高 級 卷

1-10 題，每題 3 分

1. 請問百位數碼為 7、個位數碼為 8 的三位數共有多少個？

(A) 10　(B) 100　(C) 20　(D) 19　(E) 90

這些三位數為 708、718、728、738、748、758、768、778、788、798，共 10 個。

答: (A).

---

2. 若 $p = 7$、$q = -4$，則 $p^2 - 3q^2$ 等於

(A) 49　(B) 48　(C) 0　(D) 97　(E) 1

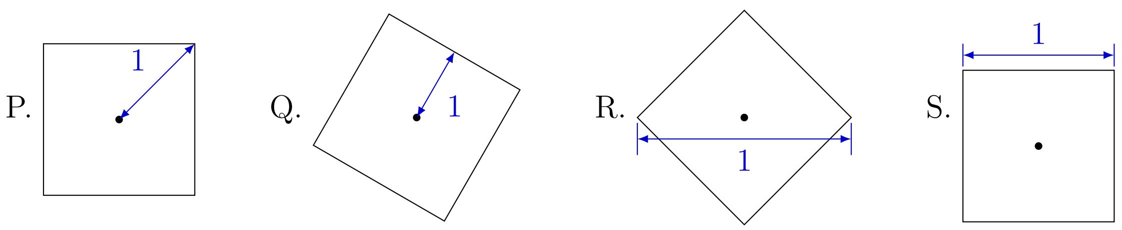
$p^2 - 3q^2 = 7^2 - 3 \times (-4)^2 = 49 - 3 \times 16 = 1$。

答: (E).

---

3. (同 中級卷第 8 題)

在下圖的這些正方形中，標記的長度都是 1 單位長。請問哪一個正方形的周長最長？



(A) P　(B) Q　(C) R　(D) S　(E) 都一樣長

正方形 P、Q、R、S 的周長依序為 $4\sqrt{2}$、8、$2\sqrt{2}$ 與 4，故正方形 Q 的周長最長。

答: (B).

---

4. 已知 n 為整數且 $7n + 6 \geq 200$，則 n 必須為

(A) 偶數　(B) 奇數　(C) 大於或等於 28

(D) 27 或 28　(E) 小於或等於 27

將原不等式化簡可得 $7n \geq 194$，故知 $n \geq \frac{194}{7} = 27\frac{5}{7}$。因此 n 的最小值為 28，且所有 $n \geq 28$ 的值均為滿足題意的解。

答: (C).

---

5. 亞瑟王的圓桌桌面之半徑為 3 m。請問此桌面的面積之 m^2 值最接近下列哪一項內的數？

(A) 20 (B) 30 (C) 40 (D) 50 (E) 60

可知此桌面是半徑為 3 m 的圓，故其面積為 $\pi(3)^2 = 9\pi\mathrm{m}^2$。因 π 之值比 3 略大，故 9π 之值會比 27 略大。在選項的數中，以 30 最為接近。

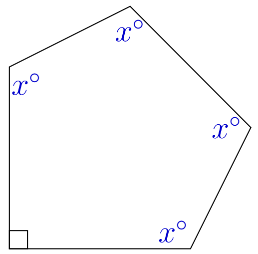
答: (B).

---

6. (同 中級卷第 11 題)

右圖中，請問 x 之值等於什麼？

(A) 120 (B) 108 (C) 105 (D) 135 (E) 112.5



解法 1

由五邊形的外角和可得知 $360 = 90 + 4 \times (180 - x)$，化簡得 $180 - x = \frac{270}{4} = 67.5$，因此 $x = 180 - 67.5 = 112.5$。

答: (E).

解法 2

由五邊形的內角和可得知 $3 \times 180 = 90 + 4x$，因此 $x = \frac{450}{4} = 112.5$。

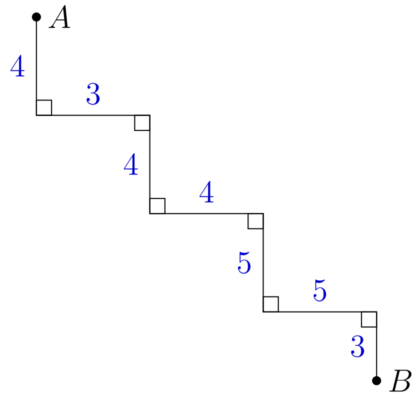
答: (E).

---

7. (同 中級卷第 12 題)

右圖中，每個拐角都是直角，標記在線段旁的數是此線段的長度。請問線段 AB 的長度為多少單位？

(A) 20 (B) 28 (C) $10 + 9\sqrt{2}$ (D) $8 + 9\sqrt{2}$ (E) 16



令 C 點在 A 點的正下方且也同時在 B 點的正左方，則直角三角形 ABC 的兩股長為 16 與 12，且若令其斜邊長為 x，則有 $x^2 = 16^2 + 12^2 = 400$，因此知 $x = 20$。

答: (A).

---

8. 請問方程 $\sqrt{x^2+1} = x + 2$ 之根是什麼？

(A) $x = \frac{22}{7}$ (B) $x = -\frac{3}{4}$ (C) $x = -\frac{3}{2}$ (D) $x = 3$ (E) 無根

將等式兩邊同時平方可得

$$\sqrt{x^2+1}=x+2 \quad\Rightarrow\quad x^2+1=x^2+4x+4 \quad\Rightarrow\quad 4x=-3.$$

可知上述方程僅有唯一的解 $x=-\frac{3}{4}$。將此數代入題目中的方程後可知等式兩邊皆為 $\frac{5}{4}$。

答: (B).

---

9. 一家麵包店的展示架上有一大盤的牛角麵包，其中有巧克力、起司與純麥等三種口味，每種口味都有許多且數量都相同。小倪匆忙進入店中沒有仔細看就隨意拿了二塊牛角麵包。請問小倪所拿的牛角麵包中不含有任何一塊巧克力口味的機率最接近下列哪一項內的數？

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{1}{27}$

可知選擇第一塊牛角麵包時，不是巧克力口味的機率為 $\frac{2}{3}$，故選擇第二塊牛角麵包時，不是巧克力口味的機率會約略小於 $\frac{2}{3}$。所以二塊牛角麵包同時都不是巧克力口味的機率會約略小於 $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$。

答: (B).

