初級卷

1-10 題，每題 3 分

, **1.** 算式 $2+0+1+7$ 之值等於

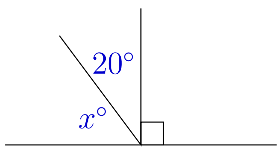
(A) 10 (B) 19 (C) 37 (D) 208 (E) 2017

$2+0+1+7=10$。

答: (A)。

, **2.** 在右圖中，請問 x 之值是什麼？

(A) 20 (B) 70 (C) 80 (D) 110 (E) 160

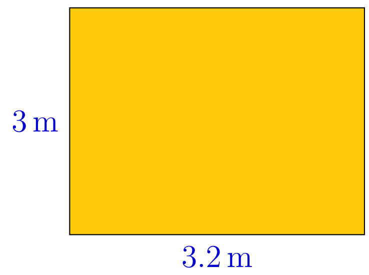


由圖中左半邊的直角可知 $20^\circ + x^\circ = 90^\circ$。
因此 $x^\circ = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$。

答: (B)。

, **3.** 在右圖中，矩形的長為 $3.2\,\mathrm{m}$、寬為 $3\,\mathrm{m}$。則這個矩形的面積等於

(A) $9.6\,\mathrm{m}^2$ (B) $15\,\mathrm{m}^2$ (C) $90.6\,\mathrm{m}^2$ (D) $9.2\,\mathrm{m}^2$ (E) $6.5\,\mathrm{m}^2$



矩形的面積為 $3 \times 3.2 = 9.6\,\mathrm{m}^2$。

答: (A)。

, **4.** 從 13 開始數起，接著每個數都增加 5，所數出的數為 13、18、23 $\cdots$。請問下列哪一個選項之中的數是您將會數出的數之一？

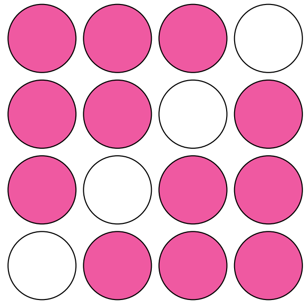
(A) 47 (B) 48 (C) 49 (D) 50 (E) 51

可知所數出的每一個數都是 5 的倍數加 3，因此這一個數列的個位數碼為 3 與 8 交替出現。在各選項中，僅 48 的個位數碼是 8 而其餘的都不是 3 或 8。

答: (B)。

, **5.** 請問圖中有幾分之幾的圓圈被塗上陰影？

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{9}{16}$



在每一列中的 4 個圓圈裡，其中 3 個被塗上陰影。故圖中有 $\frac{3}{4}$ 的圓圈被塗上陰影。

答: (D)。

, **6.** 請問下列哪一個選項中的數碼填入下面的方框內使得所構成的這個三位數可被 3 整除？

$$1\,\square\,7$$

(A) 1 (B) 3 (C) 6 (D) 8 (E) 9

一個可被 3 整除的數之數碼和一定是 3 的倍數。現在已知的兩個數碼之和等於 $1+7=8$，這個值比 3 的倍數少 1，故填入方框內的數碼一定要比 3 的倍數多 1，即需填入 1、4 或 7。因此選項中的數碼僅 1 滿足。

答: (A)。

, **7.** 一個幫浦每運行 150 分鐘需用掉 8 L 的生質柴油。請問這個幫浦使用 32 L 的生質柴油可以運行幾個小時？

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 12

- -

可知使用 32 L 的生質柴油，可運行的時間是使用 8 L 的生質柴油之 4 倍。所以這個幫浦可以運行 $4 \times 150 = 600$ 分鐘 $= 10$ 小時。

答: (D)。

, **8.** 小強從超市幫媽媽提一個購物袋回家，袋子內有 780 g 的魚、1.35 kg 的蔬菜與 680 g 的水果。已知這個購物袋本身的重量為 150 g，請問小強所提的東西總重為多少 kg？

(A) 1.745 (B) 2 (C) 2.81 (D) 2.96 (E) 3

- -

可知總重為 $0.15 + 0.78 + 1.35 + 0.68 = 2.96$ kg。

答: (D)。

, **9.** 1 的 1000% 等於

(A) 0.1 (B) 1 (C) 10 (D) 100 (E) 1000

- -

1 的 100% 等於 1，而 1000% 為此值的 10 倍，即所求為 10。

答: (C)。

, **10.** 請問下列哪一個選項中的數填入下面的方框內可使得所構成的分數之值介於 7 與 8 之間？

$$\frac{\square + 3}{6}$$

(A) 47 (B) 25 (C) 32 (D) 37 (E) 41

- -

可知所欲構成的分數之值介於 $7 = \frac{42}{6}$ 與 $8 = \frac{48}{6}$ 之間，因此分子一定是介於 42 與 48 之間。據此，可知填入方框內的數一定是介於 39 與 45 之間。而在給定的五個數之中，僅 41 是落在此範圍內。

