4 Intermediate paper — draft for traditional chinese translation

中 級 卷

1-10 題，每題 3 分

1. 算式 $\dfrac{2018-18}{1000}$ 之值等於

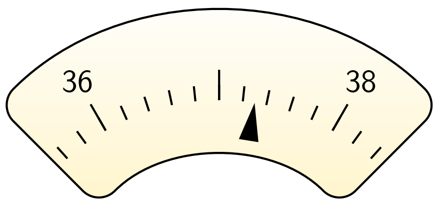
(A) 0.02 (B) 0.1 (C) 1 (D) 2 (E) 2000

$$\frac{2018-18}{1000}=\frac{2000}{1000}=2。$$

答: (D)。

---

2. 請問這個普遍使用的儀表所指出的值是什麼？



(A) 36.65 (B) 37.65 (C) 38.65 (D) 37.15 (E) 37.3

長的標記分別是 36、37、38，而每個短的標記相距 0.2 單位。箭頭指在 37 之後的 0.3，所以它指出的值為 37.3。

答: (E)。

3. 請問 4 與 5 的積及和之差是什麼？

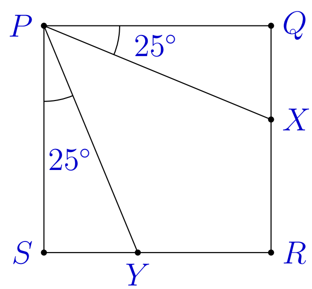
(A) 1 (B) 8 (C) 9 (D) 11 (E) 20

其和為 $4+5=9$ 且其積為 $4\times5=20$。它們的差為 $20-9=11$。

答: (D)。

---

4. 在右圖中，$PQRS$ 是一個正方形。請問 $\angle XPY$ 的大小是什麼？



(A) 25° (B) 30° (C) 35° (D) 40° (E) 45°

在點 P 上的三個角之和等於 $90°$，所以 $\angle XPY = 90°-50°=40°$。

答: (D)。

---

5. 請問下列哪一項內的算式之值不是一個整數？

(A) $350\div2$ (B) $350\div7$ (C) $350\div5$ (D) $350\div25$ (E) $350\div20$

$350=7\times50$ 且 50 是 2、5、25 的倍數，故$350\div2$、$350\div7$、$350\div5$ 與$350\div25$ 之值都是整數。

然而，$\dfrac{350}{20}=\dfrac{35}{2}=17\frac{1}{2}$ 不是個整數。

答: (E)。

---

6. NORA、ANNE、WARREN 與 ANDREW 四人購買塑膠字母以便在生日蛋糕上拼出他們的名字。
他們的生日都在不同的日期，所以他們打算重複使用一些字母在不同的蛋糕上。
請問他們至少共需要多少個塑膠字母牌？

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

解法 1

將所需的字母列表如下：

字母	A	D	E	N	O	R	W
NORA	1	-	-	1	1	1	-
ANNE	1	-	1	2	-	-	-
WARREN	1	-	1	1	-	2	1
ANDREW	1	1	1	1	-	1	1
合計	1	1	1	2	1	2	1

因此要含蓋所有的姓名共需 9 個字母牌。

答: (B)。

解法 2

對於 ANDREW，需要字母 ADENRW(依字母排序)。
對於 WARREN，需要增加一個 R：ADENRRW。
對於 ANNE，需要增加一個 N：ADENNRRW。
對於 NORA，需要增加一個 O：ADENNORRW。
總共需要 9 個字母牌。

答: (B)。

7. 以年計，2018 天最接近於

(A) 4.5 年 (B) 5 年 (C) 5.5 年 (D) 6 年 (E) 6.5 年

估計，$\frac{2018}{365} \approx \frac{2000}{360} = \frac{50}{9} = 5\frac{5}{9}$，此值大概比 5.5 年稍微多一點。