注: 可驗證實際的機率並不會較接近較小的選項 $\frac{1}{3}$。當每一種口味的牛角麵包都有二個時，則第二塊牛角麵包不是巧克力口味的機率為 $\frac{3}{5}$，因此二塊牛角麵包同時都不是巧克力口味的機率為 $\frac{2}{5}$，此值較接近 $\frac{4}{9}$ 而非 $\frac{1}{3}$。若每一種口味的牛角麵包多於二個時，則第二塊牛角麵包不是巧克力口味的機率將會增加而靠向 $\frac{2}{3}$，因此二塊牛角麵包同時都不是巧克力口味的機率將會增加而靠向 $\frac{4}{9}$。

---

10. 當 n 為正整數時，請問下列哪一項內的表達式之值恆為 3 的倍數？

(A) n^3 (B) n^3+2n (C) $3n^3+1$ (D) n^3+3n^2 (E) n^2+2

解法 1

當 $n=1$ 時，可知各選項內的值為 (A)$=1$、(B)$=3$、(C)$=4$、(D)$=4$、(E)$=3$，因此僅 (B)$=n^3+2n$ 與 (E)$=n^2+2$ 為可能的答案。當 $n=2$ 時，可知 (B)$=12$、(E)$=6$；當 $n=3$ 時，可知 (B)$=33$、(E)$=11$，因此可判斷出僅 (B) 為可能的答案。

接著驗證 n^3+2n 恆為 3 的倍數。易知 $n^3+2n=n(n^2+2)=n(n^2-1)+3n=(n-1)n(n+1)+3n$。無論 n 的值為何，$n-1$、n、$n+1$ 將有其中之一為 3 的倍數，故 n^3+2n 恆為 3 的倍數。

答: (B).

解法 2
可如上述作法刪去選項 (A)、(C)、(D)、(E)。
接著驗證 $C_n = n^3 + 2n$ 恆為 3 的倍數。因

$$C_{n+1} - C_n = (n+1)^3 + 2(n+1) - n^3 - 2n = 3n^2 + 3n + 3$$

且有 $C_1 = 3$ 為 3 的倍數，故可判斷出之後的每一項都也是 3 的倍數。

答: (B).

11-20 題，每題 4 分

11. 算式 $2^{2016} - 2^{2015}$ 等於

(A) 2 (B) $2^{\frac{2016}{2015}}$ (C) 2^{2015} (D) -2^{2016} (E) 0

- -

$2^{2016} - 2^{2015} = 2 \times 2^{2015} - 2^{2015} = 2^{2015}$。

答: (C).

---

12. 奧克蘭與布萊頓為同一條鐵路線上兩個非常繁忙的火車站。某一日：

- 五分之一的火車沒有停靠奧克蘭
- 45 列火車沒有停靠布萊頓
- 60 列火車同時停靠布萊頓與奧克蘭
- 60 列火車只停靠布萊頓或奧克蘭之一 (不同時停靠)

請問該日有多少列火車不停靠這二站中的任何一站？

(A) 60 (B) 20 (C) 45 (D) 5 (E) 40

- -

設有 n 列火車不停靠奧克蘭也不停靠布萊頓，則由題意知有 $45 - n$ 列火車只停靠奧克蘭但不停靠布萊頓、有 $60 - (45 - n) = 15 + n$ 列火車只停靠布萊頓但不停靠奧克蘭。

	停靠奧克蘭	不停靠奧克蘭
停靠布萊頓	60	$15 + n$
不停靠布萊頓	$45 - n$	n
	$105 - n$	$15 + 2n$

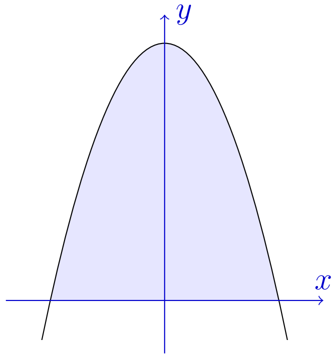
因此共有 $60 + 45 - n = 105 - n$ 停靠奧克蘭且有 $15 + n + n = 15 + 2n$ 列火車不停靠奧克蘭，即共有 $120 + n$ 列火車，其中五分之一的火車沒停靠奧克蘭，故可得 $120 + n = 5(15 + 2n) = 75 + 10n$，化簡得 $9n = 45$，故知 $n = 5$。

答: (D).

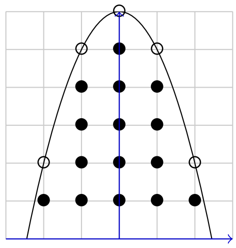
---

13. 考慮由拋物線 $y = 6 - x^2$ 與 x-軸所圍出的區域。請問此區域內部有多少個整點 (邊界上的點不計)？

(A) 11 (B) 12 (C) 14 (D) 15 (E) 17



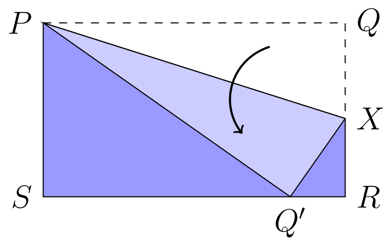
可知此拋物線經過整點 $(0,6)$、$(\pm1,5)$ 與 $(\pm2,2)$，如圖所示。故可直接數出每一行上的整點，並知共有 $1+4+5+4+1=15$ 個整點在這個區域內部。



答: (D).