答: (E)。

11-20 題，每題 4 分

, **11.** 小艾玩文字遊戲。每撥動老爺鐘一下，她就將兩個字母互換位置。請問她最少要撥動幾下老爺鐘才能將 WORDS 變成 SWORD？

(A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 7 (E) 8

解法 1

有許多互換 4 次即可完成的方法。例如：

$$\text{WORDS} \to \text{WORSD} \to \text{WOSRD} \to \text{WSORD} \to \text{SWORD}$$

然而，僅互換 3 次或更少的次數就無法達成。現證明此結論，注意到每一個字母都至少互換一次位置，故總共至少要互換 3 次。

現假設恰互換 3 次可使得 WORDS 變成 SWORD。因每一次互換都會影響兩個字母的位置，且每一個字母都至少改變一次位置，有 4 個字母互換一次，而 1 個字母互換二次。對於只互換一次的 4 個字母中，有 2 個字母要分別與改變兩次的字母互換一次，而另 2 個字母則彼此互換一次。但在 WORDS 中，無法找出任何一對字母是彼此互換一次位置後恰落在 SWORD 中的正確位置。故知互換 3 次不可能達成目的。

答: (B)。

解法 2

前一個解法中已說明互換 4 次是可行的。現只需確認最小可能互換次數為 4 次。

依照下列方式規定每個字母的值，加總每個字母的值作為這個字之值：

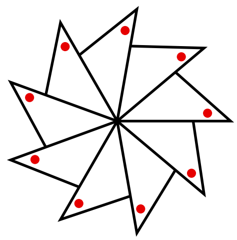
字母的位置	值
該字母在初始位置	-1
該字母在最終位置	1
該字母位在其餘的位置	0

例如在前述系列中，X 值遞增：$-5 \to -2 \to 0 \to 2 \to 5$。

可知每一次互換後，X 值至多增加 4。然而，一次互換後 X 值增加 4 的情況僅會發生在互換位置的兩個字母都是從初始的位置換到目標的位置，即它們初始位置恰為另一個字母的目標位置。但不存在這樣的兩個字母，所以一次互換 X 值至多增加 3。故從 -5 增加至 5 要互換 4 次或 4 次以上。因此互換次數最少為 4 次。

答: (B)。

, **12.** 圖中的風車星形是將一個直角三角形圍繞它的一個頂點旋轉而構成的。請問圖中標記有紅點上的角之度數為何？



(A) $30°$ (B) $40°$ (C) $45°$ (D) $50°$ (E) $60°$

- -

圍繞著此風車星形中心的九個等角之角度為 $\dfrac{360°}{9} = 40°$。而每一個直角三角形的內角和都是 $180°$，因此其三個內角分別為 $40°$、$90°$ 與 $50°$，即所標記的角之角度為 $50°$。

答: (D)。

, **13.** 我有十二個容量都為 12 L 的油漆罐。已知其中一半的罐子恰裝了一半的油漆、三分之一的罐子恰裝了三分之一的油漆，剩下的罐子都裝了六分之一的油漆。請問我總共有多少 L 的油漆？

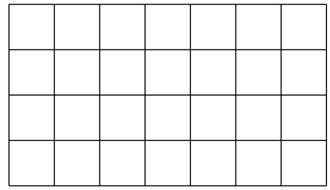
(A) 48 (B) 50 (C) 52 (D) 54 (E) 56

- -

可知共有六罐分別裝有 6 L 的油漆、四罐分別裝有 4 L 的油漆而剩餘的兩罐則分別裝有 2L 的油漆。因此我總共有 $6 \times 6 + 4 \times 4 + 2 \times 2 = 36 + 16 + 4 = 56$ L 的油漆。

答: (E)。

, **14.** 請問有多少種方法可以將一個 3×1 的矩形放置在這個方格表內使得它可以完整地蓋住三個小方格？



(A) 34 (B) 28 (C) 56 (D) 40 (E) 10

若此矩形是水平橫放的，則它的最左邊的小方格可以是方格表中前五行的任何一個小方格，此共有 $5 \times 4 = 20$ 種方法。
若此矩形是鉛垂直放的，則它的最上面的小方格可以是方格表中前二列的任何一個小方格，此共有 $7 \times 2 = 14$ 種方法。
故合計共有 $20 + 14 = 34$ 種方法。