驗算，$365 \times 5.5 = 2007.5$ 且 $365 \times 6 = 2190$，故 2018 天最接近於 5.5 年。

答: (C)。

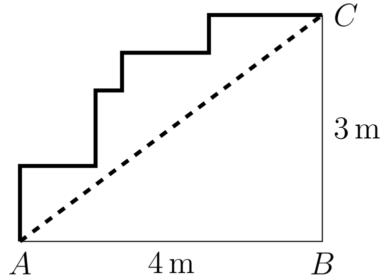
*註：*我們假設一年為 365 天，在 5.5 年或 6 年之中，閏年多一、二天並不會改變此答案。

---

8. 從點 A 到點 C 的路徑如圖所示。

圖中一條路徑是階梯式的路徑是由水平線與鉛垂線組成的，而另一條路徑是虛線構成的一條直線。

請問這兩條路徑的長度之差是什麼？



(A) 1 m (B) 2 m (C) 3 m (D) 4 m (E) 0 m

此虛線路徑之長度為直角三角形 ABC 之斜邊，由勾股定理知 $AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$，故虛線路徑 $AC = 5$ m。

此階梯式的路徑之水平線段的總長為 4 m，其鉛垂線段的總長為 3 m，所以階梯式的路徑之長度為 7 m。

故這兩條路徑長度之差為 $7 - 5 = 2$ m。

答: (B)。

9. 算式 $9 \times 1.2345 - 9 \times 0.1234$ 之值等於

(A) 9.9999 (B) 9 (C) 9.0909 (D) 10.909 (E) 11.1111

利用分配律，

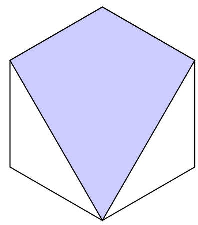
$$9 \times 1.2345 - 9 \times 0.1234 = 9 \times (1.2345 - 0.1234) = 9 \times 1.1111 = 9.9999$$

答: (A)。

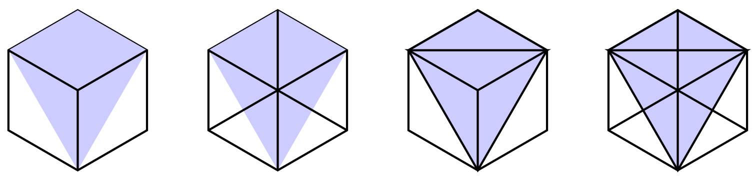
---

10. 請問這個正六邊形的幾分之幾被塗上陰影？

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{5}$ (E) $\frac{4}{5}$



有如圖所示許多將正六邊形分割為等面積的方法，由它們都可得知塗上陰影的部分為全部的 $\frac{2}{3}$。



$\frac{2}{3}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{8}{12}$

答: (B)。

11-20 題，每題 4 分

11. 餵養四隻狗三天的伙食費為 \$60。若每天每隻狗的伙食費都相同，請問餵養七隻狗七天的伙食費為多少？

(A) \$140 (B) \$200 (C) \$245 (D) \$350 (E) \$420

餵養 4 隻狗一天的伙食費為 $\$60 \div 3 = \$20$，因此餵養 1 隻狗 1 天的伙食費為 $\$20 \div 4 = \$5$。

所以餵養 7 隻狗 7 天的伙食費為 $\$5 \times 7 \times 7 = \$245$。

答: (C)。

12. 某年的十二月恰有四個星期二且恰有四個星期五。請問這年的 12 月 31 日是星期幾？

(A) 星期一 (B) 星期三 (C) 星期四 (D) 星期五 (E) 星期六

十二月有 31 天，它等於 4 星期又 3 天。經過 28 天後，所有的星期都出現 4 次，剩下的三天之星期將出現第五次。

故這三天不可以包括星期二或星期五，所以也可以剔除星期三與星期四。因此該年的十二月 29、30、31 日為星期六、星期日、星期一。

答: (A)。

13. 將一些數填入右側的方格表內，使得每一行、每一列與每條對角線上的數之和都等於 18。
請問在四個角落上的數之總和等於多少？

	6	
	4	

(A) 20 (B) 22 (C) 23 (D) 24 (E) 25

在中央方格上方的數必須是 8。
因此在上方兩個角落的數之和必須為 10、在下方兩個角落上的數之和必須為 14。
所以任意解答之下，四個角落上的數之總和都等於 24。
驗算，有許多可能的解答，如以下的圖所示。