14. 一張矩形紙片 $PQRS$ 的邊 PQ 是邊 QR 的二倍。沿著直線 PX 將此紙張摺下，使得 Q 點落在 RS 邊的 Q' 點上。請問角 SPX 之大小是什麼？

(A) $72°$　(B) $45°$　(C) $60°$　(D) $67.5°$　(E) $75°$



在三角形 SPQ' 中，$\angle PSQ' = 90°$ 且有 $PQ' = 2PS$，故可知三角形 SPQ' 是一個 $30°$–$60°$–$90°$ 的三角形，所以 $\angle SPQ = 60°$、$\angle QPQ' = 30°$，因此 $\angle QPX = 15°$ 且可得 $\angle SPX = 75°$。

答: (E).

15. (同 中級卷第 19 題)

十位學生參加一項包含 20 道試題的測驗。其中二位學生答對 8 題、一位學生答對 9 題，其餘的七位學生每人都至少答對 10 題且這七位學生平均的答對題數為一整數。若這十位學生平均的答對題數也為一整數，請問這個整數是什麼？

(A) 10　(B) 11　(C) 12　(D) 13　(E) 14

假設其餘的七位學生平均的答對題數為 m，因為本測驗共有 20 道題且這七位學生每人都至少答對 10 題，故 $10 \le m \le 20$，則十位學生平均的答對題數為

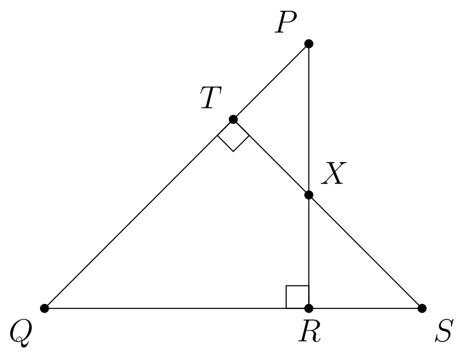
$$\frac{8+8+9+7m}{10} = \frac{25+7m}{10}$$

因此知 $25+7m$ 可被 10 整除，所以 m 為 5 的奇數倍，即 m 為 15。所以這十位學生平均的答對題數為 $\dfrac{25+7\times15}{10} = 13$。

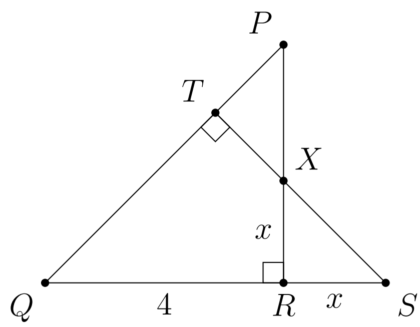
答: (D).

16. 在右圖中，PQR、QST 均為直角等腰三角形且 $QR = QT = 4\,\text{cm}$。請問四邊形 $QRXT$ 之面積為多少 cm^2？

(A) $16(\sqrt{2}-1)$ (B) $4\sqrt{2}$
(C) $16\sqrt{2}-10$ (D) $8(\sqrt{2}-1)$
(E) $8-\sqrt{2}$



由題意可知 $QR = PR = QT = TS = 4\,\text{cm}$，並令 $x\,\text{cm} = RS = RX$，如圖所示。則四邊形 $QRXT$ 的面積為 $\frac{1}{2}\times 4^2 - \frac{1}{2}x^2 = (8-\frac{1}{2}x^2)\,\text{cm}$。由勾股定理可知 $PQ^2 = 4^2+4^2 = 32\,\text{cm}^2$，因此 $PQ = QS = 4\sqrt{2}\,\text{cm}$。故知 $x = 4\sqrt{2}-4 = 4(\sqrt{2}-1)\,\text{cm}$，所以四邊形 $QRXT$ 之面積為



$$8-\frac{1}{2}x^2 = 8-8(\sqrt{2}-1)^2 = 16(\sqrt{2}-1)\,\text{cm}^2$$

答: (A).

---

17. 請問使得 $x+2x+3x+4x+\cdots+100x$ 之和為完全平方數的正整數 x 之最小值是什麼？

(A) 202 (B) 5050 (C) 1010 (D) 100 (E) 101

此等差數列之和為

$$S = x+2x+\cdots+100x = x(1+2+\cdots+100) = 5050x = 2\times 5^2\times 101\times x.$$

若 S 為完全平方數，則其質因數分解式中的指數須皆為偶數，故 x 的最小值為 $2\times 101 = 202$。

答: (A).

---

18. 將十個完全相同的實心黃金圓球融化並重鑄成一些直徑為原來 80% 的小實心圓球。若剩餘不足一圓球的黃金可忽略不計，請問最多可以鑄出多少個小圓球？

(A) 12 (B) 20 (C) 8 (D) 15 (E) 19

解法 1

若假設原來的實心圓球半徑為 r，則所鑄出新的小實心圓球半徑為 $0.8r$，可知一個小實心圓球與原來一個實心圓球的體積比值為

$$\frac{\frac{4}{3}\pi(0.8r)^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = (0.8)^3 = 0.512$$

若此比值恰為 0.5，則共可鑄出 20 個小圓球。但因實際上此比值約略大於 0.5，故可判斷實際上可以鑄出 19 個小圓球並剩下一點點黃金。

驗算，$19 \times 0.512 = 9.728$ 所以可以將原來的 10 個圓球共鑄出 19 個小圓球。

答: (E).

解法 2

當線性的尺寸變動了，它們的體積會成三次方變動，即小圓球的體積為原來大圓球的 $(\frac{4}{5})^3 = \frac{64}{125}$。每個大圓球等於 $\frac{125}{64}$ 個小圓球，而 10 個大圓球等於 $\frac{1250}{64} = \frac{625}{32} = 19\frac{17}{32}$ 個小圓球，故共可鑄出 19 個小圓球。

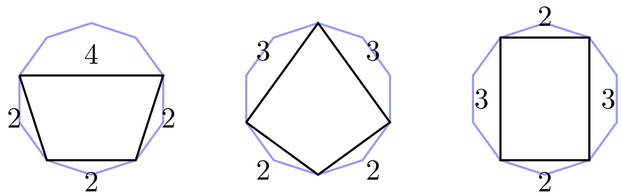
答: (E).