答: (A)。

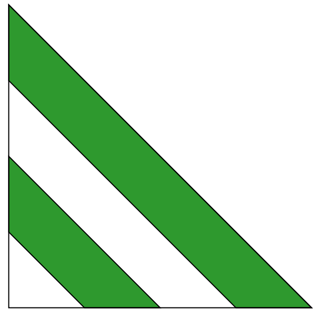
, **15.** 最接近星期二上午 10 點整之後 2017 分鐘的時刻為

(A) 星期二下午 7：30 (B) 星期三上午 7：30 (C) 星期三下午 7：30 (D) 星期四上午 7：30 (E) 星期四下午 7：30

$2017 \div 60 = 33 \ldots 37$，故 2017 分鐘 $=$ 33 小時又 37 分鐘，此即為 1 天 9 小時又 37 分鐘。因此星期二上午 10 點整之後 2017 分鐘的時刻為星期三下午 7:37。

答: (C)。

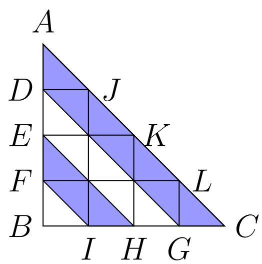
, **16.** 三角形的兩條邊都被斜線分割為四等分，如圖所示。請問這個三角形的幾分之幾被塗上陰影？



(A) $\frac{5}{8}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{3}{5}$

解法 1

如圖所示，標記三角形上各點。

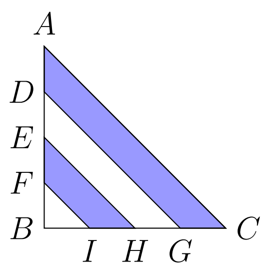


過點 D、E、F 做 BC 的平行線，分別交 AC 於點 J、K、L。連接 JI、KH、LG。易知 $JI//KH//LG//AB$，且知這些線條將原三角形分割為 16 個全等的小三角形，其中 10 個被塗上陰影。故知這個三角形共有 $\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$ 被塗上陰影。

答: (A)。

解法 2

如圖所示，標記三角形上各點。由共角定理可知



$$\frac{\triangle FBI}{\triangle ABC}=\frac{FB\times BI}{AB\times AC}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$
$$\frac{\triangle EBH}{\triangle ABC}=\frac{EB\times BH}{AB\times AC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$
$$\frac{\triangle DBG}{\triangle ABC}=\frac{DB\times BG}{AB\times AC}=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$$

故陰影部分面積為

$$\begin{aligned}(\triangle ABC-\triangle DBG)+(\triangle EBH-\triangle FBI)&=(1-\frac{9}{16}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16})\triangle ABC\\&=\frac{10}{16}\triangle ABC\\&=\frac{5}{8}\triangle ABC\end{aligned}$$

即這個三角形共有 $\frac{5}{8}$ 被塗上陰影。

答: (A)。

, **17.** 已知分數 $\frac{4}{n}$、$\frac{5}{n}$、$\frac{7}{n}$ 全都是最簡分數。請問下列哪一個選項中的數可以是 n 的取值？

(A) 24 (B) 25 (C) 26 (D) 27 (E) 28

當 n 為偶數時，分數 $\frac{4}{n}$ 不可能是最簡分數，故可排除 24、26 與 28。

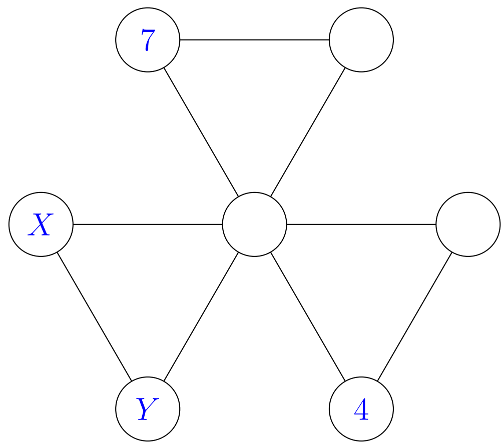
當 n 為 5 的倍數時，分數 $\frac{5}{n}$ 不可能是最簡分數，故可排除 25。

現驗證 27。因為 27 的質因數只有 3，而 3 不是 4、5 或 7 的質因數，故可知分數 $\frac{4}{27}$、$\frac{5}{27}$ 與 $\frac{7}{27}$ 都是最簡分數。因此僅 27 可為 n 的取值。

答: (D)。

, **18.** 將正整數 1、2、3、4、5、6、7 不重複地恰填入圖中的七個圓圈內，使得所畫出的三個三角形頂點上的數之和都相等。
現已填入其中兩個數，如圖所示。
請問 $X+Y$ 的值是多少？

