中 級 卷

1-10 題，每題 3 分

, **1.** 將 2017 除以 5 所得的餘數為

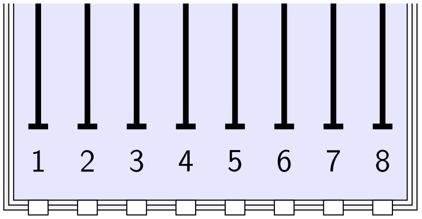
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

- -

因 2015 為 5 的倍數，故所求之餘數為 2。

答: (C)。

, **2.** A、B、C、D、E、F、G、H 這八位小孩在游泳池進行游泳比賽。
將他們隨意地分配到 1 號至 8 號水道。
請問是 F、G 或 H 被分配到 1 號水道的機率是什麼？



(A) $\frac{3}{8}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{5}{3}$ (E) $\frac{1}{3}$

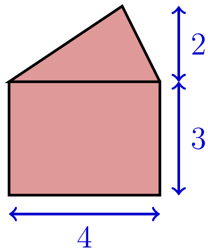
- -

這八位小孩中的每一位被分配到 1 號水道的機率都相等，故 F、G 或 H 被分配到 1 號水道的機率是 $\frac{3}{8}$。

答: (A)。

, **3.** 請問圖中陰影部分的總面積為多少平方單位？

(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 18



- -

矩形的面積為 $3 \times 4 = 12$ 平方單位而三角形的面積為 $\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$ 平方單位，故陰影部分的總面積為 $12 + 4 = 16$ 平方單位。

答: (C)。

, **4.** 1 的 1000% 等於

(A) 0.1 (B) 1 (C) 10 (D) 100 (E) 1000

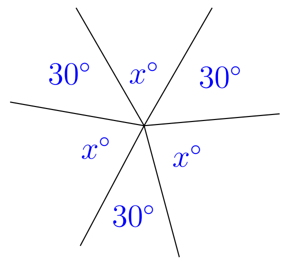
- -

1 的 100% 等於 1，而 1000% 為此值的 10 倍，即所求為 10。

答: (C)。

, **5.** 在圖中總共有六個角，其中有三個角的角度都等於 30°，而另三個角的角度都等於 x°。請問 x 之值是多少？

(A) 70 (B) 60 (C) 90 (D) 120 (E) 100



可知圍繞一個點一圈的角之度數總和為 360°，故有 $3x+90=360$，因此 $3x=270$，即 $x=90$。

答: (C)。

, **6.** 請問下列哪一個選項中的分數最大？

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{13}{42}$ (C) $\frac{21}{43}$ (D) $\frac{4}{123}$ (E) $\frac{14}{23}$

將每一個選項中的分數與 $\frac{1}{2}$ 比較大小，可發現僅 $\frac{14}{23}$ 大於 $\frac{1}{2}$。

答: (E)。

, **7.** 小艾玩文字遊戲。每撥動老爺鐘一下，她就將兩個字母互換位置。請問她最少要撥動幾下老爺鐘才能將 WORDS 變成 SWORD？

(A) 3　(B) 4　(C) 6　(D) 7　(E) 8

解法 1

有許多互換 4 次即可完成的方法。例如：

$$\text{WORDS} \to \text{WORSD} \to \text{WOSRD} \to \text{WSORD} \to \text{SWORD}$$

然而，僅互換 3 次或更少的次數就無法達成。現證明此結論，注意到每一個字母都至少互換一次位置，故總共至少要互換 3 次。

現假設恰互換 3 次可使得 WORDS 變成 SWORD。因每一次互換都會影響兩個字母的位置，且每一個字母都至少改變一次位置，有 4 個字母互換一次，而 1 個字母互換二次。對於只互換一次的 4 個字母中，有 2 個字母要分別與改變兩次的字母互換一次，而另 2 個字母則彼此互換一次。但在 WORDS 中，無法找出任何一對字母是彼此互換一次位置後恰落在 SWORD 中的正確位置。故知互換 3 次不可能達成目的。

答: (B)。

解法 2

前一個解法中已說明互換 4 次是可行的。現只需確認最小可能互換次數為 4 次。

依照下列方式規定每個字母的值，加總每個字母的值作為這個字之值：

字母的位置	值
該字母在初始位置	-1
該字母在最終位置	1
該字母位在其餘的位置	0

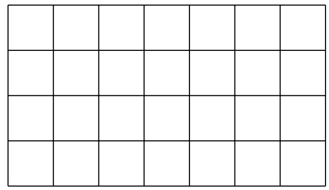
例如在前述系列中，X 值遞增：$-5 \to -2 \to 0 \to 2 \to 5$。

可知每一次互換後，X 值至多增加 4。然而，一次互換後 X 值增加 4 的情況僅會發生在互換位置的兩個字母都是從初始的位置換到目標的位置，即它們初始位置

恰為另一個字母的目標位置。但不存在這樣的兩個字母，所以一次互換 X 值至多增加 3。故從 -5 增加至 5 要互換 4 次或 4 次以上。因此互換次數最少為 4 次。

答: (B)。

, **8.** 請問有多少種方法可以將一個 3×1 的矩形放置在這個方格表內使得它可以完整地蓋住三個小方格？



(A) 34 (B) 28 (C) 56 (D) 40 (E) 10

若此矩形是水平橫放的，則它的最左邊的小方格可以是方格表中前五行的任何一個小方格，此共有 $5 \times 4 = 20$ 種方法。
若此矩形是鉛垂直放的，則它的最上面的小方格可以是方格表中前二列的任何一個小方格，此共有 $7 \times 2 = 14$ 種方法。
故合計共有 $20 + 14 = 34$ 種方法。

答: (A)。

, **9.** 假設 $3a = 4$ 且 $9b = 7$，則 $18(a + b)$ 之值等於

(A) 38 (B) 75 (C) 198 (D) 132 (E) $\frac{22}{3}$

$18(a + b) = 6(3a) + 2(9b) = 6 \times 4 + 2 \times 7 = 38$。

答: (A)。

, **10.** 小麥每天都會收到一些電子郵件。在星期五，他注意到連續這五天裡，每天收到的電子郵件數量都是大於 20 的相異質數。請問他在這五天內總共至少收到多少封電子郵件？