3	8	7
10	6	2
5	4	9

4	8	6
8	6	4
6	4	8

8	8	2
0	6	12
10	4	4

答: (D)。

---

14. 四個連續整數之和為 t。
用 t 表示，請問這四個整數中最小的數是什麼？

(A) $\frac{t-10}{4}$ (B) $\frac{t-2}{4}$ (C) $\frac{t-3}{4}$ (D) $\frac{t-4}{4}$ (E) $\frac{t-6}{4}$

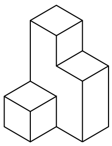
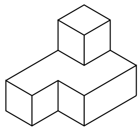
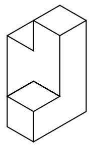
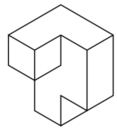
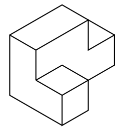
令最小的數為 x，則

$$
\begin{aligned}
t &= x+x+1+x+2+x+3 = 4x+6 \\
t-6 &= 4x \\
x &= \frac{t-6}{4}
\end{aligned}
$$

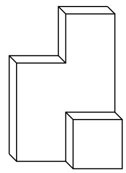
答: (E)。

---

15. 一個 3 維的積木是由六個全等的正立方體黏貼在一起而構成的。以下各項內的積木中，有四個是從不同角度觀看此積木的圖形，而其中有一個是不同的積木。請問哪一項內的圖是這個不同的積木？

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

當在 (B)、(C)、(D)、(E) 項內的積木分別從頂部方向、前左方向、前左方向、前右方向看去並適當旋轉時，每一個看起來都如右圖。



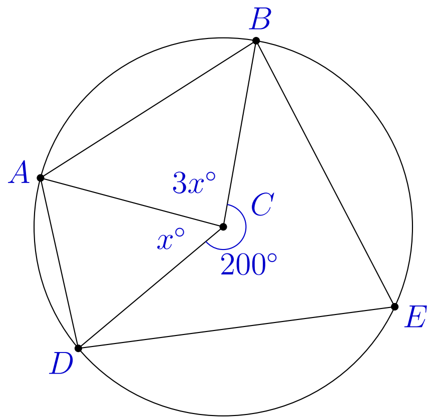
然而，除非有第七個正立方體隱藏在背面，否則 (A) 項內的積木不可能看起來也如此。。

答: (A)。

16. 在如圖所示的圓中，點 C 是圓心，點 A、B、D、E 全部都在圓周上。

優角 $\angle BCD = 200°$、$\angle DCA = x°$、$\angle BCA = 3x°$，如圖所示。

請問 $\angle DAC : \angle BAC$ 之比是什麼？



(A) $3:1$　(B) $5:2$　(C) $8:3$　(D) $7:4$　(E) $7:3$

因為 $x + 3x + 200 = 360$，$x = 40$。

$\triangle ACD$ 是等腰，其中 $\angle ACD = 40°$ 且 $\angle DAC = \angle CDA$。可知 $180° = 40° + 2\angle DAC$，故 $\angle DAC = 70°$。

同理，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC = \angle ABC = \frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$。

因此 $\angle DAC : \angle BAC = 70° : 30° = 7:3$。

答: (E)。

---

17. 小倫與小佳玩遊戲，每人擲一枚硬幣。每當擲出的硬幣出現正面時小倫勝；每當擲出的硬幣出現兩次反面時小佳勝。請問小倫勝的機率為多少？

(A) $\frac{1}{2}$　(B) $\frac{3}{5}$　(C) $\frac{5}{8}$　(D) $\frac{2}{3}$　(E) $\frac{3}{4}$

這個遊戲中只要擲 1 或 2 次硬幣。

小佳勝的機率為 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$，

故小倫勝的機率為 $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$。

答: (E)。

註： 與誰先擲沒有關係。

18. 在以下的小方格內填入加號或減號使得其結果為最小可能的正數：

$$\square\frac{1}{3}\square\frac{1}{4}\square\frac{1}{5}\square\frac{1}{6}\square\frac{1}{7}$$