(A) 5 (B) 6 (C) 7
(D) 8 (E) 9

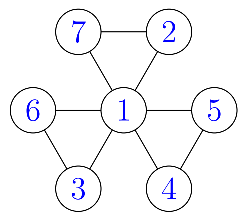


解法 1

令 C 為填在中心圓圈內的數，則每個三角形頂點上的數之和為 $T=X+Y+C$。將三個三角形的和相加得總和為 $3T$，這包括所有 7 個數，而在中心圓圈內的數被計算 3 次。即

$$3T=1+2+3+4+5+6+7+2C=28+2C$$

可知 $28+2C$ 為 3 的倍數，故 $C=1$、4 或 7。然而，4 與 7 已被填入，因此知 $C=1$。則可得 $3T=28+2=30$，即 $T=10$ 且可再推得 $X+Y=9$。右圖為滿足 $X+Y=9$ 的兩種填法之一，另一種將 3 與 6 互換。



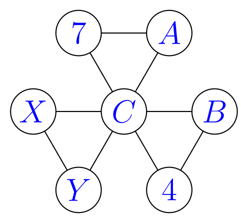
答: (E)。

解法 2

標記各圓圈內所填入的數如圖所示，且令 $Q=X+Y$。因每一個三角形頂點上的數之和都相等，故 $Q=X+Y=7+A=B+4$。明顯可知 $Q\geq 8$。

若 $Q=8$，則 $B=4$，造成 4 重複，故 $Q\neq 8$。

若 $Q=9$，則 $A=2$ 且 $B=5$。此時尚未填入的三個數為 1、3 與 6，因此 X 與 Y 的取值為 3 與 6(順序可交換) 且據此知 $C=1$，因此 $Q=9$ 時有二個解。



若 $Q=10$，則 $A=3$ 且 $B=6$。此時尚未填入的三個數為 1、2 與 5。然而，必須是 $X+Y=10$，故 $Q=10$ 不可發生。

若 $Q>10$，則 $B>6$，此不可能發生。

綜上所述，可知共有兩種填法，且兩者都可得 $X+Y=3+6=9$。

答: (E)。

, **19.** 小花、小桂與小宏玩瘋狂拆磚電腦遊戲，三人共有 2017 塊磚要拆。他們按照以下方式分工：小花恰為小桂的二倍、小桂恰為小宏的二倍，且剩下的磚數量要儘可能地少。請問小花分配到要拆多少塊磚？

(A) 1008 (B) 504 (C) 288 (D) 1344 (E) 1152

- -

小宏每分配到 1 塊磚，小桂會分配到 2 塊而小花會分配到 4 塊，故此時三人的磚之總數量為小宏的磚之數量的 7 倍。因 $2017 \div 7 = 288 \ldots 1$，故小宏最多可分配到 288 塊磚而小花會分配到 $4 \times 288 = 1152$ 塊。

答: (E)。

, **20.** 將大於 1 的整數按照如圖所示的方式依序填入表格內。請問數 501 會出現在哪一豎行？

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

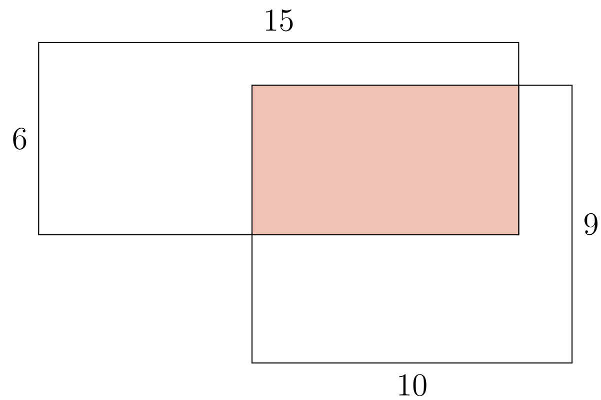
A	B	C	D	E
		2	3	4
5	6	7		
		8	9	10
11	12	13		
		14	15	16
17	18	19		
	⋮		⋮	

可知填入豎行的型式每六個數循環。因 $501 \div 6 = 83 \ldots 3$，故數 501 出現的豎行與數 3 相同，即為豎行 D。

答: (D)。

21-25 題，每題 5 分

, **21.** 將兩個矩形重疊造成三個面積相等的區域，原來的兩個矩形分別是 $6\,\mathrm{cm} \times 15\,\mathrm{cm}$ 與 $10\,\mathrm{cm} \times 9\,\mathrm{cm}$，如圖所示。若陰影區域小矩形的每一邊之長度都是整數 cm，請問陰影區域小矩形的周長為多少 cm？