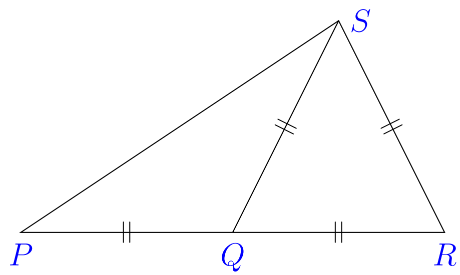
(A) 125 (B) 139 (C) 157 (D) 161 (E) 175

將大於 20 的最小五個質數相加，可得 $23 + 29 + 31 + 37 + 41 = 161$。

答: (D)。

11-20 題，每題 4 分

, **11.** 在三角形中，已知 $PQ = SQ = SR = QR$，如下圖所示。

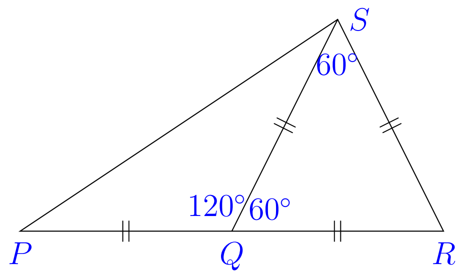


則比例 $\angle PSR : \angle PQS$ 等於

(A) 1:1 (B) 1:2 (C) 1:3 (D) 2:3 (E) 3:4

- -

可知 $\triangle QRS$ 是等邊三角形，故 $\angle SQR = \angle QSR = 60^\circ$ 且 $\angle PQS = 120^\circ$。



而 $\triangle PQS$ 是等腰三角形，故 $\angle QPS = \angle QSP$。因 $\angle QPS + \angle QSP + \angle PQS = 180^\circ$，故可得知 $\angle QPS = \angle QSP = 30^\circ$。

所以 $\angle PSR = 90^\circ$ 且可得知 $\angle PSR : \angle PQS = 90 : 120 = 3 : 4$。

答: (E)。

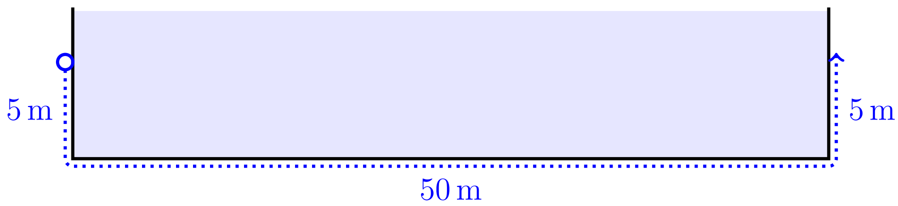
, **12.** 一個矩形游泳池的長為 50 m、寬為 20 m。這游泳池被分割為十條水道，每條長為 50 m、寬為 2 m，並依序編號為 1 號至 10 號。

當我沿著其中一條水道的中線游完單程後，沿著游泳池邊走回原出發點時，我注意到我所走的長度比我游泳的長度還多 20%。

請問下列哪一個選項可能是我所游的水道編號？

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4　　(E) 5

我一共游了 50 m，而此長度的 20% 為 10 m。因此我所走的長度為 60 m 且走的路徑如圖所示。



可知我所游的水道中線端點距離游泳池最近的一個角落為 5 m，而每一條水道之寬度都是 2 m。故我游泳時與游泳池最近的一個角落之間有 $2\frac{1}{2}$ 條水道，即我所游的水道編號是 3 或 8。

答: (C)。

, **13.** 一張正方形的桌面被全等的單位正方形瓷磚不重疊地鋪滿，且兩條對角線上總共有 25 塊瓷磚。
請問這個桌面上總共有多少塊瓷磚？

(A) 625 (B) 269 (C) 425 (D) 225 (E) 169

- -

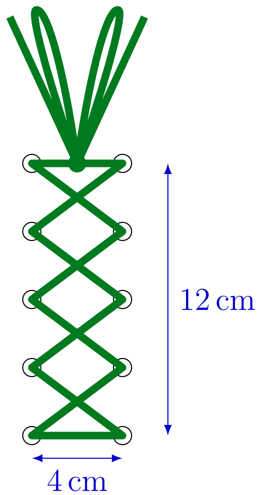
可知在每條對角線上都有 13 塊瓷磚，其中有一塊會同時落在兩條對角線上。故正方形桌面每條邊上都有 13 塊瓷磚，即桌面上總共有 $13 \times 13 = 169$ 塊瓷磚。

答: (E)。

, **14.** 小葛的鞋子有 5 對鞋孔可綁鞋帶，相對的鞋孔之間的距離為 4 cm 且每一側第一個與最後一個鞋孔之間的距離為 12 cm。小葛依如圖所示的方式綁鞋帶，且鞋帶打結的部分之長度為 40 cm。

請問下列哪一個選項最接近這條鞋帶的長度？

(A) 60 cm (B) 70 cm (C) 80 cm (D) 90 cm (E) 100 cm



因為每一側第一個與最後一個鞋孔之間的距離為 12 cm，故知同側兩個相鄰鞋孔之間的距離為 3 cm。而鞋帶每條斜線部分都是以 4 cm 為底邊、3 cm 為高的直角三角形之斜邊，即它的長度為 $\sqrt{4^2+3^2}=5\,\text{cm}$。鞋帶共有 8 段斜線、2 段直角三角形的底邊及打結的部分，其總長度為

$$8\times 5+2\times 4+40=88\,\text{cm},$$

最接近於 90 cm。

答: (D)。

, **15.** 算式

$$\sqrt{20-\sqrt{14+\sqrt{5-\sqrt{1}}}}$$

的值最接近於

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

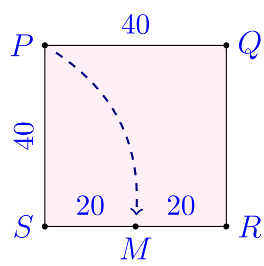
- -

由裡至外依序計算根號的取值：

$$\sqrt{5-\sqrt{1}}=\sqrt{4}=2$$
$$\sqrt{14+\sqrt{5-\sqrt{1}}}=\sqrt{14+2}=4$$
$$\sqrt{20-\sqrt{14+\sqrt{5-\sqrt{1}}}}=\sqrt{20-4}=4$$

