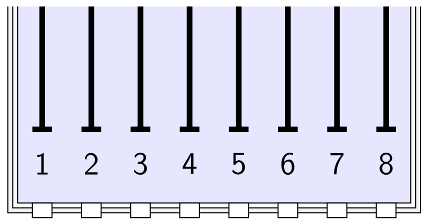
高級卷

1-10 題，每題 3 分

, **1.** A、B、C、D、E、F、G、H 這八位小孩在游泳池進行游泳比賽。
將他們隨意地分配到 1 號至 8 號水道。
請問是 F、G 或 H 被分配到 1 號水道的機率是什麼？



(A) $\frac{3}{8}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{5}{3}$ (E) $\frac{1}{3}$

這八位小孩中的每一位被分配到 1 號水道的機率都相等，故 F、G 或 H 被分配到 1 號水道的機率是 $\frac{3}{8}$。

答: (A)。

, **2.** 已知 $a = 20$ 且 $b = 17$，請問 $17a + 20b$ 的值是多少？

(A) 680 (B) 689 (C) 1720 (D) 2017 (E) 3737

$17 \times 20 + 20 \times 17 = 340 + 340 = 680$。

答: (A)。

, **3.** 1 的 1000% 等於

(A) 0.1 (B) 1 (C) 10 (D) 100 (E) 1000

- -

1 的 100% 等於 1，而 1000% 為此值的 10 倍，即所求為 10。

答: (C)。

, **4.** 算式 $4^2 + 3^3 + 2^4$ 之值等於

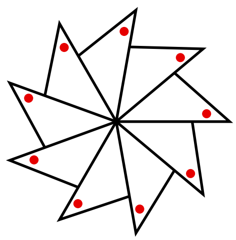
(A) 29 (B) 33 (C) 43 (D) 59 (E) 73

- -

$4^2 + 3^3 + 2^4 = 16 + 27 + 16 = 59$。

答: (D)。

, **5.** 圖中的風車星形是將一個直角三角形圍繞它的一個頂點旋轉而構成的。請問圖中標記有紅點上的角之度數為何？



(A) 30° (B) 40° (C) 45° (D) 50° (E) 60°

- -

圍繞著此風車星形中心的九個等角之角度為 $\frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$。而每一個直角三角形的內角和都是 180°，因此其三個內角分別為 40°、90° 與 50°，即所標記的角之角度為 50°。

答: (D)。

, **6.** 小艾玩文字遊戲。每撥動老爺鐘一下，她就將兩個字母互換位置。請問她最少要撥動幾下老爺鐘才能將 WORDS 變成 SWORD？

(A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 7 (E) 8

解法 1

有許多互換 4 次即可完成的方法。例如：

$$\text{WORDS} \to \text{WORSD} \to \text{WOSRD} \to \text{WSORD} \to \text{SWORD}$$

然而，僅互換 3 次或更少的次數就無法達成。現證明此結論，注意到每一個字母都至少互換一次位置，故總共至少要互換 3 次。

現假設恰互換 3 次可使得 WORDS 變成 SWORD。因每一次互換都會影響兩個字母的位置，且每一個字母都至少改變一次位置，有 4 個字母互換一次，而 1 個字母互換二次。對於只互換一次的 4 個字母中，有 2 個字母要分別與改變兩次的字母互換一次，而另 2 個字母則彼此互換一次。但在 WORDS 中，無法找出任何一對字母是彼此互換一次位置後恰落在 SWORD 中的正確位置。故知互換 3 次不可能達成目的。

答: (B)。

解法 2

前一個解法中已說明互換 4 次是可行的。現只需確認最小可能互換次數為 4 次。

依照下列方式規定每個字母的值，加總每個字母的值作為這個字之值：

字母的位置	值
該字母在初始位置	-1
該字母在最終位置	1
該字母位在其餘的位置	0

例如在前述系列中，X 值遞增：$-5 \to -2 \to 0 \to 2 \to 5$。

可知每一次互換後，X 值至多增加 4。然而，一次互換後 X 值增加 4 的情況僅會發生在互換位置的兩個字母都是從初始的位置換到目標的位置，即它們初始位置

恰為另一個字母的目標位置。但不存在這樣的兩個字母，所以一次互換 X 值至多增加 3。故從 -5 增加至 5 要互換 4 次或 4 次以上。因此互換次數最少為 4 次。

答: (B)。

, **7.** 算式 $200-199+198-197+196-\cdots+2-1$ 之值等於

(A) 1 (B) 99 (C) 100 (D) 101 (E) 200

- -

可分成 100 項 $(200-199)$、$(198-197)$、$\cdots$、$(2-1)$ ，每一項之值都等於 1。
故 $200-199+198-197+196-\cdots+2-1=100$。

答: (C)。

, **8.** 我的打字速度為每分鐘 360 個字母。我正在打一份很長的文件，每一橫列恰有 50 個字母。經過 8 分鐘後，請問我正好打到第幾橫列？

(A) 54 (B) 55 (C) 56 (D) 57 (E) 58

- -

經過 8 分鐘，我共打了 $360\times 8=2880$ 個字母。因 2880 除以 50 後所得的商為 57、餘數為 30，所以可判斷出我正好打到第 58 橫列。

答: (E)。

, **9.** 我製做了一個五五乘法表。請問這個乘法表內 25 個數之總和是多少？

(A) 100 (B) 200 (C) 225 (D) 250 (E) 256

$\times$	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

可知在第 i 列上的數之和為 $(1+2+3+4+5)i = 15i$，故表中所有的數之總和為 $15\times 1+15\times 2+15\times 3+15\times 4+15\times 5 = 15\times(1+2+3+4+5) = 15\times 15 = 225$。

答: (C)。

, **10.** 算式 $\sqrt{2}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt{800}\times\sqrt[4]{8}$ 之值等於

(A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 80 (E) 800

解法 1

$\sqrt{2}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt{800}\times\sqrt[4]{8} = \sqrt{1600}\times\sqrt[4]{16} = 40\times 2 = 80$。

答: (D)。

解法 2

令 $x = \sqrt{2} \times \sqrt[4]{2} \times \sqrt{800} \times \sqrt[4]{8}$，則 $x^4 = 2^2 \times 2 \times 800^2 \times 8 = 8^4 \times 10^4 = 80^4$ 故知 $x = 80$。

答: (D)。

11-20 題，每題 4 分

, **11.** 已知此方表格中的每一列、每一行與每一條主對角線上的數之和都等於 30。
請問位於右下角小方格內的數是什麼？

	2	
8		12
		?