(A) 24　(B) 28　(C) 30　(D) 32　(E) 36

- -

15×6 的矩形之面積為 $90\,\mathrm{cm}^2$，而陰影區域的小矩形面積為此矩形的一半，即 $45\,\mathrm{cm}^2$，且此也恰為 10×9 的矩形之面積的一半。

因此陰影區域的小矩形可能為 45×1、15×3 或 9×5，而其中僅 9×5 的矩形可依如圖所示之方式置入 15×6 矩形的內部。綜上所述，可得塗上陰影的矩形之周長為 $2 \times (5 + 9) = 28\,\mathrm{cm}$。

答: (B)。

, **22.** 一個迴文數是由前往後讀與由後往前讀都是相同的數。已知數 131131 是一個迴文數，且它的首二位數碼 (13)、中間二位數碼 (11)、末二位數碼 (31) 都分別構成一個質數。請問共有多少個具有此性質的六位迴文數？

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

可知中間二位數碼一定是 11，因為這兩個數碼必須相等且構成一個質數。
且首二位數碼必須是一個質數且交換它的兩個數碼所構成的數也是一個質數。這樣的二位數質數共有九個：

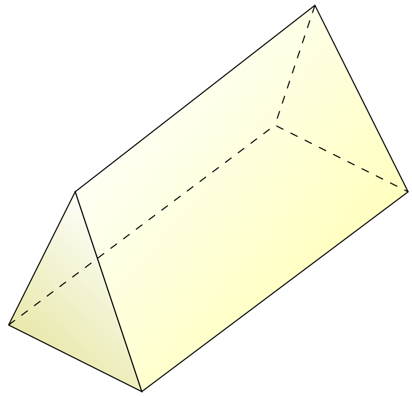
11 、 13 、 17 、 31 、 37 、 71 、 73 、 79 與 97

因此共有九個滿足題意的六位迴文數：
111111 、 131131 、 171171 、 311113 、 371173 、 711117 、 731137 、 791197 與 971179。

答: (B)。

, **23.** 將一個三角體柱用一個平面切一次而分成兩片。請問這兩片的面數之總和的最小可能值是多少？

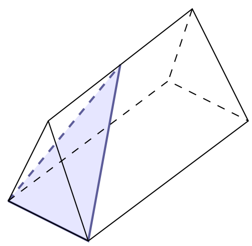
(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11



解法 1

原來的三角柱共有 5 個面。依題意之方式切割後，會得到兩個新的面 (分別落在平面的兩側) 且會將一些原來的面分別分成兩個面。故這兩片的面數之總和的最小可能值必發生在平面所切過的面數最少的情況。

右圖為平面沿著一條稜邊且僅切過兩個面的切法，此時所分出兩片的面數之總和為 9。



現驗證無法再得到比 9 個面還少的情況。

可知所切出的截面是一個多邊形，其中一定會有一些邊是原來的三角柱之稜邊，而其餘的邊則是原來的三角柱與截面之相交線段。為了使截面之相交線段為 1 條或更少，則截面必須通過 2 條或更多條三角柱的稜邊。

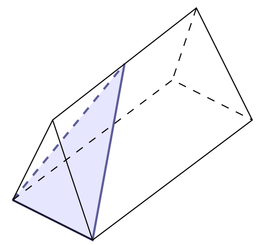
然而，通過二條三角柱稜邊的平面只能是三角柱的平面，此平面不能為截面。

綜上所述，這樣的截面不存在，所以切出的兩片的面數之總和最小值為 9。

答: (C)。

解法 2

原來的三角柱共有 5 個面。依題意之方式切割後，會得到兩個新的面 (分別落在平面的兩側) 且會將一些原來的面分別分成兩個面。特別地，若 s 為原來的三角柱被切過的面數，則所分出兩片的面數之總和為 $f = 5 + 2 + s = 7 + s$。因此總共至少有 7 個面，且最小值會發生在所切過的面儘可能少的情況。



例如，右圖為切過 $s=2$ 個面數之情況，此時 $f=7+2=9$。現驗證此為最小值，即不可能有 $s<2$。

每一個被平面切過後露在外部的面都是多邊形，在所有的邊中，有 s 條邊會是所截出的面之邊而其餘的邊則是原來三角柱的稜邊。若 $s\le 1$，則有 2 條或更多的邊為原來三角柱的稜邊。然而，唯一一個包含三角柱兩條邊的平面即為此三角柱的面。此平面不能為截面。