答: (D)。

, **16.** 有一張 $40\,\mathrm{cm} \times 40\,\mathrm{cm}$ 的正方形紙片 $PQRS$。將左上角的頂點 P 往下摺使其與底邊 RS 的中點 M 重合而得到一條摺痕。請問這條摺痕與紙張右側的邊 QR 相交於何處？



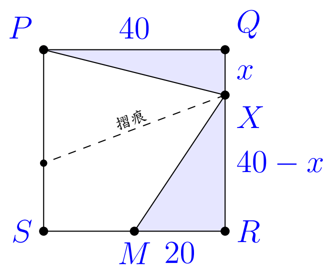
(A) 交於點 Q
(B) 距離點 Q 的 $5\,\mathrm{cm}$ 處
(C) 距離點 Q 的 $10\,\mathrm{cm}$ 處
(D) 距離點 Q 的 $20\,\mathrm{cm}$ 處
(E) 沒有交點

- -

解法 1

令點 X 是摺痕上的任意一點，當紙片下摺時，PX 與 MX 會重合，使得 $PX = MX$。而因在 PQ 上的點都一定離 P 點較近而離 M 點較遠，故點 X 不會落在 PQ 上。因此摺痕的右側端點會落在 QR 上。令各線段長度如圖所示，由勾股定理可得

$$\begin{aligned}
PX^2 &= 40^2 + x^2 &&= x^2 + 1600 \\
MX^2 &= 20^2 + (40-x)^2 &&= x^2 - 80x + 2000 \\
PX^2 - MX^2 &= 80x - 400 &&= 0 \\
x &= \frac{400}{80} = 5
\end{aligned}$$

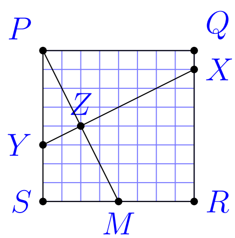


因此知點 X 位於距離點 Q 的 $5\,\mathrm{cm}$ 處。

答: (B)。

解法 2

可知摺痕 XY 是 PM 的中垂線。在此正方形上作邊長為 $5\,\mathrm{cm}$ 的方格表，如圖所示。則可判斷出 PM 以 $2:1$ 的比率往下傾斜，故 YX 以 $1:2$ 的比率往上傾斜。



如圖，可得知點 X 在點 Q 下方一個小方格處，即距離點 Q 的 $5\,\mathrm{cm}$ 處。

答: (B)。

, **17.** 已知數 18、p、13、q、15、r、7 的平均值為 11，則 p、q、r 的平均值為

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 11 (E) 12

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

這七個數的總和為 $7\times 11=77$，
故 $p+q+r=77-(18+13+15+7)=24$。
所以 p、q、r 的平均值為 $24\div 3=8$。

答: (B)。

, **18.** 已知對於所有的 a，等式 $a(a^9-a^8)+a^9=a^x$ 都成立，則 x 的值為

(A) 0 (B) 1 (C) 8 (D) 9 (E) 10

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

因 $a^x=a(a^9-a^8)+a^9=a^{10}-a^9+a^9=a^{10}$，故 $x=10$。

答: (E)。

, **19.** 從 0 到 9 的十個數碼都各恰使用一次可構成兩個五位數。請問這兩個五位數之差的最小可能值是多少？

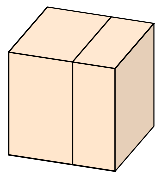
(A) 1 (B) 9 (C) 99 (D) 247 (E) 315

可知這兩個數的首位數碼都不相同，且差的最小可能值會發生在首位數碼的差為 1 的情況下。而較小的數中，由其餘的數碼所構成的數要儘可能大、較大的數中，由其餘的數碼所構成的數要儘可能小。

由四個數碼所能構成的最大數、最小數分別為 9876、0123，故差的最小可能值會發生在這兩個五位數分別為 50123 與 49876 時，此時差為 $50123 - 49876 = 247$。

答: (D)。

, **20.** 將一個表面積為 X 的正立方體切為兩個長方體，其中一個長方體的表面積為 $\frac{1}{2}X$。請問另一個長方體的表面積是多少？



(A) $\frac{1}{4}X$ (B) $\frac{1}{2}X$ (C) $\frac{2}{3}X$ (D) $\frac{3}{4}X$ (E) $\frac{5}{6}X$

解法 1

令正立方體的邊長為 1 單位，則 $X = 6$ 且 $\frac{1}{2}X = 3$。

假設兩個長方體所切出的寬分別為 h 與 $1-h$。則前者的表面積為

$$2 \times (1^2) + 4 \times (h \times 1) = 2 + 4h = 3$$

即得 $h = \frac{1}{4}$，故 $1 - h = \frac{3}{4}$ 且後者的表面積為

$$2 \times (1 \times 1) + 4 \times (1 \times \frac{3}{4}) = 5$$

此為原來正立方體表面積的 $\frac{5}{6}$。

答: (E)。

解法 2

可知所切出的兩個長方體之表面積總和恰為原正立方體一個面的面積之 8 倍，故其值為 $\frac{8}{6}X$。所以另一個長方體的表面積是 $\frac{8}{6}X - \frac{1}{2}X = \frac{5}{6}X$。

答: (E)。

21-25 題，每題 5 分

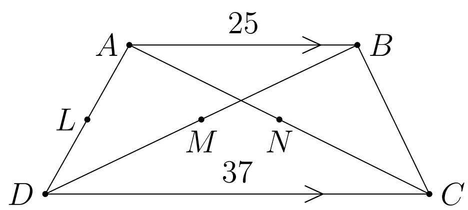
, **21.** 一個四邊形有一對長度分別為 25 cm 與 37 cm 的平行邊。請問它的兩條對角線上的中點之間的距離為多少 cm？