(A) 3　(B) 15　(C) 5　(D) 13　(E) 4

- -

如圖所示之方式標記各空格所填入的數。

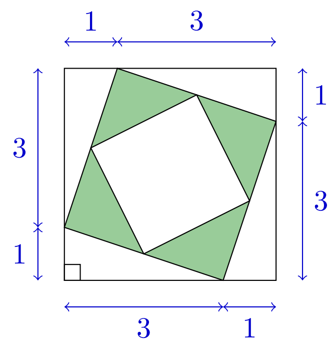
a	2	b
8	c	12
d	e	x

在中間的列中，有 $8 + c + 12 = 30$ 且據此可得 $c = 10$。
在最右邊的行中，有 $b + 12 + x = 30$ 且據此可得 $b = 18 - x$。
在對角線中，有 $a + 10 + x = 30$ 且據此可得 $a = 20 - x$。
在最上面的列中，有 $(20 - x) + 2 + (18 - x) = 30$ 且據此可得 $40 - 2x = 30$，即 $x = 5$。
此時可知 $a = 15$、$b = 13$、$d = 7$ 以及 $e = 18$ 並完成此方表格使得每一列、每一行與每一條主對角線上的數之和都等於 30。

答: (C)。

, **12.** 已知圖中最裡面的白色正方形之頂點恰平分塗上陰影的正方形之各邊，如圖所示。
請問最裡面的白色正方形之面積是多少？

(A) 6 (B) 4 (C) 10 (D) 3 (E) 5



解法 1

可知最外面的正方形面積為 16，而四個白色三角形的面積都是 $\frac{3}{2}$。因此若將這四個白色三角形移除即可得知次大的正方形面積為 $16-4\times\frac{3}{2}=10$。
而在這個正方形內部，恰有一半被塗上陰影，因此最裡面的白色正方形之面積是 5

答: (E)。

解法 2

由勾股定理可得知塗上陰影的正方形之邊長為 $\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$。因此最裡面的白色正方形之邊長為 $\sqrt{(\frac{1}{2}\sqrt{10})^2+(\frac{1}{2}\sqrt{10})^2}=\sqrt{5}$ 且其面積為 $(\sqrt{5})^2=5$。

答: (E)。

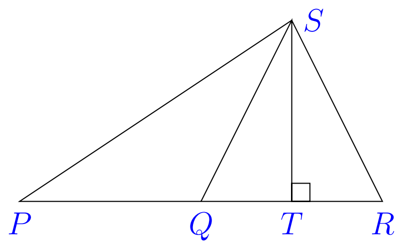
, **13.** 兩輛汽車相距 240 m，從 S 市駛向 M 市，它們都以 60 km/h 的速度行駛在同一條高速公路上。當每輛車經過一個速限為 80 km/h 的標誌時，立刻改以 80 km/h 的速度行駛。當兩輛車都經過此標誌時，請問它們之間的距離為多少？

(A) 180 m (B) 240 m (C) 360 m (D) 300 m (E) 320 m

當第一輛車通過標誌時，第二輛車仍落後 240 m。而當第二輛車行駛 240 m 時，第一輛車前進的速度變為 $\frac{4}{3}$ 倍，故其行駛的距離為 320 m。因此當兩輛車都經過此標誌時，它們之間的距離為 320 m。

答: (E)。

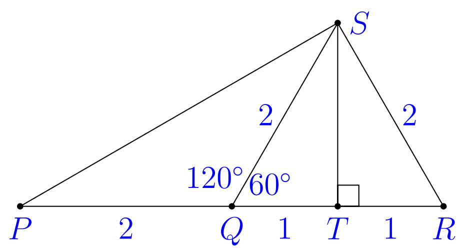
, **14.** 三角形中，已知 $PQ = SQ = SR = QR$ 且 $\angle STR = 90^\circ$，如圖所示。
則比例 $TR : PS$ 等於



(A) $1 : \sqrt{3}$ (B) $1 : 2\sqrt{3}$ (C) $1 : 2$
(D) $1 : \sqrt{2}$ (E) $1 : (3\sqrt{3})/2$

- -

令 TR 的長度為單位長度。因為 $\triangle QRS$ 為正三角形，且 T 是 QR 的中點，故得知 $QR = QS = RS = 2$，因此 $PQ = 2$。



現因 $\triangle PQS$ 是等腰三角形且 $\angle PQS = 120^\circ$，故 $\angle PSQ = \angle SPQ = 30^\circ$。因此 $\angle PSR = 90^\circ$。最後再由勾股定理可得 $PS = \sqrt{PR^2 - RS^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$。。

答: (B)。

Note: There are several other solutions that make use of the trigonometric ratios within one of the many $30^\circ/60^\circ/90^\circ$ triangles in the figure.