綜上所述，s 的最小值為 2，所以切出的兩片的面數之總和最小值為 9。

答: (C)。

, **24.** 小克與小思正在爭論他們之間如何分配 120 mL 的汽水。
為了平息爭論，他們的爸爸將小克杯中三分之一的汽水倒入小思的杯中，接著再將小思杯中三分之一的汽水倒入小克的杯中。此時他們兩人杯中的汽水恰好一樣多。
請問初始時小克的汽水比小思的汽水多或是少幾 mL？

(A) 少 60 mL　(B) 少 30 mL　(C) 相等　(D) 多 30 mL　(E) 多 60 mL

解法 1

可知兩人最終都各有 60 mL 的汽水。現逆推回去。因第二次分配是將小思杯中三分之一的汽水倒入小克的杯中，故在此之前小思有 90 mL 的汽水、小克有 30 mL 的汽水。而第一次分配是將小克杯中三分之一的汽水倒入小思的杯中，故初始時小克有 45 mL 的汽水、小思有 75 mL 的汽水。所以初始時小克的汽水比小思的汽水少 30 mL。

答: (B)。

解法 2

令初始時小克有 $x\,\text{mL}$ 的汽水而小思有 $120-x\,\text{mL}$ 的汽水。經過將小克杯中三分之一的汽水倒入小思的杯子後，小克有 $\frac{2x}{3}\,\text{mL}$ 的汽水而小思有 $120-\frac{2x}{3}\,\text{mL}$ 的汽水。經過將小思杯中三分之一的汽水倒入小克的杯子後，小克有 $40+\frac{4x}{9}\,\text{mL}$ 的汽水而小思有 $80-\frac{4x}{9}\,\text{mL}$ 的汽水。因最終兩人有一樣多的汽水，故可得

$$\begin{aligned} 40+\frac{4x}{9} &= 80-\frac{4x}{9} \\ \frac{8x}{9} &= 40 \\ x &= 45 \end{aligned}$$

所以初始時小克有 $45\,\text{mL}$ 的汽水、小思有 $75\,\text{mL}$ 的汽水，即初始時小克的汽水比小思的汽水少 30 mL。

答: (B)。

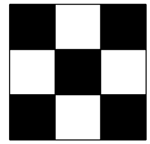
, **25.** 一個 3×3 方格表的小方格內都被塗上了黑色或是白色。

若其中任何一個 2×2 子方格表內每一種顏色都恰各佔有二個小方格，則稱這個方格表為均衡的，如第一個範例。

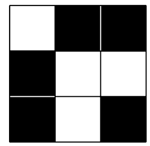
第二個範例則是不均衡的，因為右下角的 2×2 子方格表內有三個白色小方格。

若將旋轉或翻轉後不同的方格表視為不同，請問總共有多少個均衡的 3×3 方格表？

(A) 2 (B) 7 (C) 10 (D) 14 (E) 18



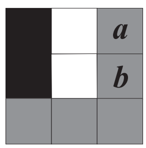
均衡的



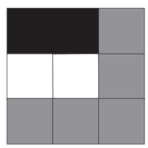
不均衡的

解法 1

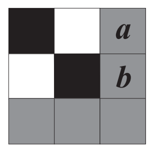
對於每一個均衡的表格，一定會有另一個對應的表格是將全部的黑、白兩色互換而得。因此可不妨假設位於左上角的小方格是黑色的，最後再將所計算出的數量加倍。而位於左上角的 2×2 子方格表有三種塗法，如下圖所示，其中灰色部分的小方格仍待確定：



(1)



(2)



(3)

在圖 (1) 的情況中，小方格 a 與 b 一定同時是黑色才能使右上角的 2×2 子方格表為均衡的，而最下面一列的塗色法可為黑–白–黑或白–黑–白，因此共有 2 種塗色法。圖 (2) 的情況恰為圖 (1) 沿著對角線的對稱圖形，故也會有 2 種塗色法。

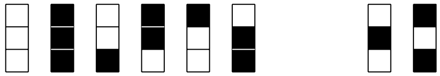
在圖 (3) 的情況中，小方格 a 與 b 有兩種可能的塗色狀況：若 a 是黑色而 b 是白色，則最下面一列的塗色法也會是兩種交錯的塗色方式；而若 a 是白色而 b 是黑色，則最下面一列的塗色法只能是黑–白–黑。因此共有 3 種塗色法。