(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 12

- -

解法 1

令 L、M 與 N 分別為 AD、BD 與 AC 的中點，如圖所示。



則 $\triangle ADC$ 與 $\triangle ALN$ 相似，且其對應邊的比例為 $2:1$。故 $LN \parallel DC$ 且 $LN = \frac{1}{2}DC = \frac{37}{2}$。

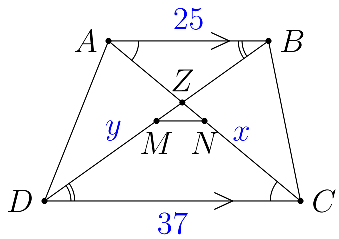
同樣地，也可得知 $\triangle DAB$ 與 $\triangle DLM$ 相似且有 $LM \parallel AB$ 以及 $LM = \frac{1}{2}AB = \frac{25}{2}$。

因 $LN \parallel DC \parallel LM \parallel AB$，故 L、M 與 N 三點共線。故可得 $MN = LN - LM = \frac{37-25}{2} = 6\,\text{cm}$。

答: (C)。

解法 2

如圖所示之方式標記各點，其中 M、N 分別為對角線的中點且 Z 為對角線的交點。令 $x = CZ$ 與 $y = DZ$。



利用所標記出的等角可知 $\triangle ABZ$ 與 $\triangle CDZ$ 為相似三角形。故 $AZ = \frac{25}{37}x$，所以 $AC = AZ + CZ = \frac{25}{37}x + x = \frac{62}{37}x$。又 $NC = \frac{1}{2}AC = \frac{31}{37}x$，故 $NZ = CZ - NC = \frac{6}{37}x$。同樣地，也可得知 $MZ = \frac{6}{37}y$。

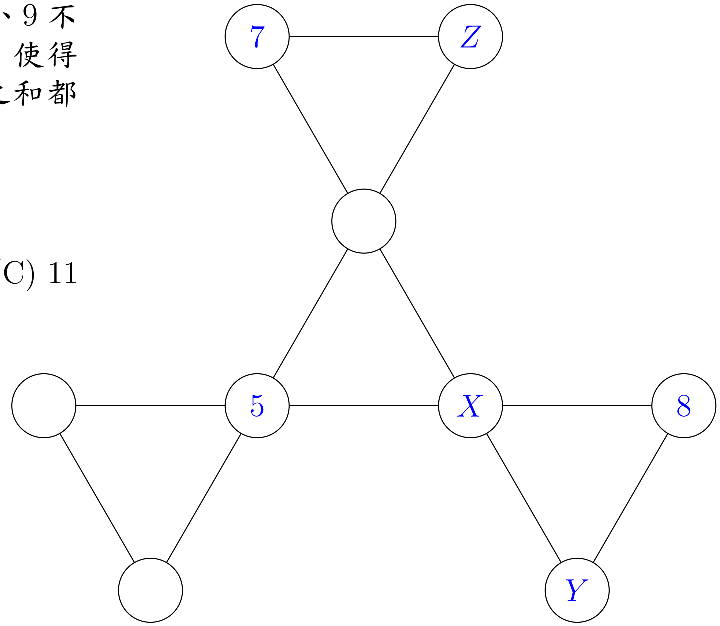
所以 $\triangle ZMN$ 與 $\triangle ZDC$ 有共同的角且兩夾邊對應成比例，因此這兩個三角形相似。故 $MN = \frac{CD}{CZ}NZ = \frac{37}{x}\frac{6x}{37} = 6\,\mathrm{cm}$。

答: (C)。

, **22.** 將正整數 1、2、3、4、5、6、7、8、9 不重複地恰填入圖中的九個圓圈內，使得所畫出的四個三角形頂點上的數之和都相等。

現已填入其中三個數，如圖所示。

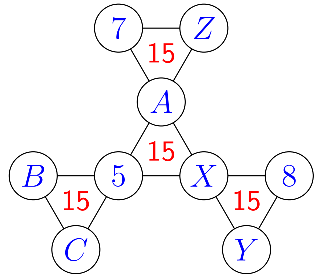
請問 $X+Y+Z$ 的值等於多少？



(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

可知圖形頂部、左下與右下的三個三角形共包含了全部 9 個數。因此每個三角形頂點上的數之和的三倍為 $1+2+\cdots+9=45$，即每個三角形頂點上的數之和為 15。

令 A、B 與 C 分別為如圖所示之圓圈內的數。可知 2 不可能位於左下的三角形內，否則需填入另一個 8。同樣地，2 也不可能位於中間或者右下的三角形內，否則需填入另一個 5 或者 8。因此 $Z=2$。



此時即可得知 $A=6$、$X=4$ 與 $Y=3$。

此時仍剩下 1 與 9 這兩個數尚未填入，且有兩種方式填入：$B=1$ 與 $C=9$，或者 $B=9$ 與 $C=1$。

所以共有兩種填法，並且都有 $X+Y+Z=4+3+2=9$。

答: (A)。

, **23.** 請問有多少個三位數恰等於它的數碼和之十三倍？

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

解法 1

假設三位數 $\overline{abc}$ 滿足題意，則有 $100a+10b+c=13(a+b+c)$ 並可化簡為：

$$\begin{aligned}100a+10b+c&=13a+13b+13c\\87a&=3b+12c\\29a&=b+4c.\end{aligned}$$

然而，$b+4c$ 之值至多為 45，故 $a=1$。而 $29=1+4\times7=5+4\times6=9+4\times5$，故知滿足題意的三位數有 117、156、195 等 3 個。

答: (D)。

解法 2

因滿足題意的三位數 n 是 13 的倍數，故可假設 $n=13k$，其中 $k\geq 8$，且知 k 為 n 的數碼和。則 $k\leq 9+9+9=27$，故 $n\leq 13\times 27=351$，因此可再推得 $k<3+9+9=21$。