---

19. 一個正十邊形的邊長為 1，選擇其中四個頂點構成一個凸四邊形使得它的所有邊長都大於 1。請問共可以選出多少個不全等的四邊形滿足上述條件？

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

可知四邊形的每一條邊都至少跨越原十邊形中的二條邊，故可將四邊形依序以它的邊所跨越原十邊形的邊數標記，則得四元數 (h, i, j, k)，其中每一個正整數都至少為 2，且有 $h + i + j + k = 10$。若選擇開始的邊與方向，可令 h 之值為最大值且 $i \geq k$，則對應此四邊形可能有以下的三種情況 $(4, 2, 2, 2)$、$(3, 3, 2, 2)$ 與 $(3, 2, 3, 2)$，如下圖所示：



梯形　箏形　矩形

答: (B).

---

20. 一個遞增的正整數數列 1、2、4、$\cdots$ 具有以下性質：從第三項起的每一項為與數列之前任何二項之和不相同的下一個正整數。請問此數列有多少項小於 2016？

(A) 1008 (B) 63 (C) 11 (D) 15 (E) 673

可列出此數列的前幾項為 1、2、4、7、10、13、$\cdots$。若忽略數 2 的這一項，可發現每一項都是 3 的倍數加 1，證明如後。因為 $2016 \div 3 = 672$，可將 1 代替 2017，再將 2 考慮進來，可知小於 2016 的正整數總共有 673 個滿足上述條件。

現驗證此數列除了 2 以外，其餘每一項都可寫成 $3k+1$ 的形式。假設當 $n \geq 2$ 時，這數列的前 $n+1$ 項為 2 與 $3k+1$，其中 $0 \leq k \leq n-1$。可知當 $n = 2$ 時，假設成立。

接著可在數列中取一數 $m = 3n - 2$ 使得 $m \geq 4$。因 1、2 與 m 都在此數列中，故下一項不可能是 $m+1$ 也不可能是 $m+2$。

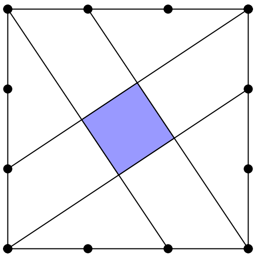
而數 $m + 3 = 3n + 1$ 是 3 的倍數加 1 且大於 4，然而數列中在 m 之前的任二項之和可能為 $2 + 2 = 4$、$2 + (3k+1) = 3(k+1)$、$(3k+1)+(3j+1) = 3(j+k)+2$，其

中僅有 4 是 3 的倍數加 1 且必小於 $m+3$。所以 $m+3$ 不會是數列的任何二項之和，所以下一項必為 $m+3=3n+1$。因此由數學歸納法可知，對於所有的 $n \geq 2$，數列中的第 $(n+2)$ 項為 $3n+1$。

答: (E).

21-25 題，每題 5 分

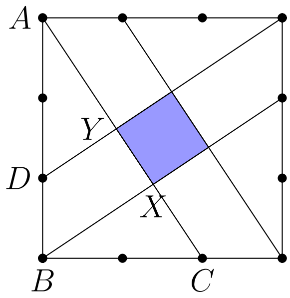
21. 從大正方形的每個頂點與其對邊上的三等分點相連，如圖所示。



已知圖中陰影部份的小正方形之面積為 1，請問這個大正方形的面積為多少？

(A) 16 (B) 15 (C) 14 (D) 13 (E) 12

解法 1



如圖所示之方式標記各點，並假設大正方形的邊長為 $3x$，則 $AC=\sqrt{9x^2+4x^2}=x\sqrt{13}$。

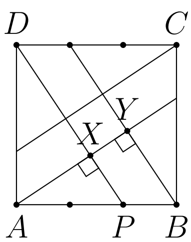
可知三角形 ABC、AXB、AYD 兩兩互為相似三角形，故 $\dfrac{AX}{AB}=\dfrac{AB}{AC}$，可得 $AX=\dfrac{9x^2}{x\sqrt{13}}=\dfrac{9}{\sqrt{13}}x$。

同理可得 $AY=\dfrac{6}{\sqrt{13}}x$，因此 $XY=\dfrac{3}{\sqrt{13}}x$。

因已知陰影部份面積為 1，故 $XY=1$，所以 $x=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$，此時即可得知大正方形的邊長為 $3x=\sqrt{13}$，因此大正方形的面積為 13。

答: (D).

解法 2

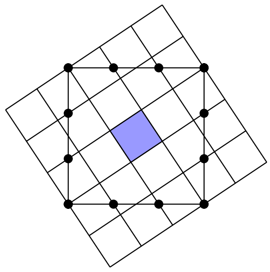


如圖所示之方式標記各點，可知三角形 AXP 與 AYB 為相似三角形且有 $AX=YB$、$AP=\frac{2}{3}AB$。因此 $AX=\frac{2}{3}AY$ 且 $XY=\frac{1}{3}AY$。

因已知陰影部份面積為 1，故 $XY=1$，所以可得 $AY=3$、$AX=2$。因此在三角形 AYB 中，$AY=3$ 以及 $YB=2$，故知三角形 AYB 的面積為 $\frac{1}{2}\times3\times2=3$。大正方形 $ABCD$ 包括四個與三角形 AYB 全等的三角形及在中央的小正方形，故其面積為 $4\times3+1=13$。

答: (D).

解法 3



如圖所示，繼續繪出與小正方形的邊互相平行且間距相同的直線，使得相鄰兩條直線間的距離等於此小正方形的邊長。

可發現所繪出的直線都經過三等分點，如圖所示。故原來的大正方形之頂點也會在所繪出的格線上。經計算小格數並及割出部份的面積，可得知原來的大正方形之面積為 13 個平方單位。

答: (D).