綜上所述，當左上角的小方格是黑色時，共有 7 種塗色法，因此加倍後總共有 14 個均衡的 3×3 方格表。

答: (D)。

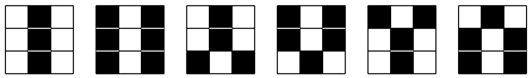
解法 2

考慮將表格分成 3 行來討論。可知第一行共有交錯塗色或非交錯塗色的 8 種方式：

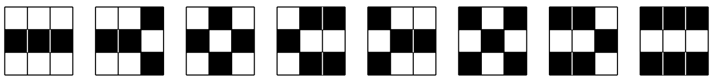


非交錯塗色　　　交錯塗色

在第一行的六種可能非交錯塗色方式中，會有兩個 (或更多) 相鄰的小方格是相同的顏色。為了得到均衡的表格，下一行所對應位置的小方格之顏色一定是另一種顏色，因此第二行每個與第一行對應位置的小方格之顏色都被迫是另一種顏色。同理，第三行每個與第二行對應位置的小方格之顏色都被迫是另一種顏色。因此當第一行塗色方式為是非交錯塗色的方式時，可得 6 個均衡的 3×3 方格表：



對於第一行所列出交錯塗色的兩種情況，下一行也一定會是交錯塗色方式，但會有兩種可能：與第一行顏色相同的交錯塗色方式或是與第一行顏色相反的交錯塗色方式。同樣地，對於第三行也是有兩種可能。因此當第一行塗色方式為是交錯塗色的方式時，可得 8 個均衡的 3×3 方格表：



將這兩種情況所得的個數相加，知總共有 $6 + 8 = 14$ 個均衡的 3×3 方格表。

答: (D)。

問題 26-30 的答案為 000-999 之間的整數，
請將答案填在答案卡上對應的位置。

第 26 題占 6 分，第 27 題占 7 分，第 28 題占 8 分，
第 29 題占 9 分，第 30 題占 10 分。

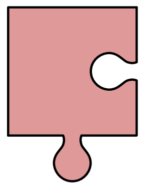
, **26.** 從 0 到 9 的十個數碼都各恰使用一次可構成兩個五位數。請問這兩個五位數之差的最小可能值是多少？

可知這兩個數的首位數碼都不相同，且差的最小可能值會發生在首位數碼的差為 1 的情況下。而較小的數中，由其餘的數碼所構成的數要儘可能大、較大的數中，由其餘的數碼所構成的數要儘可能小。

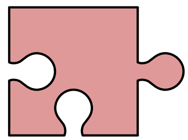
由四個數碼所能構成的最大數、最小數分別為 9876、0123，故差的最小可能值會發生在這兩個五位數分別為 50123 與 49876 時，此時差為 $50123 - 49876 = 247$。

答: (247)。

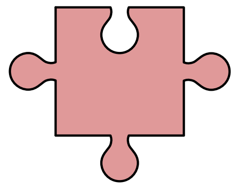
27. 一塊拼圖的配件是由一張正方形硬紙板，在它的至少二條邊上分別各有一個「插榫」或「接榫」的組合。
拼圖配件分別有角落、稜邊或內部的配件，如下圖所示。



角落的配件
(兩條直線邊構成一直角)



稜邊的配件
(有一條直線邊)



內部的配件
(沒有直線邊)

若一塊拼圖的配件經過旋轉 (不可以翻轉) 後會與另外一塊重合，則認定這兩塊配件的形狀是相同的。請問總共有多少種不同可能形狀的拼圖配件？

將直線邊記為「E」、接榫記為「S」、插榫記為「T」，則每一塊拼圖的配件可以依據以下規則用四個一串的這些符號來表示：

- 至多有兩個 E。
- 若有兩個 E，則它們一定是相鄰的。
- 一串的符號經過循環排列後視為相同。

此時可得下表所列出的拼圖配件，其中 $\star$ 表示 T 或 S：

配件型態	**形式**	**數量**	**配件**
角落的配件	EE$\star\star$	$2^2 = 4$	EESS EETS EEST EETT
稜邊的配件	E$\star\star\star$	$2^3 = 8$	ESSS ETSS ESST ETST ESTS ETTS ESTT ETTT
內部的配件	$\star\star\star\star$	6	SSSS STST SSST STTT SSTT TTTT
總計		**18**	

因此總共有 18 種不同可能形狀的拼圖配件。

hence (18).

