一條邊是直接從 B 出發並跨越該邊到達 F 的唯一路徑，而另五條邊都有二條路徑，如圖 (iv) 與圖 (v) 所示。因此從 B 到 F 共有 11 條路徑。



因從 S 出發至 B 的路徑與 B 出發至 F 的路徑無關，故可得知從 S 到 F 總共有 $35 \times 11 = 385$ 種不同的走法。

答: (385).