, **15.** 方程 $2017x^2 - 2017^{2017} = 0$ 的解為

(A) $x = \pm 2017$ (B) $x = \pm 2017^{2017}$ (C) $x = \pm 2017^{1008}$

(D) $x = \pm 2017^{1009}$ (E) $x = \pm\sqrt{2017^{2017}}$

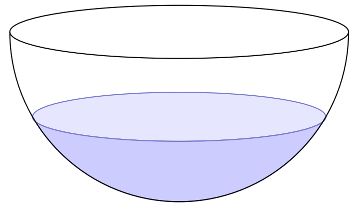
- -

直接解此方程可得

$$\begin{aligned} 2017x^2 &= 2017^{2017} \\ x^2 &= \frac{2017^{2017}}{2017} &= 2017^{2016} \\ x &= \pm(2017^{2016})^{\frac{1}{2}} &= \pm 2017^{1008} \end{aligned}$$

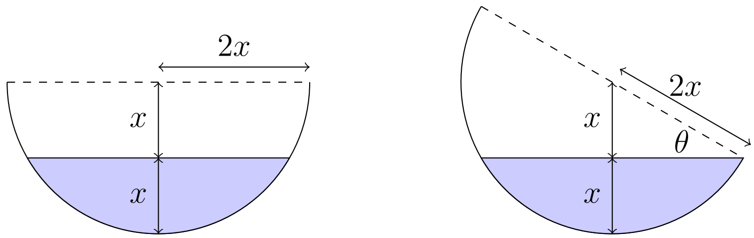
hence (C).

, **16.** 一個半球體狀的碗內裝了它的一半深度的水。
若將這個碗傾斜但不讓水漏出，則碗與水平線所夾的最大傾斜角為



(A) $22\frac{1}{2}^\circ$ (B) 30° (C) 45° (D) 60° (E) $67\frac{1}{2}^\circ$

假設此半球體的半徑為 $2x$，則水深為 x，如圖所示。



上右圖中角 θ 為將碗傾斜但不讓水漏出的最大傾斜角。此時可由 $30^\circ/60^\circ/90^\circ$ 三角形的性質判斷出 $\theta = 30^\circ$。或是由 $\sin\theta = \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$ 也可得知 $\theta = 30^\circ$。

答: (B)。

, **17.** 我恰用 \$4000 買一些每本價錢為 \$25 或 \$26 的書。若每種價錢的書我都至少買了一本，請問我最多可以購買多少本書？

(A) 153 (B) 157 (C) 155 (D) 159 (E) 161

解法 1

買 160 本每本價錢為 \$25 的書共恰花費 \$4000。但因需至少買一本價錢為 \$26 的書，故買 160 本書是不可能的。

然而，從這 160 本每本價錢為 \$25 的書中，可將 26 本每本價錢為 \$25 的書替換為 25 本每本價錢為 \$26 的書。經過此替換之後共可買 159 本書且恰花費 \$4000。

答: (D)。

解法 2

假設每本價錢為 \$25 與 \$26 的書依序分別購買了 m 本與 n 本，其中 m 與 n 都是正整數。為了求得 $m+n$ 的最大值，可有：

$$\begin{aligned}25m+26n&=4000\\ m+\frac{26}{25}n&=160\\ m+n+\frac{1}{25}n&=160\\ m+n&=160-\frac{1}{25}n\end{aligned}$$

可知恆有 $m+n<160$，且當 $n=25$ 時有 $m+n=159$。因此最多共可買 159 本書，此時購買了 25 本每本價錢為 \$26 的書與 134 本每本價錢為 \$25 的書。

答: (D)。

, **18.** 從 0 到 9 的十個數碼都各恰使用一次可構成兩個五位數。請問這兩個五位數之差的最小可能值是多少？

(A) 1 (B) 9 (C) 99 (D) 247 (E) 315

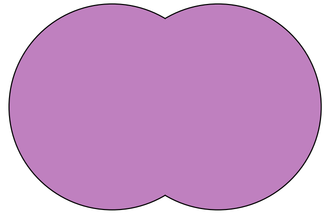
- -

可知這兩個數的首位數碼都不相同，且差的最小可能值會發生在首位數碼的差為 1 的情況下。而較小的數中，由其餘的數碼所構成的數要儘可能大、較大的數中，由其餘的數碼所構成的數要儘可能小。

由四個數碼所能構成的最大數、最小數分別為 9876、0123，故差的最小可能值會發生在這兩個五位數分別為 50123 與 49876 時，此時差為 $50123-49876=247$。

答: (D)。

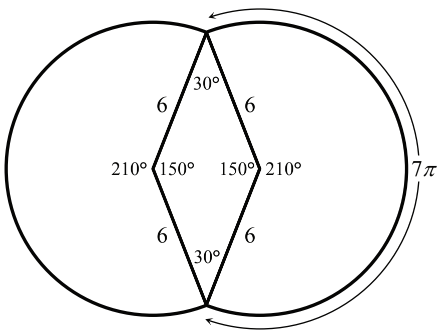
, **19.** 將兩個直徑都是 12 cm 的圓重疊在一起而形成一個周長為 14π cm 的圖形，如圖所示。
請問這個圖形的面積為多少 cm^2？



(A) $42\pi + 18$ (B) $42\pi + 9\sqrt{3}$ (C) $72\pi - 18$
(D) $72\pi - 9\sqrt{3}$ (E) $24\pi\sqrt{3}$

解法 1

此圖形可看成是由兩個全等的扇形與一個菱形所組成，如圖所示。可知每一個圓的圓周為 $\pi d = 12\pi$，且每一段弧的弧長都恰為圖形周長的一半，即為 7π。
因此每一段弧的圓心角都是 $\frac{7}{12} \times 360^\circ = 210^\circ$，可得知菱形的各內角，如圖所示。