---

22. 請問使得 n^2+n+34 為完全平方數的所有正整數 n 之和是什麼？

(A) 50 (B) 16 (C) 43 (D) 34 (E) 49

解法 1

令 $n^2+n+34=(n+k)^2=n^2+2kn+k^2$，其中 $k>0$ 為整數，則可得 $n=\frac{34-k^2}{2k-1}$。可發現若 $k>5$，則 $n<0$，不合。因此 k 之可能值為 1、2、3、5，其對應的 n 值依序為 33、10、5、1，故所求之和為 $33+10+5+1=49$。

答: (E).

解法 2

因表達式 n^2+n+34 恆為偶數，故可假設 $(2a)^2=n^2+n+34$，其中 $a>0$。配方並化簡後得：

$$\begin{aligned}4a^2&=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+34\\16a^2&=(2n+1)^2+135\\(4a)^2-(2n+1)^2&=135\\(4a+2n+1)(4a-2n-1)&=3^3\times 5\end{aligned}$$

可發現需將 135 表示成兩個整數 $x=4a+2n+1$、$y=4a-2n-1$ 之積。可判斷出 $x>0$ 且 $x>y$，故有 $y=\dfrac{135}{x}>0$。

可知 $135=xy$ 共有四種表達法，其中 $x>y>0$，且對於每一種表達法，皆有 $a=\dfrac{x+y}{8}$ 與 $n=\dfrac{x-y-2}{4}$。此時可列表如下：

$x=4a+2n+1$	$y=4a-2n-1$	a	n
135	1	17	33
45	3	6	10
27	5	4	5
15	9	3	1
			49

故所求之和為 $33+10+5+1=49$。

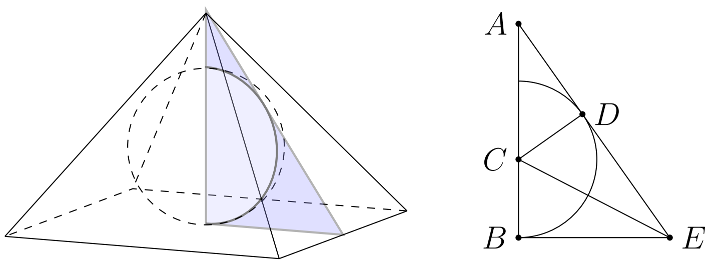
答: (E).

---

23. 請問可以放進一個所有稜長都為 2 的空心正方錐內部的最大球體之半徑是什麼？

(A) $\sqrt{2}-1$ (B) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (E) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

考慮被經過頂角、底面中心與底面正方形其中一邊中點的三角形所截出的截面，如圖所示。



令點 C 為球心，點 D 為球與斜面之切點。可知 $BE = ED = 1$、$AE = \sqrt{3}$、$AD = \sqrt{3} - 1$、$AB = \sqrt{2}$。且也可得知三角形 ABE 與 ADC 為相似三角形，故

$$CD = AD \times \frac{BE}{AB} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \times (\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

此即為最大球體之半徑。

答: (C).

---

24. 將十個正整數寫在十張卡片上，每張各寫一個數，將這些卡片放在一個圓周上。若一個數大於與它相鄰的兩數之平均，則將此卡片塗上綠色。請問此圓上最多能有幾張卡片被塗上綠色？

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 9

而若 10 張卡片都被塗上綠色，則每一張卡片都至少有一張與它相鄰的卡片上之數比它小，但對於這十個數中的最小數來說，這是不可能的，故不合。
然而，其中 9 張卡片都被塗上綠色是可能的，有許多種可能的方式，例如將卡片依序從 $n = -4$ 依序編號編至 $n = 5$，並在對應的 n 號卡片上寫上 $100 - n^2$ 之值。則當 $-4 \le n \le 4$ 時，拋物線 $y = f(n) = 100 - n^2$ 的開口朝下。而由

$$\frac{f(n-1) + f(n+1)}{2} = \frac{100 - (n+1)^2 + 100 - (n-1)^2}{2} = 99 - n^2 = f(n) - 1$$

由此可確知最多可將 9 張卡片塗上綠色。

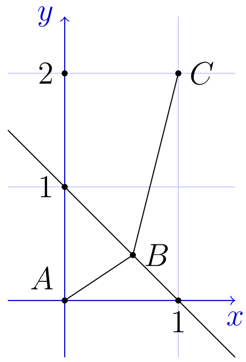
答: (E).

---

25. 請問算式 $\sqrt{x^2 + (1-x)^2} + \sqrt{(1-x)^2 + (1+x)^2}$ 的最小值是什麼？

(A) 2 (B) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) 0 (E) $1 + \sqrt{2}$

可知 $\sqrt{x^2+(1-x)^2}$ 之值恰為座標平面上，點 $A=(0,0)$ 與點 $B=(x,1-x)$ 的距離，而 $\sqrt{(1-x)^2+(1+x)^2}$ 之值恰為點 $B=(x,1-x)$ 與點 $C=(1,2)$ 的距離。



因此所求即為找出 $AB+BC$ 的最小值。因點 B 在直線 $y=1-x$ 上，故可判斷出此最小值發生在 A、B、C 三點共線時，其值為 $AC=\sqrt{5}$。

答: (C).