接著對於 $k=8$、9、$\cdots$、20，可造出一個有 k、$n=13k$ 與 n 之數碼和 S 的表如下

k	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260
S	5	$\boxed{9}$	4	8	$\boxed{12}$	16	11	$\boxed{15}$	10	5	9	13	8

可發現僅 $n=117$、156 與 195 這 3 個數時，n 之值恰為它的數碼和之 13 倍。

答: (D)。

, **24.** 對一群人作是否知道資源回收已經從兩週一次改為每週一次的問卷調查。他們之中有三分之二的人回答「知道」、三分之一的人回答「不知道」。
經過一年後，對同一群人再作一次同樣的問卷調查，這一次他們之中有四分之一的人改變他們的答案，最後使得回答「知道」與「不知道」的人一樣多。
請問在這一群原來回答「知道」的人中，有幾分之幾的人後來改變他們的答案？

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{5}{16}$

解法 1

在第一次調查時，有 $\frac{2}{3}$ 回答「知道」而 $\frac{1}{3}$ 的人回答「不知道」。令 x 為全體的人中，從原來回答「知道」改為「不知道」的比例，則可判斷出 $\frac{1}{4}-x$ 為全體的人中，從原來回答「不知道」改為「知道」的比例。
因兩次調查中回答之答案為「不知道」的比例之變化為 $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，這是因為增加了 x 且減少了 $\frac{1}{4}-x$，故有

$$\begin{aligned} x-\left(\frac{1}{4}-x\right) &= \frac{1}{6} \\ 2x &= \frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12} \\ x &= \frac{5}{24} \end{aligned}$$

因此原來回答「知道」的人中，有 $\frac{5}{24}\div\frac{2}{3}=\frac{5}{16}$ 的人後來改變他們的答案。

答: (E)。

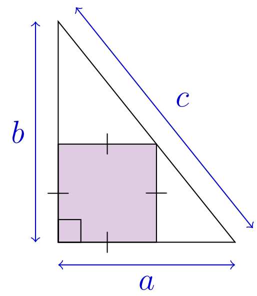
解法 2

可知每 120 人中，第一次調查時有 80 人回答「知道」、40 人回答「不知道」，而第二次調查時有 60 人回答「知道」、60 人回答「不知道」，且當中有 30 人在兩次調查的答案不一樣。因兩次調查各答案的人數變化為 20 人，故一定是 25 人從原來回答「知道」改為「不知道」、5 人從原來回答「不知道」改為「知道」。

故知每 80 個第一次回答「知道」的人中，會有 25 人改變答案，即佔回答「知道」的人之 $\frac{25}{80} = \frac{5}{16}$。

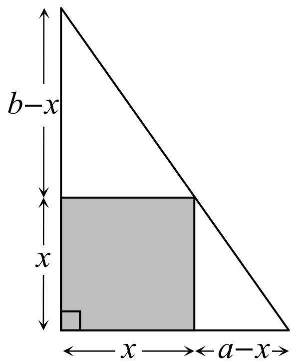
答: (E)。

, **25.** 在一個邊長分別為 a、b 與 c 的直角三角形角落畫一個正方形，如圖所示。
對於所有的情況，請問下列哪一選項為沒有塗上陰影的面積與塗上陰影的面積之比？



(A) $1:1$ (B) $c:(a+b)$ (C) $ab:c^2$
(D) $(a+b)^2:2c^2$ (E) $c^2:2ab$

令 x 為正方形的邊長，則由相似三角形可知 。



$$\begin{aligned}\frac{x}{a-x} &= \frac{b}{a}\\ ax &= b(a-x)\\ (a+b)x &= ab\\ x &= \frac{ab}{a+b}\end{aligned}$$

因此由勾股定理可得知沒有塗上陰影的面積與塗上陰影的面積之比為

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{2}ab-x^2}{x^2} &= \frac{ab}{2x^2}-1\\ &= \frac{(a+b)^2}{2ab}-1\\ &= \frac{a^2+2ab+b^2-2ab}{2ab}\\ &= \frac{a^2+b^2}{2ab}\\ &= \frac{c^2}{2ab},\end{aligned}$$

答: (E)。

問題 26-30 的答案為 000-999 之間的整數，
請將答案填在答案卡上對應的位置。

第 26 題占 6 分，第 27 題占 7 分，第 28 題占 8 分，
第 29 題占 9 分，第 30 題占 10 分。

, **26.** 將四個連續正整數的乘積再加上 1 其結果恆為一個完全平方數。前 2017 個這樣的平方數為：

$$\begin{aligned} 1\times2\times3\times4 \ &+\ 1 = 25 = 5^2\\ 2\times3\times4\times5 \ &+\ 1 = 121 = 11^2\\ 3\times4\times5\times6 \ &+\ 1 = 361 = 19^2\\ &\vdots\\ 2017\times2018\times2019\times2020 \ &+\ 1 = 16\,600\,254\,584\,281 = 4\,074\,341^2 \end{aligned}$$

依上述方法找出來的 2017 個數 5、11、19、$\cdots$、4 074 341 中，請問有多少個數之末位數碼為 1？

- -

解法 1

第四個數為

$$4\times5\times6\times7\ +\ 1 = 841 = 29^2$$

故可觀察出此數列的所有數之平方根為 5、11、19、29、41、55、$\cdots$，即從增加 6 開始，接著每一個數增加的量都是下一個偶數，因此可判斷出末位數碼為依照 $\{5, 1, 9, 9, 1\}$ 的順序循環重複出現，即每五個數中，會有兩個數的末位數碼為 1。所以在前 2015 個數中，有 $\frac{2}{5}\times2015 = 806$ 個數的末位數碼為 1，而第 2017 個數之末位數碼也是 1，故總共有 807 個數。

現驗證上述所觀察出的結論是正確的。考慮任意一個可表示成 $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ 的數，並分解如下：

$$\begin{aligned} n(n+3)\times(n+1)(n+2)\ +\ 1 &= (n^2+3n)(n^2+3n+2)\ +\ 1 \\ &= ((n^2+3n+1)-1)((n^2+3n+1)+1)\ +\ 1 \\ &= (n^2+3n+1)^2-1^2\ +\ 1 \\ &= (n^2+3n+1)^2 \end{aligned}$$