再由圓形與菱形的面積公式可得知這個圖形的面積為

$$2 \times \frac{7}{12} \times \pi \times 6^2 \quad + \quad 6 \times 6 \times \sin 30^\circ = 42\pi + 18。$$

答: (A)。

解法 2

一個半徑為 r、圓心角之徑度為 θ 的弧所構成的弓形面積為 $\frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta)$。此面積公式是由扇形面積 $\frac{1}{2}r^2\theta$、三角形面積 $\frac{1}{2}ab|\sin\theta|$，且考慮到當 $\theta > \pi$ 時，是扇形再加入三角形而構成一個弓形，故當 $0 < \theta < 2\pi$ 時，此公式成立。

在本題中，如解法 1 所述，可得知 $r = 6$ 與 $\theta = \dfrac{7}{6}\pi$，且此圖形為兩個這樣子的弓形所構成：

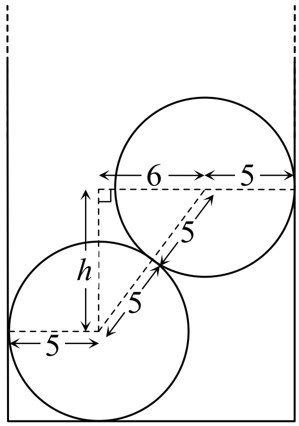
$$\begin{aligned} A = r^2(\theta - \sin\theta) &= 36\left(\frac{7}{6}\pi - \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) \\ &= 42\pi + 36\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 42\pi + 18 \end{aligned}$$

hence (A).

, **20.** 五個直徑都是 10 cm 的球恰可置入一個內部直徑為 16 cm 的有蓋圓柱體罐子內。請問這個罐子的高最小是多少？

(A) 39 cm (B) 42 cm (C) 45 cm (D) 48 cm (E) 50 cm

對於其中兩個球來說，置入此罐子而使得高最小的情況如圖所示。

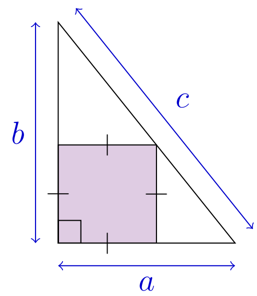


由勾股定理可知，兩球中心的垂直距離為 $h = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\text{cm}$。因此每增加一個球，就需要加高 8 cm，故這個罐子的高最小是 $10 + 4 \times 8 = 42\text{cm}$。

答: (B)。

21-25 題，每題 5 分

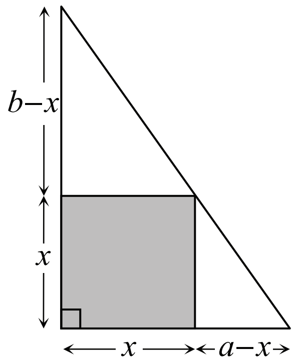
, **21.** 在一個邊長分別為 a、b 與 c 的直角三角形角落畫一個正方形，如圖所示。



對於所有的情況，請問下列哪一選項為沒有塗上陰影的面積與塗上陰影的面積之比？

(A) $1:1$ (B) $c:(a+b)$ (C) $ab:c^2$ (D) $(a+b)^2:2c^2$ (E) $c^2:2ab$

令 x 為正方形的邊長，則由相似三角形可知



$$\begin{aligned}\frac{x}{a-x} &= \frac{b}{a}\\ ax &= b(a-x)\\ (a+b)x &= ab\\ x &= \frac{ab}{a+b}\end{aligned}$$

因此由勾股定理可得知沒有塗上陰影的面積與塗上陰影的面積之比為

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{2}ab-x^2}{x^2} &= \frac{ab}{2x^2}-1\\ &= \frac{(a+b)^2}{2ab}-1\\ &= \frac{a^2+2ab+b^2-2ab}{2ab}\\ &= \frac{a^2+b^2}{2ab}\\ &= \frac{c^2}{2ab},\end{aligned}$$

。

答: (E)。

, **22.** 小安與小迪決定利用一個不尋常的方式來分蛋糕。小安首先取走整個蛋糕的幾分之幾，接著小迪與小安輪流每次都取走當時仍剩下來的蛋糕之一半。最終當剩下的蛋糕相當小時，兩人決定停止再繼續分。請問小安首先必須取走整個蛋糕的幾分之幾才能保證兩人在最終停止時各取走整個蛋糕的一半？

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

解法 1

小迪取走的整個蛋糕之一半，而在不包括小安第一次所取走的蛋糕下，小安每一次所取走的蛋糕是小迪前一次所取走的蛋糕之一半。故最終在不包括小安第一次所取走的蛋糕下，小安所取走的蛋糕總量會是小迪所取走的蛋糕總量之一半，即整個蛋糕的四分之一。因小安最終也取走的整個蛋糕之一半，故小安首先必須取走整個蛋糕的四分之一。

答: (B)。

解法 2

假設小迪第一次取走整個蛋糕的 x，則接下來小迪依序所取走的量為一個等比數列 $\frac{1}{4}x$、$\frac{1}{16}x$、$\frac{1}{64}x$、$\cdots$。

因小迪最終取走的整個蛋糕之一半，故

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}x+\frac{1}{64}x+\cdots\\ &= \frac{x}{1-\frac{1}{4}}\\ &= \frac{4x}{3}\\ x &= \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

因此在小迪第一次取蛋糕前，蛋糕仍有 $2\times\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$ 未被取走，所以小安首先取走了整個蛋糕的 $\frac{1}{4}$。