問題 26-30 的答案為 000-999 之間的整數，
請將答案填在答案卡上對應的位置。

第 26 題占 6 分，第 27 題占 7 分，第 28 題占 8 分，
第 29 題占 9 分，第 30 題占 10 分。

---

26. (同 中級卷第 29 題)

某高中的樂隊可以排列為一個矩形陣列，使得每一列恰有 3 位男孩、每一行恰有 5 位女孩。樂隊所排出的陣列有許多不同可能的大小，請問所有這些可能大小的陣列的人數之總和是什麼？

- -

令所排出的矩形陣列共有 r 列、c 行，則此陣列共有 rc 位學生。

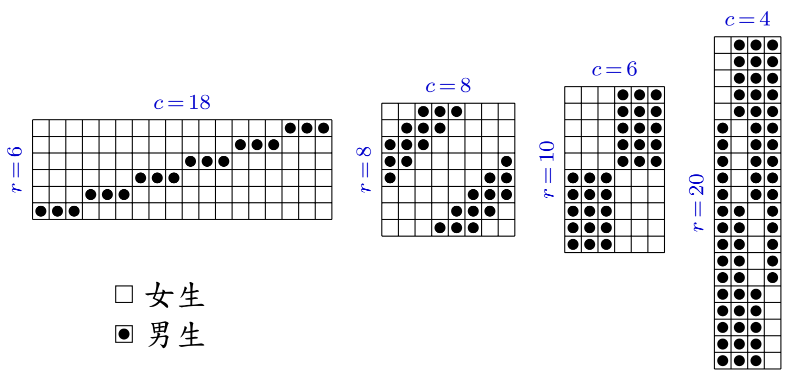
且由題意知共有 $3r$ 位男孩、$5c$ 位女孩，故學生數為 $3r+5c$。

此時即可得 $rc-3r-5c=0$，此等價於 $(r-5)(c-3)=15$。

因此數對 $(r-5,c-3)$ 可能的取值為 $(1,15)$、$(3,5)$、$(5,3)$、$(15,1)$。注意到 15 雖也可表示成二個負整數之積，但此會導致 $r\leq 0$ 或 $c\leq 0$，與題意矛盾。

所以可得知 (r,c) 的解有 $(6,18)$、$(8,8)$、$(10,6)$、$(20,4)$，即對應的人數 rc 依序為 108、64、60、80。

而對於每一種解的可能情況，可將男生、女生安排如下：



故所有這些可能大小的陣列之人數的總和為 $108+64+60+80=312$。

答: (312).

---

27. 令 a、b、c、m、n 為整數使得 $m<n$，且定義函數 $f(x)=ax^2+bx+c$，其中 x 為實數。若 $f(x)$ 的圖象包括點 $(m,0)$ 與點 $(n,2016^2)$，請問 $n-m$ 有多少種可能的值？

$$\begin{aligned} f(n)-f(m) &= (an^2+bn+c)-(am^2+bm+c) \\ 2016^2-0 &= (a(n+m)+b)(n-m) \end{aligned}$$

所以 $n-m$ 為 2016^2 的一個正因數。

而對於 2016^2 的每一個正因數 d 來說，當 $m=0$、$n=d$、$a=0$、$b=\frac{2016^2}{d}$ 時，則說明了 d 為 $n-m$ 的一個可能取值。

因為 $2016^2=2^{10}\times 3^4\times 7^2$ 的正因數個數為 $11\times 5\times 3=165$，所以 $n-m$ 有 165 種可能的值。

答: (165).

---

28. 若 a、b 為從 1 到 100 的正整數，請問有多少組數對 (a,b) 使得它們滿足 $a^{\sqrt{b}}=\sqrt{a^b}$？

可知此式即為 $a^{\sqrt{b}}=a^{b/2}$。若 $a=1$，則 b 的取值可能為 1 到 100 的所有正整數；若 $a\neq 1$，b 必須滿足 $\sqrt{b}=\frac{b}{2}$ 且 $b>0$，故 $b=4$，所以 a 的取值可能為 2 到 100 的所有正整數。因此共有 199 組可能的數對。

答: (199).

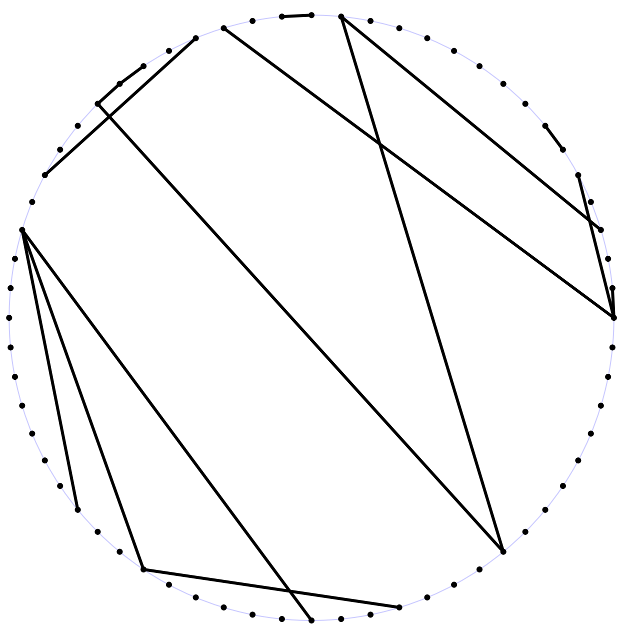
---

29. (同 中級卷第 30 題)

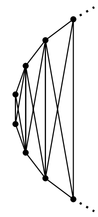
在一個圓周上等距離地取 64 個點，可知它們之間共可能畫出 $64\times 63\div 2=2016$ 條弦。

在此圓上畫出其中一些弦，要求每一條弦都不可從中切過多於一條其它的弦。

請問最多可以畫出多少條弦？



解法 1

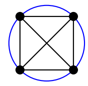


可在由這些點所形成的 64 邊形中，選擇一條弦後，將與這條弦平行的 31 條弦畫出而將此 64 邊形分成 31 個梯形。接著將每一個梯形的兩條對角線都畫出，此時可得 $64+30+2\times 31=156$ 條弦。

現證明此數量此即為最大值，

首先，當圓上有 n 個點時，其中 n 為偶數，令 M_n 為可畫出最多條弦時的弦數，則由相同的作法知 $M_n \geq n+\frac{n}{2}-2+2\times(\frac{n}{2}-1)=\frac{5}{2}n-4$。