即第 n 個與第 $(n+1)$ 個數的平方根之間的差為

$$(n+1)^2+3(n+1)+1-(n^2+3n+1)=2n+4,$$

可發現 $n=1$ 時，取值為 6，且當 n 逐一增加時，取值會是下一個偶數。而此平方根可表示為 $n(n+3)+1$，並且當 $n(n+3)$ 為 10 的倍數時，其末位數碼為 1，但此僅會發生在 n 或 $n+3$ 可被 5 整除時，故可再推得每五個數中，會有兩個數的末位數碼為 1。

答: (807)。

解法 2

觀察可知 5、11、19、$\cdots$ 依序都恰比 6、12、20、$\cdots$ 少 1，也依序都恰比 4、10、18、$\cdots$ 多 1。在乘積 $n(n+1)(n+2)(n+3)$ 中，可從 $(n+1)$、$(n+2)$ 這一對因式中觀察出第一個數列、從 n、$(n+3)$ 這一對因式中觀察出第二個數列。

因此可以判斷出 $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n(n+3)+1)^2$。此可利用平方差公式而得：

$$\begin{aligned} (n(n+3)+1)^2-1 &= \big(n(n+3)+1-1\big)\big(n(n+3)+1+1\big) \\ &= n(n+3)(n^2+3n+2) \\ &= n(n+3)(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

現只須估計從 1 到 2017 之間，有多少個 n 的取值會使得 $n(n+3)+1$ 的末位數碼為 1。此僅會發生在 $n(n+3)$ 可被 10 整除，即僅會發生在 n 的末位數碼為 0、2、5 或 7。

因為 n 的末位數碼為 0 的數有 201 個而末位數碼為 2、5 或 7 的數都分別有 202 個，所以總共有 $201+3\times 202=807$ 個數。

答: (807)。

解法 3

在等式 $m^2 = n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ 中，可令 $x = n + \frac{3}{2}$ 而使得此乘積更為對稱：

$$\begin{aligned}
m^2 &= (x-\frac{3}{2})(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})(x+\frac{3}{2})+1 \\
&= (x^2-\frac{9}{4})(x^2-\frac{1}{4})+1 \\
&= x^4 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{25}{16} \\
&= (x^2-\frac{5}{4})^2
\end{aligned}$$

故 $m = x^2 - \frac{5}{4} = n^2+3n+1 = n(n+3)+1$。

可知 m 的末位數碼為 1 僅會發生在 $n(n+3)$ 可被 10 整除，即僅會發生在 n 的末位數碼為 0、2、5 或 7。

因為 n 的末位數碼為 0 的數有 201 個而末位數碼為 2、5 或 7 的數都分別有 202 個，所以總共有 $201 + 3 \times 202 = 807$ 個數。

答: (807)。

解法 4

在等式 $m^2 - 1 = n(n+1)(n+2)(n+3)$ 中，注意到左式可分解為 $(m-1)(m+1)$ 而右式的因式可分成兩組：$n(n+3) = n^2+3n$ 且 $(n+1)(n+2) = n^2+3n+2$。故可取 $m = n^2+3n+1$，且驗算如下：

$$\begin{aligned}
m^2 &= (n^2+3n+1)^2 \\
&= (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 \\
&= n(n+3)(n+1)(n+2)+1
\end{aligned}$$

綜上所述，對於任意的 n，$m^2 = n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ 唯一的正整數解為 $m = n(n+3)+1$。故可知 m 的末位數碼為 1 僅會發生在 $n(n+3)$ 可被 10 整除，即僅會發生在 n 的末位數碼為 0、2、5 或 7。

因為 n 的末位數碼為 0 的數有 201 個而末位數碼為 2、5 或 7 的數都分別有 202 個，所以總共有 $201 + 3 \times 202 = 807$ 個數。

hence (807).

解法 5

令第 n 個平方數為 m^2，其中 $n=1$、$\cdots$、2017，則

$$n(n+1)(n+2)(n+3)=m^2-1=(m-1)(m+1)\ .$$

在前幾項中，可將乘積 $n(n+1)(n+2)(n+3)$ 重排使得：

$$\begin{array}{rcccl} 5^2-1 &=& 4\times 6 &=& (1\times 4)\times(2\times 3)\\ 11^2-1 &=& 10\times 12 &=& (2\times 5)\times(3\times 4)\\ 19^2-1 &=& 18\times 20 &=& (3\times 6)\times(4\times 5) \end{array}$$

由此可推論 $m-1=n(n+3)$ 且 $m+1=(n+1)(n+2)$。利用代數來驗證此推論。假設 $m=n^2+3n+1$，則

$$\begin{aligned} m-1&=n^2+3n=n(n+3)\\ m+1&=n^2+3n+2=(n+1)(n+2)\\ m^2-1&=(m-1)(m+1)=n(n+3)(n+1)(n+2)\\ m^2&=n(n+1)(n+2)(n+3)+1 \end{aligned}$$

因此所列出的數之第 n 個數為 $m=n^2+3n+1$。

現可知若 $m-1=n(n+3)$ 可被 10 整除，則 m 的末位數碼為 1。因此共有四種情況：n 可被 10 整除、$n+3$ 可被 10 整除、n 為偶數且 $n+3$ 為 5 的奇數倍、$n+3$ 為偶數且 n 為 5 的奇數倍。所以 n 的末位數碼為 0、2、5 或 7。

因為 n 的末位數碼為 0 的數有 201 個而末位數碼為 2、5 或 7 的數都分別有 202 個，所以總共有 $201+3\times 202=807$ 個數。

答: (807)。

解法 6

令第 n 個平方數為 m^2，其中 $n=1$、$\cdots$、2017。接著將乘積展開後分組可得：

$$\begin{aligned} m^2&=n(n+1)(n+2)(n+3)+1\\ &=n^4+6n^3+11n^2+6n+1\\ &=n^2(n^2+6n+9)+2n^2+6n+1\\ &=n^2(n+3)^2+2n(n+3)+1 \end{aligned}$$