答: (B)。

, **23.** 班上的每位同學都寄了十張聖誕卡片給班上的另外十位同學，每人一張。已知沒有任何兩位同學彼此互寄卡片。請問班上最少有多少位同學？

(A) 15 (B) 20 (C) 21 (D) 25 (E) 30

- -

解法 1

假設班上共有 n 位同學。對於班上任何一對同學之間，至多有一張聖誕卡片被其中一位同學寄出給另一位同學。因此，至多有 $\binom{n}{2}$ 張聖誕卡片被寄出，此數量即為從班上同學任取一對同學的方法數。然而，由題意可知共有 $10n$ 張聖誕卡片被寄出，故可得不等式

$$10n \le \binom{n}{2} \quad \Rightarrow \quad 10n \le \frac{n(n-1)}{2} \quad \Rightarrow \quad n \ge 21.$$

為了得知班上是否可能恰有 21 位同學，可假設班上所有的同學圍成一圈且每一位同學都寄聖誕卡片給站在他左邊連續的十位同學。此時可發現此寄卡片方式滿足題意。

答: (C)。

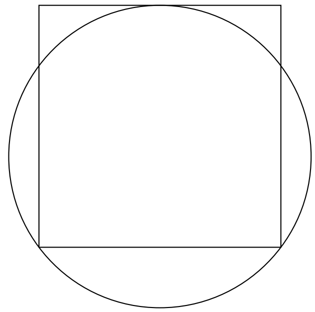
解法 2

假設班上共有 n 位同學，並由題意可知共有 $10n$ 張聖誕卡片被寄出。由鴿籠原理可知至少有一位同學收到 10 張或是更多張的聖誕卡片，不妨稱這位同學為甲。此時可知班上至少有 21 位同學：包括甲、收到甲寄送的聖誕卡片之十位同學、至少十位寄聖誕卡片給甲的同學。

如同解法 1 所述，知班上恰有 21 位同學的情況是存在的

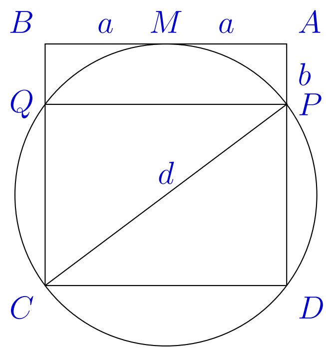
答: (C)。

, **24.** 一個圓恰與一個正方形的一條邊相切且經過其對邊上的兩個頂點。若這個圓的圓周長為 c 且這個正方形的周長為 s。經四捨五入後，請問下列哪一個選項的敘述是正確的？



(A) c 比 s 約大 5%。
(B) c 比 s 約大 2%。
(C) c 與 s 相等。
(D) c 比 s 約小 2%。
(E) c 比 s 約小 5%。

解法 1



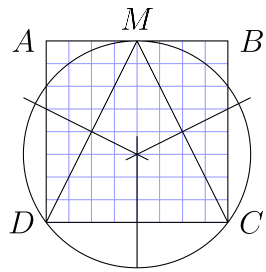
將正方形的頂點分別標記上 A、B、C、D 使得圓與 AB 相切且經過 C 與 D。令異於 C 點、D 點的 P 點、Q 點分別為 AD、BC 與圓的交點，如圖所示。由對稱性可知圓與正方形相切的點為 AB 的中點 M，且有 $PQ//AB$。因此 $PQCD$ 是此圓的內接矩形，且其中一條對角線 CP 是圓的直徑。

令 $a=|AM|$、$b=|AP|$ 以及 $d=|CP|$ 為圓的直徑。對 AM 與 AD 使用圓冪定理可得 $a^2=2a\times b$，因此 $b=\dfrac{1}{2}a$ 且 $PD=\dfrac{3}{2}a$。而由勾股定理知 $d^2=(2a)^2+\left(\dfrac{3}{2}a\right)^2$，即 $d^2=\dfrac{16+9}{4}a^2$，所以 $d=\dfrac{5}{2}a$。

現有 $s=8a$、$c=\pi d$，故 $\dfrac{c}{s}=\dfrac{5\pi}{16}$。因 π 之值相當接近且略小於 $\dfrac{22}{7}$，故 c/s 之值接近 $\dfrac{110}{112}$，因此 c 比 s 約小 2%。

答: (D)。

解法 2
令此正方形為 $ABCD$ 且 M 為 AB 的中點。由對稱性可知此圓為 $\triangle MCD$ 的外接圓，故其圓心會是 MC、MD 與 CD 的中垂線交點。



將 $ABCD$ 分成 8×8 的方格表，則上述的點與線都可明顯地標記且圓的半徑為 5 單位。此時可知 $s=32$ 單位且 $c=2\pi\times 5=10\pi\approx 31.4$ 單位。所以 c 比 s 小一點。特別地

$$\frac{s-c}{s}\approx\frac{0.6}{30}=\frac{6}{300}=\frac{2}{100}$$

即 c 比 s 約小 2%。

更精準地說，$s=32$ 的 97%、98% 與 99% 依序為 31.04、31.36 與 31.68。明顯地，$c=10\pi$ 接近於 31.36 且經四捨五入後，c 比 s 小 2%。

答: (D)。

, **25.** 在抽屜內有兩隻藍色襪子、兩隻紅色襪子與兩隻黃色襪子。星期一，我從抽屜中任意取出兩隻襪子來穿；星期二，我再從抽屜裡剩下的襪子中任意取出兩隻襪子來穿；星期三，我穿抽屜裡剩下的兩隻襪子。

請問我在這三天都沒有穿上相同顏色的一雙襪子之機率是多少？

(A) $\frac{1}{8}$　(B) $\frac{2}{5}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $\frac{64}{125}$　(E) $\frac{8}{15}$