引理 對於所有的偶數 n，恆有 $M_n=\frac{5}{2}n-4$。

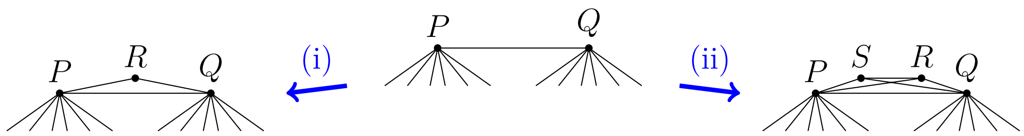


明顯可知當 $n=4$ 時，$M_n=6=\frac{5}{2}\times 4-4$，即此引理成立。

對於邊上已有弦 PQ 的情況時，考慮以下兩種添加弦的方式：

(i) 圓周上在點 P 與 Q 之間，加上一個點 R，此時可作兩條弦 PR 與 QR。

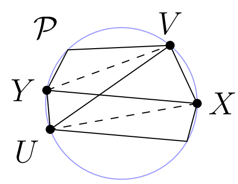
(ii) 圓周上在點 P 與 Q 之間，加上二個點 R、S，此時可作五條弦 PR、PS、QR、QS、RS.



可發現 (ii) 可添加的弦數較多，因此從 4 個點的圖開始，並遵循 (i) 與 (ii) 添加弦時，若能使利用 (ii) 的方法儘可能多，則可得到最多的弦數。而對於偶數點時，可全部都利用 (ii) 的方法，此時所得到的圖共有 $6+5\times\frac{1}{2}(n-4)=\frac{5}{2}n-4$ 條弦。

此時唯一的不確定性為僅利用 (i) 與 (ii) 時，是否真的能夠從 $n=4$ 開始來構造出最多弦數發生的情況。

假設已構造出最多弦數發生的圖。則圖上任何一條弦會是 n 邊形的一條邊，或是一條相交的弦，或是一條未相交的弦。而一條未相交的弦會將 n 邊形切成邊數較少的圖形。若所切出的圖形中有三角形與四邊形，則 n 邊形必可利用 (i) 與 (ii)，每操作一次而增加一個多邊形而得到。



現假設有一個依此方式構造出的多邊形 $\mathcal{P}$，此多邊形至少有 5 條邊且每條邊都是沒有交點的弦。因為此時的圖是有最多滿足題意的弦之情況，所以圖中存在一條弦 XY 與另一條弦 UV 相交，否則 XY 必可將 $\mathcal{P}$ 再切成邊數更少的多邊形。而任何一條與四邊形 $XUYV$ 的任一條邊有交點的弦都必會與 XY 或 UV 有交點，即與二條弦有交點，故這樣的弦是不允許出現的。因此四邊形 $XUYV$ 的每一條邊都不會與其它的弦有交點，所以這樣的邊在圖中一定是沒有交點的弦 (因此時的圖是有最多滿足題意的弦之情況)。現因為 $\mathcal{P}$ 至少有 5 條邊，所以 $XUYV\neq\mathcal{P}$，因此 $XUYV$ 至少有一條邊不是 $\mathcal{P}$ 的邊，不妨令這條邊為 XU，則 XU 是一條沒有交點的弦，並將 $\mathcal{P}$ 切成邊數更少的多邊形，矛盾。故 $\mathcal{P}$ 至多有 4 條邊。

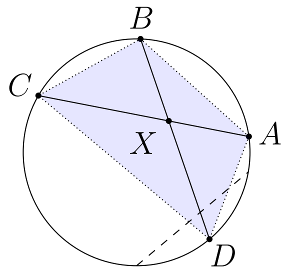
綜上所述，可以得知任何一個有最多滿足題意的弦之圖都必是由 4 點的圖依照 (i) 與 (ii) 的方法所構造出來的。當 n 為偶數時，則僅利用 (ii) 即可構造出最多的弦之圖，此時 $M_n=\frac{5}{2}n-4$。因此可推知 $M_{64}=160-4=156$。

答: (156).

解法 2

如同解法 1，可得 $64+30+2\times 31=156$ 條弦。

現證明此數量此即為最大值，假設已經畫出此最大數量的弦，即無法再添加任何一條弦。事實上，所有不會與其他弦相交的弦都必須被畫出，此包括了正 64 邊形的所有邊。此也表示只有頂點全在圓周上的多邊形與內部沒有弦的三角形，否則可以再畫一條對角線。



如圖，若其中兩條弦 AC 與 BD 相交在內部的點 X，則不可再有其它的弦與 AC、BD 相交，故可判斷出不會有其它的弦經過四邊形 $ABCD$，所以弦 AB、BC、CD、DA 不會再與其它的弦相交，故它們都必須被選入。此時 $ABCD$ 為所有的邊與對角線都被繪出，稱之為「全繪出四邊形」。

現可利用歐拉公式 $f+v=e+2$。若把此圖視為平面圖形，其中頂點包括原來的 64 個點與交點，其邊包括沒有被其它弦切過的弦與被其它弦切為二段的弦。我們可得三種類型的面：64 邊形的外部、全繪出四邊形所得出的四個三角形、三個頂點都在圓周上的三角形。假設有 q 個繪出的四邊形與 t 個三角形。則

- 總頂點數為 $v=64+q$，此即 64 個原來的頂點加上每個全繪出四邊形的一個交點。
- 總面數為 $f=1+t+4q$，此即 64 邊形外部、t 個三角形、每個全繪出四邊形的四個三角形。
- 總邊數為 e，其中 $2e=64+3(t+4q)$，此和為將每個面的所有邊數相加，每條邊都被算了二次。
- 總弦數為 $c=e-2q=32+\dfrac{3}{2}t+4q$，因為每個全繪出四邊形都多算二條弦。

故由歐拉公式 $f+v=e+2$：

$$
\begin{aligned}
0=(f+v)-(e+2)&=(65+t+5q)-(34+\frac{3}{2}t+6q)\\
&=31-\frac{1}{2}t-q\\
c&=32+\frac{3}{2}t+4(31-\frac{1}{2}t)\\
&=156-\frac{1}{2}t
\end{aligned}
$$

因此弦數的最大值為 156，且此值發生在 $q=31$、$t=0$ 時。

答: (156).