現令 $z = n(n+3)$；

$$\begin{aligned} m^2 &= z^2 + 2z + 1 \\ &= (z+1)^2 \end{aligned}$$

故 $m = z + 1 = n^2 + 3n + 1$。
驗算，若 $m = n^2 + 3n + 1$，則

$$\begin{aligned} n(n+3) &= m - 1 \\ (n+1)(n+2) &= n^2 + 3n + 2 = m + 1 \\ n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 &= (m-1)(m+1) + 1 = m^2 \end{aligned}$$

此即保證 $m = n^2 + 3n + 1$ 的確為所求之數。
為了使 m 的末位數碼為 1，$z = n(n+3)$ 須為 10 的倍數。故 n 或 $n+3$ 為偶數，且 n 或 $n+3$ 為 5 的倍數。因此 n 的取值有：

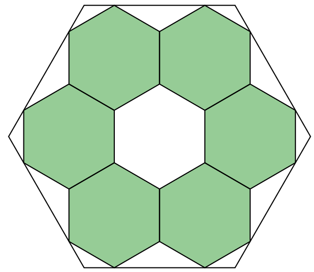
$$\begin{aligned} &n = 5, 10, 15, \ldots, 2015 && (403\text{ 個取值}) \\ &n = 2, 7, 12, \ldots, 2017 && (404\text{ 個取值}) \end{aligned}$$

所以 n 總共有 $403 + 404 = 807$ 個取值可使 m 的末位數碼為 1。

答: (807)。

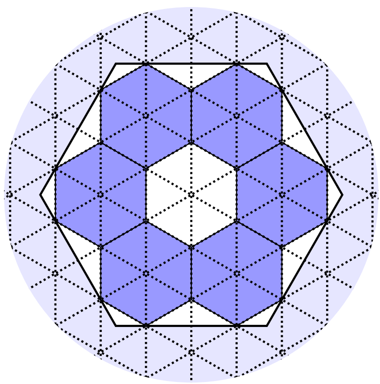
, **27.** 將六個全等的正六邊形放置在一個大正六邊形的內部，如圖所示。

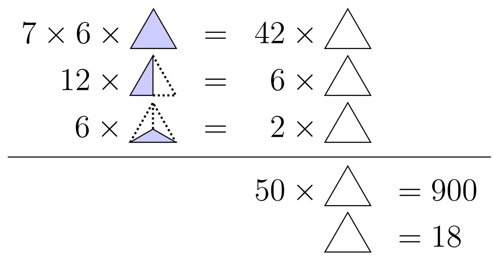
已知大正六邊形的面積為 900 平方單位，請問陰影部分的面積為多少平方單位？



解法 1

將每個小正六邊形都分為六個正三角形且延長每一條邊而得到正三角形網格。接著計算大正六邊形內，完整的單位三角形與部分的單位三角形之數量。



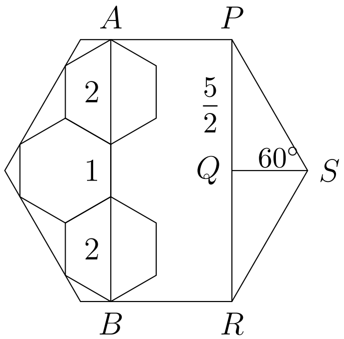


由此即可得知陰影部分的面積為 $18 \times 36 = 648$ 平方單位。

答: (648)。

解法 2

為了計算方便，不妨令每個小正六邊形的邊長為 1 單位，並注意到相對的頂點之距離為 2 單位。則下圖中，$PR = AB = 2 + 1 + 2 = 5$ 單位，因此知 $PQ = \frac{5}{2}$ 單位。而由直角三角形 PQS，可得知大六邊形的邊長 PS 為



$$PS = \frac{PQ}{\sin 60^\circ} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

因此六個小正六邊形的面積之總和與大正六邊形的面積比為

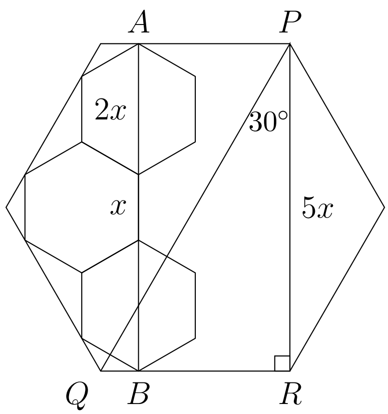
$$6 \times \frac{1^2}{(\frac{5}{\sqrt{3}})^2} = \frac{18}{25},$$

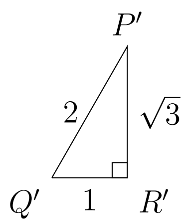
所以陰影部分的面積為 $\frac{18}{25} \times 900 = 648$ 平方單位。

答: (648)。

解法 3

令每個小正六邊形的邊長為 x，則小正六邊形相對的頂點之間的距離為 $2x$。故在下圖中，有 $PR = AB = 2x + x + 2x = 5x$。而 $\triangle PQR$ 的內角分別為 30°、60° 與 90°，故它與 $\triangle P'Q'R'$ 為相似三角形，且由勾股定理可知其邊長比。





$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{QR}{PR} = \frac{QR}{5x}$$

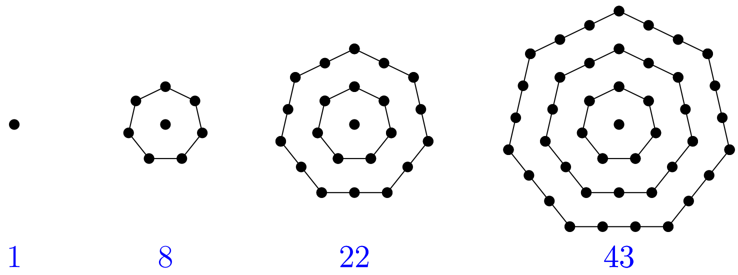
故 $QR = \frac{5x}{\sqrt{3}}$。此時可得知每個小正六邊形的邊長為大正六邊形的 $\frac{\sqrt{3}}{5}$ 倍，故每個小正六邊形的面積為大正六邊形的 $(\frac{\sqrt{3}}{5})^2 = \frac{3}{25}$ 倍，因此陰影部分的面積為大正六邊形的 $\frac{18}{25}$ 倍。