解法 1

星期一，我沒有穿上相同顏色的一雙襪子之機率即為我從抽屜取出第二隻襪子的顏色與第一隻襪子不同之機率相同。因第二隻襪子共有 5 種可能而其中有 4 種的顏色與第一隻襪子不同，故此機率為 $\frac{4}{5}$。

當我星期一沒有穿上相同顏色的一雙襪子，則在星期二，抽屜裡有兩隻顏色相同的襪子與另二種顏色各一隻襪子。不妨將這些襪子依顏色分別記為 A_1、A_2、B 與 C。

故在星期二共有六種機率相等的可能情況，且星期三所穿的襪子也隨之決定：

星期二	A_1、A_2	A_1、B	A_1、C	A_2、B	A_2、C	B、C
星期三	B、C	A_2、C	A_2、B	A_1、C	A_1、B	A_1、A_2

可發現這 6 種情況中有 4 種是兩天所穿的襪子顏色都不同的情況，即這兩天都沒有穿上相同顏色的一雙襪子之機率是 $\frac{2}{3}$。

因此我在這三天都沒有穿上相同顏色的一雙襪子之機率是 $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$。

答: (E)。

解法 2

可知依序選取這六隻襪子共有 $6! = 720$ 種機率相同的取法。然而，因為共有 3 對兩隻無法區分的襪子，故每一種顏色分布都重複出現 2^3 次，因此共有 $720 \div 8 = 90$ 種顏色分布，每一種的發生機率為 $\frac{8}{720} = \frac{1}{90}$。在這 90 種顏色分布中，將計算有多少種是任一天都沒有相同顏色的一雙襪子。

可知這三天所穿的襪子配色為一組藍色與紅色襪子、一組藍色與黃色襪子、一組黃色與紅色襪子的某種順序之排列。此共有 $3! = 6$ 種排列。而在每一天，對於所

穿的襪子都有 2 種順序的取法，因此共有 $6 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$ 種顏色分布是任一天都沒有相同顏色的一雙襪子。

所以任一天都沒有相同顏色的一雙襪子之機率為 $\dfrac{48}{90} = \dfrac{8}{15}$。

答: (E)。

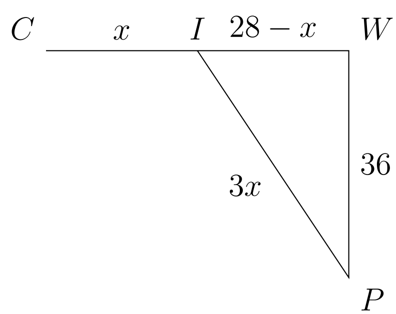
問題 26-30 的答案為 000-999 之間的整數，
請將答案填在答案卡上對應的位置。

第 26 題占 6 分，第 27 題占 7 分，第 28 題占 8 分，
第 29 題占 9 分，第 30 題占 10 分。

, **26.** 一條河流由西往東流。小柯的帽子掉入瀑布上游 28 m 處的河中，在此同時，一隻小狗在瀑布的正南方 36 m 處，它可以用恰好等於帽子往下游的流速之三倍的速度跑去撿帽子。當小狗撿到小柯的帽子時，請問這頂帽子最少流動了多少 m？

- -

令 C 點為小柯的帽子掉入瀑布的位置、I 點為小狗撿到帽子時的位置而 $x > 0$ 為這兩點之間的距離。則小狗跑步的距離 PI 至多為 x 的三倍，否則將會太晚抵達。可知等式會在 I 點位於其可能所在之最西邊的位置而使得小狗能撿到時，如圖所示。



由勾股定理知 $(28-x)^2 + 36^2 = (3x)^2$ ，化簡得 $x^2 + 7x - 260 = 0$。此二次方程的解為 $x = 13$ 與 $x = -20$，其中僅 $x = 13$ 可能發生。

答: (013)。

, **27.** 小邁將至少二個連續正整數相乘而得到一個六位數 N。已知 N 的首兩位數碼為 47 且 N 的末兩位數碼為 74，請問小邁相乘時所使用的這些正整數之和是多少？

因 74 不可被 4 整除，而 100 的倍數都是 4 的倍數，故數 N 不可能為 4 的倍數。而任意連續四個整數之乘積一定可被 4 整除，因為其中必有二個數為偶數，故小邁至多將連續三個正整數相乘。

而當 n 的個位數碼分別為 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 時，$n(n+1)$ 的個位數碼依序為 0、2、6、2、0、0、2、6、2、0。可發現恆不為 4，故小邁至少將連續三個正整數相乘。

因此 $N=n(n+1)(n+2)$，其中 n 為正整數。

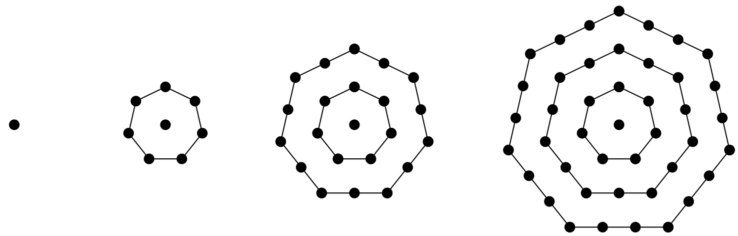
因 N 不是 4 的倍數，n 一定是奇數而 $n+1$ 一定不是 4 的倍數。若 $n\leq 73$，則 $n(n+1)(n+2)<75^3=421\,875<N$；若 $n\geq 80$，則 $n(n+1)(n+2)>80^3=512\,000>N$。故知 $74\leq n\leq 79$。再因為 n 為奇數且 $n+1$ 不是 4 的倍數，故可以得知 $n+1=78$，即 $n=77$。驗算可得知 $77\times 78\times 79=474\,474$。所以小邁所相乘的連續三個正整數只可能為 77、78、79。