, **28.** 將數 129 逆序來讀為 921，且這兩個數之和為 1050，它可被 30 整除。請問總共有多少個三位數具有與它逆序的數之和可被 30 整除？

- -

令 a 為百位數碼、b 為十位數碼、c 為個位數碼。可知 $101(a+c)+20b$ 可被 30 整除，即可判斷出 $a+c=10$，共有 9 種可能的情況。

此時 30 是 $1010+20b=990+20(b+1)$ 的因數，因此 30 也會是 $20(b+1)$ 的因數，即 3 是 $2(b+1)$ 的因數。故可得知 $b+1=3$、6 或 9，即 $b=2$、5 或 8 共三種可能的值。

所以總共有 27 個滿足條件的三位數：129、159、189、228、258、$\cdots$、921、951 與 981。

答: (27)。

, **29.** 我有非常多個玩具士兵。我可以將這些玩具士兵排成一個有許多行、許多列的矩陣。我注意到若我從中移除 100 個玩具士兵後，仍可以將剩下的玩具士兵恰排成一個減少 5 列、增多 5 行的矩陣。

請問我必須從初始的矩陣中移除多少個玩具士兵才能將剩下的玩具士兵恰排成一個減少 11 列、增多 11 行的矩陣？

解法 1

假設原先可將這些玩具士兵排成 r 列、c 行，即我共有 $r \times c$ 個玩具士兵。則由題意可得

$$\begin{aligned} & r \times c - 100 = (r-5) \times (c+5) \\ \Rightarrow \quad & rc - 100 = rc + 5r - 5c - 25 \\ \Rightarrow \quad & 5c - 5r = 75 \\ \Rightarrow \quad & c - r = 15. \end{aligned}$$

而我要將玩具士兵恰排成一個比初始的矩陣還少 11 列、多 11 行的矩陣而必須移除的數量為

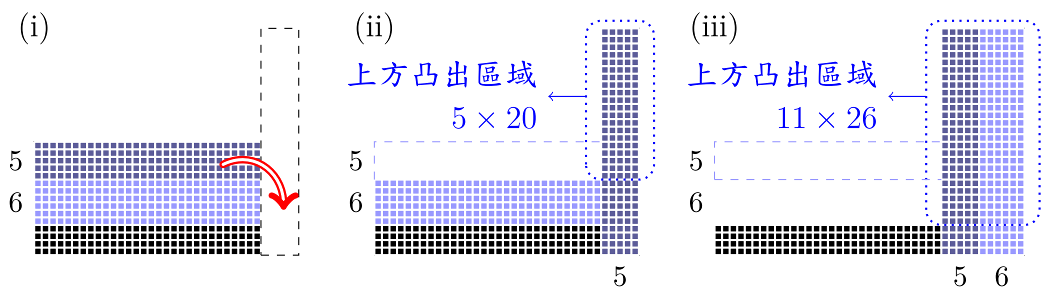
$$\begin{aligned} r \times c - (r-11) \times (c+11) &= rc - (rc + 11r - 11c - 121) \\ &= 11c - 11r + 121 = 11(c-r) + 121. \end{aligned}$$

然而，因已知 $c - r = 15$，故所求之數量為 $11 \times 15 + 121 = 286$。。

答: (286)。

解法 2

可將原來的矩形視為高度分別為 5 列、6 列及其他列的三層，如圖 (i) 所示。當將頂層的 5 列旋轉 90° 並將它如圖 (ii) 所示放置，凸出的矩形有 100 個玩具士兵，故此矩形為 5×20。



若將第二層也旋轉並如圖 (iii) 所示放置，則凸出的矩形增加 6 列寬與 6 列高。由此可知，必須從初始的矩陣中移除 $11 \times 26 = 286$ 個玩具士兵。

答: (286)。

, **30.** 小邁將至少二個連續正整數相乘而得到一個六位數 N。已知 N 的首兩位數碼為 47 且 N 的末兩位數碼為 74，請問小邁相乘時所使用的這些正整數之和是多少？

因 74 不可被 4 整除，而 100 的倍數都是 4 的倍數，故數 N 不可能為 4 的倍數。而任意連續四個整數之乘積一定可被 4 整除，因為其中必有二個數為偶數，故小邁至多將連續三個正整數相乘。

而當 n 的個位數碼分別為 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 時，$n(n+1)$ 的個位數碼依序為 0、2、6、2、0、0、2、6、2、0。可發現恆不為 4，故小邁至少將連續三個正整數相乘。

因此 $N = n(n+1)(n+2)$，其中 n 為正整數。

因 N 不是 4 的倍數，n 一定是奇數而 $n+1$ 一定不是 4 的倍數。若 $n \leq 73$，則 $n(n+1)(n+2) < 75^3 = 421\,875 < N$；若 $n \geq 80$，則 $n(n+1)(n+2) > 80^3 = 512\,000 > N$。故知 $74 \leq n \leq 79$。再因為 n 為奇數且 $n+1$ 不是 4 的倍數，故可以得知 $n+1 = 78$，即 $n = 77$。驗算可得知 $77 \times 78 \times 79 = 474\,474$。所以小邁所相乘的連續三個正整數只可能為 77、78、79。

故所求為 $77 + 78 + 79 = 234$

答: (234)。