所以陰影部分的面積為 $\frac{18}{25} \times 900 = 648$。

答: (648)。

, **28.** 對於 $n \geq 3$，**實心正 n 邊形數**數列是由一個位於中心的點開始，每次都往外增加一層正 n 邊形的點之所有點數總和所構成的數列，其中每一層 n 邊形每一邊上的點數都比前一層多一個點。

例如，實心正七邊形數數列的前幾項為 1、8、22、43、$\cdots$，如下圖所示。



若實心正 n 邊形數數列中，其中有一項為 2017，請問 n 的最小可能值是多少？

若從位於中心的點之後共有 m 層，則第 k 層共有 kn 個點，且總點數為

$$1 \quad + \quad n + 2n + \cdots + mn = 1 + n\frac{m(m+1)}{2}$$

當此式等於 2017 時，有 $nm(m+1) = 2 \times 2016 = 2^6 \times 3^2 \times 7$ 且因要求 n 之值儘可能小，故 m 之值需儘可能大。

可知 m 或者 $m+1$ 會是奇數。4032 的奇因數為 1、3、7、9、21 與 63，而 4032 的偶因數中，比這些奇因數多 1 或是少 1 的因數為 2、4、6、8 與 64。

現由大至小逐一比較可能的數對。若 $m = 63$ 且 $m+1 = 64$，則 $n = 1$，此值太小；若 $m = 8$ 且 $m+1 = 9$，則 $n = 56$，此滿足題意。

接著驗算可得 $1 + 56 + 2 \times 56 + \cdots + 8 \times 56 = 1 + 36 \times 56 = 1 + 2016 = 2017$。因此 n 的最小可能值是 56。

答: (056)。

, **29.** 我有非常多個玩具士兵。我可以將這些玩具士兵排成一個有許多行、許多列的矩陣。我注意到若我從中移除 100 個玩具士兵後，仍可以將剩下的玩具士兵恰排成一個減少 5 列、增多 5 行的矩陣。

請問我必須從初始的矩陣中移除多少個玩具士兵才能將剩下的玩具士兵恰排成一個減少 11 列、增多 11 行的矩陣？

解法 1

假設原先可將這些玩具士兵排成 r 列、c 行，即我共有 $r \times c$ 個玩具士兵。則由題意可得

$$\begin{aligned}
& & r \times c - 100 &= (r-5) \times (c+5) \\
&\Rightarrow & rc - 100 &= rc + 5r - 5c - 25 \\
&\Rightarrow & 5c - 5r &= 75 \\
&\Rightarrow & c - r &= 15.
\end{aligned}$$

而我要將玩具士兵恰排成一個比初始的矩陣還少 11 列、多 11 行的矩陣而必須移除的數量為

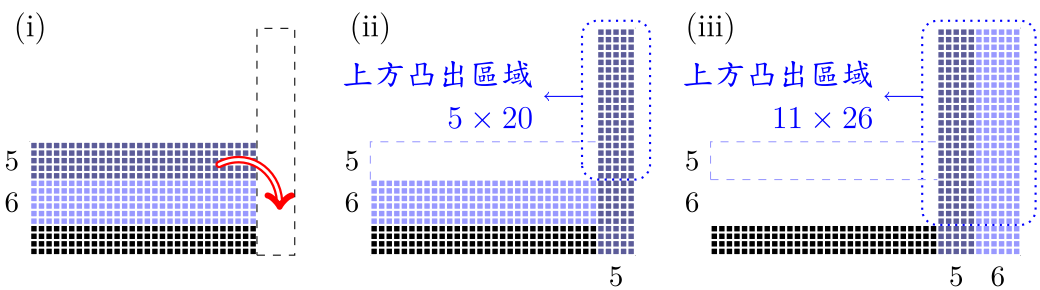
$$\begin{aligned}
r \times c - (r-11) \times (c+11) &= rc - (rc + 11r - 11c - 121) \\
&= 11c - 11r + 121 = 11(c-r) + 121.
\end{aligned}$$

然而，因已知 $c - r = 15$，故所求之數量為 $11 \times 15 + 121 = 286$。。

答: (286)。

解法 2

可將原來的矩形視為高度分別為 5 列、6 列及其他列的三層，如圖 (i) 所示。當將頂層的 5 列旋轉 90° 並將它如圖 (ii) 所示放置，凸出的矩形有 100 個玩具士兵，故此矩形為 5×20。



若將第二層也旋轉並如圖 (iii) 所示放置，則凸出的矩形增加 6 列寬與 6 列高。由此可知，必須從初始的矩陣中移除 $11 \times 26 = 286$ 個玩具士兵。

答: (286)。

, **30.** 稱數 $G = 10^{100}$ 為一個 googol 而稱數 10^G 為一個 googolplex。令 n 為滿足 $n^n < 10^G$ 的最大正整數，請問 n 是幾位數？

考慮 $n^n < 10^G$。因僅需求出 n 的位數，故先考慮 $n = 10^k$ 的情況。則

$$10^G > n^n = (10^k)^{(10^k)} = 10^{(k10^k)} \iff G > k \times 10^k$$

所以 $k \times 10^k < 10^{100}$ 且 $k < 10^{100-k}$。
當 $k = 98$ 時，有 $k \times 10^k = 98 \times 10^{98} = 0.98 \times 10^{100} < G$ 且可得 $n^n < 10^G$。
當 $k = 99$ 時，有 $k \times 10^k = 99 \times 10^{99} = 9.9 \times 10^{100} > G$ 且可得 $n^n > 10^G$。
因此當 n 為滿足 $n^n < 10^G$ 的最大正整數時，有 $10^{98} \le n < 10^{99}$，即 n 是 99 位數。

答: (099)。