故所求為 $77+78+79=234$

答: (234)。

, **28.** 對於 $n \geq 3$，**實心正 n 邊形數**數列是由一個位於中心的點開始，每次都往外增加一層正 n 邊形的點之所有點數總和所構成的數列，其中每一層 n 邊形每一邊上的點數都比前一層多一個點。

例如，實心正七邊形數數列的前幾項為 1、8、22、43、$\cdots$，如下圖所示。



1　　8　　22　　43

若實心正 n 邊形數數列中，其中有一項為 2017，請問 n 的最小可能值是多少？

若從位於中心的點之後共有 m 層，則第 k 層共有 kn 個點，且總點數為

$$1 \quad + \quad n + 2n + \cdots + mn = 1 + n\frac{m(m+1)}{2}$$

當此式等於 2017 時，有 $nm(m+1) = 2 \times 2016 = 2^6 \times 3^2 \times 7$ 且因要求 n 之值儘可能小，故 m 之值需儘可能大。

可知 m 或者 $m+1$ 會是奇數。4032 的奇因數為 1、3、7、9、21 與 63，而 4032 的偶因數中，比這些奇因數多 1 或是少 1 的因數為 2、4、6、8 與 64。

現由大至小逐一比較可能的數對。若 $m = 63$ 且 $m+1 = 64$，則 $n = 1$，此值太小；若 $m = 8$ 且 $m+1 = 9$，則 $n = 56$，此滿足題意。

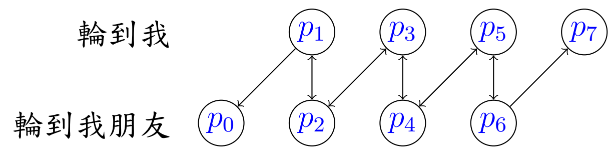
接著驗算可得 $1 + 56 + 2 \times 56 + \cdots + 8 \times 56 = 1 + 36 \times 56 = 1 + 2016 = 2017$。因此 n 的最小可能值是 56。

答: (056)。

, **29.** 我與一位朋友玩一種遊戲。每一局開始時我們都各有兩枚硬幣，我們輪流投擲一枚硬幣。若擲出正面，則我們可保留此枚硬幣；若擲出反面，則將此枚硬幣給對方。每次都由我開始，當其中一人擁有全部的四枚硬幣時這局遊戲就結束。
若我們總共玩此遊戲 840 局，請問預期我可以贏得多少局？

此遊戲共有 8 種可能的局面。

我所持有的硬幣數	0	1	2	3	4
我朋友所持有的硬幣數	4	3	2	1	0



其中箭頭表示該局面經過一次投擲硬幣後可能會成為的局面，而 p_0、$\cdots$、p_7 則是表示我從該局面之後能獲勝的機率。明顯可知 $p_0=0$ 且 $p_7=1$。
對於每一個其它的 n 值，p_n 會是 p_{n-1} 與 p_{n+1} 的平均值，這是因為

$$\begin{aligned} p_n &= P(\text{我擲出正面且我將獲勝}) + P(\text{我擲出反面且我將獲勝}) \\ &= \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{2}p_{n-1} \end{aligned}$$

由此最終可以判斷出 p_0、$\cdots$、p_7 是均勻分布的，即得 $p_n=\dfrac{n}{7}$。因此 $p_3=\dfrac{3}{7}$。
故當我們總共玩此遊戲 840 局，我預期可以贏得 $840\times\dfrac{3}{7}=360$ 局

答: (360)。

, **30.** 一個 8×8 方格表的小方格都被塗上了黑色或是白色。若其中任何一個 2×2 子方格表內每一種顏色都恰各佔有二個小方格，則稱這個方格表為<u>均衡的</u>，如下左圖為均衡的 3×3 方格表，而下右圖是不均衡的 3×3 方格表，因為右下角的 2×2 子方格表內有三個白色小方格。

均衡的　　不均衡的

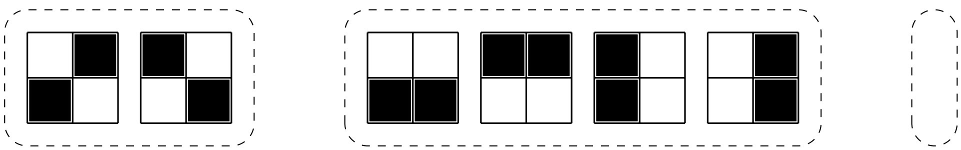
若將旋轉或翻轉後不同的方格表視為不同，請問總共有多少個均衡的 8×8 方格表？

解法 1

因均衡的方格表內每一個 2×2 子方格表也都是均衡的，故考慮由小至大逐步建立均衡的方格表，並計算每一個步驟中所有可能的均衡的方格表。每一個步驟都是在右邊增加一行、在底下增加一列。

現考慮一個 $n \times n$ 方格表。令 A_n 表示將此方格表塗成均衡的方格表且為雙重交替塗色之方法數，即最右邊一行與最下面一列都是交替塗色。令 B_n 表示將此方格表塗成均衡的方格表且為單一交替塗色之方法數，即最右邊一行與最下面一列這兩排中僅一排為交替塗色而另一排為單一塗色。令 C_n 表示將此方格表塗成均衡的方格表且最右邊一行與最下面一列都不是交替塗色。