解法 3

如同解法 1，可得 $64+30+2\times 31=156$ 條弦。

現證明此數量此即為最大值，假設已將滿足題意的最多弦繪出，即所繪出的弦中，沒有與兩條或更多的弦相交，或是可與一條弦相交的情況都繪出。可知所繪出的這些弦中，包含了可連接這 64 個點而形成 64 邊形的弦。

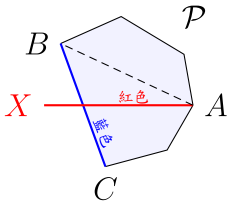
現將這些弦塗色。若一條弦沒有與其它的弦相交，則將這條弦塗成黑色；若一對弦彼此相交，則將其中一條塗成藍色、另一條塗成紅色。如果移除紅色的弦，並觀察藍色與黑色的弦所構成的圖形。因此時已沒有相交的弦，故 64 邊形可被切割成數個多邊形，這些多邊形的頂點都是原來 64 個點中的一些點。

現驗證這些多邊形都是三角形。

若存在一個多邊形的頂點數是 4 個或是 4 個以上，並將這個多邊形稱為 $\mathcal{P}$ 。

若 $\mathcal{P}$ 的所有邊都是黑色的，則由其必沒有藍色的弦可知原來也不會有紅色的弦經過 $\mathcal{P}$。此時能判斷出在 $\mathcal{P}$ 中可再繪出一條對角線，使得在原始情況中，此對角線為黑色的弦，此與假設已繪出滿足題意的最多弦之情況矛盾。

若 $\mathcal{P}$ 至少有一條藍色的邊 BC，如圖所示，則知存在一條紅色的弦 AX 與其相交，其中 A、B、C 為 $\mathcal{P}$ 的頂點而 X 為圓上且在 $\mathcal{P}$ 外面的點。因 $\mathcal{P}$ 不是三角形 ABC，因此 AB、AC 中至少有一條弦不是 $\mathcal{P}$ 的邊，可不妨令這條弦為 AB。



因為 AB 在 $\mathcal{P}$ 內，故 AB 不會與黑色或是藍色的弦相交；且 AB 也不會與紅色的弦相交，否則這條弦也會與 BC 相交，但 BC 已經與 AX 相交，不合。所以 AB 在原始情況中為黑色的弦，此與假設已繪出滿足題意的最多弦之情況矛盾。

所以知在藍色與黑色的弦所構成的圖形中，64 邊形是被切割成數個三邊形。因將 64 邊形利用不相交的對角線切成數個三邊形時，一定是切成 62 個三角形，且此時在圓上共有 $64+61=125$ 條弦。觀察可知每一條紅色的弦都會通過其中二個三角形，因此至多有 31 條紅色的弦，即最多有 $125+31=156$ 條弦。

而將 64 邊形切成 62 個三邊形且每一個三角形都有一個共同頂點時，可將三角形依序兩兩配成 31 對，使得每一對都可恰繪出一條紅色的弦，即共可繪 156 條弦。

答: (156).

---

30. 一個定義域為正整數的函數 f 具有以下性質：對於任意正整數 n，$f(f(n))=2n$ 且 $f(4n+1)=4n+3$。請問 $f(2016)$ 的最末三位數是什麼？

解法 1

觀察可得：

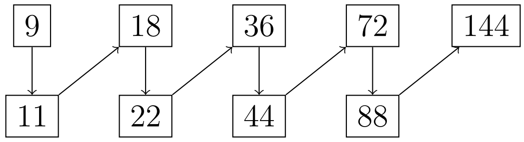
$$\begin{aligned}
f(4n+1) &= 4n+3\\
f(4n+3) &= f(f(4n+1)) = 2(4n+1)\\
f(2(4n+1)) &= f(f(4n+3)) = 2(4n+3)\\
f(2(4n+3)) &= f(f(2(4n+1))) = 2^2(4n+1)\\
f(2^2(4n+1))) &= f(f(2(4n+3))) = 2^2(4n+3)\\
&\vdots \quad \vdots\\
f(2^k(4n+1)) &= 2^k(4n+3)\\
f(2^k(4n+3)) &= 2^{k+1}(4n+1)
\end{aligned}$$

因此知 $f(2016)=f(63\times 32)=f((4\times 15+3)\times 2^5)=61\times 2^6=3904$。

答: (904).

解法 2

可將正整數放在平面上，在正整數 m 與 $f(m)$ 之間畫一箭頭。故可得知在奇數中，$4n+1$ 會有箭頭指向 $4n+3$，且每當 $m\longrightarrow x$ 時，必有 $x\longrightarrow 2m$。例如當 $n=2$ 時，有 $4n+1=9$、$4n+3=11$，則：



現因 $2016 = 63 \times 2^5$，其中 $63 = 2 \times 15 + 3$，故有

$$\begin{tikzcd}
\boxed{61} \arrow[d] & \boxed{122} \arrow[d] & \boxed{244} \arrow[d] & \cdots & \boxed{2^5 \times 61} \arrow[d] & \boxed{2^6 \times 61} \\
\boxed{63} \arrow[ur] & \boxed{126} \arrow[ur] & \boxed{252} & & \boxed{2^5 \times 63} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

因此 $f(2016) = 2^6 \times 61 = 3904$。

答: (904).

解法 3

由題意可知 $f(f(f(n))) = f(2n)$ 且 $f(f(f(n))) = 2f(n)$，故有 $f(2n) = 2f(n)$，繼續迭代 k 次，可得 $f(2^k n) = 2^k f(n)$。所以有 $f(2016) = f(2^5 \times 63) = 2^5 f(63)$。而因 $f(63) = f(f(61)) = 122$，故 $f(2016) = 2^5 \times 122 = 3904$。

答: (904).