當 $n = 2$ 時，有 $A_2 = 2$、$B_2 = 4$ 與 $C_2 = 0$，因此總共有 6 種塗色法。



$A_2 = 2$　　$B_2 = 2$　　$C_2 = 0$

接著考慮在右邊增加一行。令原來的最右邊的行為 R 而新增的行為 N。

若 R 是交替塗色的，則對於 R 中每一對黑–白的小方格，在 N 中對應的小方格也是塗成黑–白，且塗色順序相同或恰反過來。因為這推論依次適用於每一對，N 是

交替塗色的，其中在 N 中對應的小方格塗色順序都相同或恰反過來。故當最下面一列原來是交替塗色且 N 中對應的小方格塗色順序都相同時，則會成為不是交替塗色。

若 R 不是交替塗色的，則對於 R 中每一對黑–黑或白–白的小方格，在 N 中對應的兩個小方格都塗上相反的顏色。而 R 中每一對黑–白的小方格，在 N 中對應的小方格塗色順序相同或恰反過來。但塗上相反的顏色與塗色順序相同是不可能搭配的，故最終 N 的塗色方法一定是恰與 R 相反。因此 N 不是交替塗色的，且最下面一列原來是交替塗色時，仍然會成為交替塗色的。

對於在底下新增一列時，除了最右邊一行與其相鄰的一行有相同的塗色法之外，也會有一樣的推論。而若最右邊一行與其相鄰的一行有相同的塗色法，則原先在新增右邊一行前是交替塗色的列將變為不是交替塗色的列。

綜上所述，為了從均衡的 $n \times n$ 方格表來構造均衡的 $(n+1) \times (n+1)$ 方格表，有

- 每一個雙重交替塗色的方格表可以擴展成一個雙重交替塗色的方格表，且恰只有一種塗色法：所新增的列與行都塗上與相鄰的列與行相反顏色。

- 每一個雙重交替塗色的方格表可以擴展成一個單一交替塗色的方格表，且恰有二種塗色法：所新增的行都塗上與相鄰的行相反顏色，而接著將所新增的列強迫塗成與相鄰的列相同的顏色；反過來為另一種塗法。

- 每一個單一交替塗色的方格表可以擴展成一個單一交替塗色的方格表，且恰有二種塗色法：新增在原先不是交替塗色的邊上塗上與相鄰的小方格相反顏色，而新增在原先是交替塗色的邊上塗上與相鄰的小方格相同或是相反顏色。

注意到這樣子的規則中，無論是單一或雙重交替的方格表，都不會構造出最右邊一行與最下面一列都不是交替塗色的方格表。因 $C_2 = 0$，故對於所有的 n，恆有 $C_n = 0$。此時由上述可得遞迴關係式：

$$A_{n+1} = A_n \qquad \text{與} \qquad B_{n+1} = A_n + 2B_n$$

因此對於所有的 n，恆有 $A_n = 2$ 且 $B_{n+1} = 4+2B_n$。注意到 $(B_{n+1}+4) = 2(B_n+4)$，故可解得 $B_n + 4 = 2^{n-2}(B_2 + 4) = 2^{n-2}(4 + 4) = 2^{n+1}$，因此 $B_n = 2^{n+1} - 4$。所以均衡的方格表數為 $A_n + B_n = 2^{n+1} - 2$，且當 $n = 8$ 時，此數量為 $2^9 - 2 = 510$。

答: (510)。

解法 2

考慮構造一個 n 個小方格寬、m 個小方格長的矩形，並從位於最左邊的單一行開始。可知在開始的這一行共有 2^m 種塗色方式，其中 2 種是交替塗色、2^m-2 種是非交替塗色。

對於每一條非交替塗色的行，套用前一個證明手法可知下一行的塗色順序恰相反，因此每條新增的行也都是非交替塗色的。故當第一行非交替塗色的塗法決定時，則僅會有一種可能的均衡表格。

對於每一條交替塗色的行，接下來每一行的塗色順序都與前一行相同或恰反過來。因這可得到一連串的交替塗色的行，故對於每條新增的行都有 2 種可能的塗色法。故當第一行交替塗色的塗法決定時，則共有 2^{n-1} 種方式得到均衡表格。

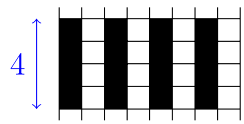
所以總共有 $(2^m-2)+2\times 2^{n-1}=2^m+2^n-2$ 種塗色方式可得到均衡的 $n\times m$ 表格，即總共有 $2^8+2^8-2=510$ 個均衡的 8×8 表格。

答: (510)。

解法 3

在一個均衡的表格中，定義**條紋**是由 2 個或是更多的顏色相同之小方格排成一排所構成的矩形。可知有水平或鉛垂兩種型態的條紋。明顯可判斷出交替塗色的列不會有水平條紋、交替塗色的行不會有鉛垂條紋。

當有一條鉛垂條紋時，例如此條紋共有 4 個小方格長，則此方格表內一定會有連同此條紋橫跨至表格中所有的行的鉛垂「斑馬條紋」：



同樣地，若有一條水平條紋時，一定會有水平斑馬條紋。

不會有滿足題意的塗色方式同時有水平與鉛垂斑馬條紋，故不會有滿足題意的塗色方式同時有水平與鉛垂條紋。因此有三種情況需討論。

若有一種塗色方式都沒有條紋，則一定每一行與每一列都是交替塗色的。此即棋盤的塗色方法，也一定是均衡的表格。故共有 2 種這樣子的塗色方式。

若一個均衡的表格有一些鉛垂條紋，則不會有水平條紋。故可推論出每一列都一定是交替塗色的。所以當決定了第一行塗色方法時，每一列都可用交替塗色的方式填滿並總是可得到均衡的表格。可知第一行共有 $2^8=256$ 種塗色方法，其中有 2 種為交替塗色且沒有鉛垂條紋，故共可得到 254 個有鉛垂條紋的塗色方式。

將前一個情況所得之塗色方式旋轉 90°，則可得 254 個有水平條紋的塗色方式。因此，總共有 $2+254+254=510$ 個均衡的 8×8 表格。

答: (510)。