請問此結果滿足下列哪一項？

(A) 介於 0 與 $\frac{1}{100}$ 之間

(B) 介於 $\frac{1}{100}$ 與 $\frac{1}{50}$ 之間

(C) 介於 $\frac{1}{50}$ 與 $\frac{1}{20}$ 之間

(D) 介於 $\frac{1}{20}$ 與 $\frac{1}{10}$ 之間

(E) 介於 $\frac{1}{10}$ 與 1 之間

- -

解法 1

將每個數乘以 $\mathrm{lcm}(3,4,5,6,7)=420$，則題目變成整數的版本：

$$\square\ 140\ \square\ 105\ \square\ 84\ \square\ 70\ \square\ 60$$

其中有一些數要加；有一些數要減，使得結果為儘可能靠近 0 的正整數。所以任務是要將這五個整數分成兩組 (加對減)，使得每一組內的數儘可能靠近目標 $(140+105+84+70+60)\div 2=229.5$。

數 140 將在其中一組，在同組的其他數將儘可能靠近 $229.5-140=89.5$。顯然，84 是最靠近的一個數並且兩個或以上其它的數最小是 $60+70=130$，這樣更糟。所以這一組是 $\{140,84\}$。

因此在最佳的解答中，這兩組為 $\{140,84\}$ 與 $\{105,70,60\}$，它們的和分別為 224 與 235，給出其解答為

$$-140+105-84+70+60=235-224=11$$

將此解答轉回原來分數的問題，其解答為

$$-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=\frac{11}{420}$$

此值接近於 $\frac{1}{40}$，所以它介於 $\frac{1}{50}$ 與 $\frac{1}{20}$。

驗算，$\frac{1}{20}=\frac{21}{420}>\frac{11}{420}$ 且 $\frac{1}{50}<\frac{1}{42}<\frac{11}{420}$，所以 $\frac{1}{50}<\frac{11}{420}<\frac{1}{20}$。

答: (C)。

解法 2

用小數表示，選項中出現的數分別為 0、0.01、0.02、0.05、0.1 與 1。它們最小的區間長度為 0.01，所以我們試著用三位小數來解答它。

用三位小數，題目中的分數分別為 0.333、0.25、0.2、0.167 與 0.143。它們相加得到 1.092，我們欲將它們分為二組，每一組的目標為 $1.092\div 2=0.546$。

有 0.333 的這一組，其它的數之目標為 $0.546-0.333=0.213$。我們可以找到最靠近的數是 0.2，即最佳的和為 $0.333+0.2=0.533$。留下來 $0.25+0.167+0.143=0.56$ 為其它的數之總和。

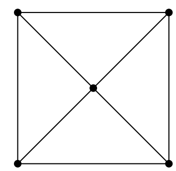
所以最小可能的正數解為 $(0.25+0.167+0.143)-(0.333+0.2)=0.56-0.533=0.027$。

此解答介於 $0.02=\frac{1}{50}$ 與 $0.05=\frac{1}{20}$ 之間。

答: (C)。

註： 這個解答是一個近似值，但並不影響答案。我們所用的每個分數近似值誤差在 0.0005 之內，所以準確的答案誤差只佔 0.027 之 $5\times 0.0005=0.0025$ 之內。所以它仍然介於 0.02 與 0.05 之間。

19. 一個小鎮的平面圖是一個邊長為 1 km 的正方形，它有六條筆直的道路，如圖所示。

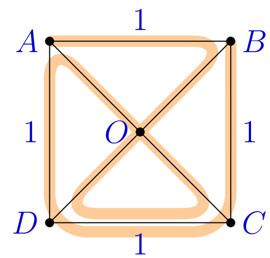


郵差每天都必須完整走完每一條道路至少一次，他可以從任何一個點開始，也可以在任何一個點結束。

請問此郵差可以完成任務的最短路徑之長度為多少 km？

(A) $4+\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $4+\sqrt{2}$ (C) $4+2\sqrt{2}$ (D) $4+3\sqrt{2}$ (E) $5+2\sqrt{2}$

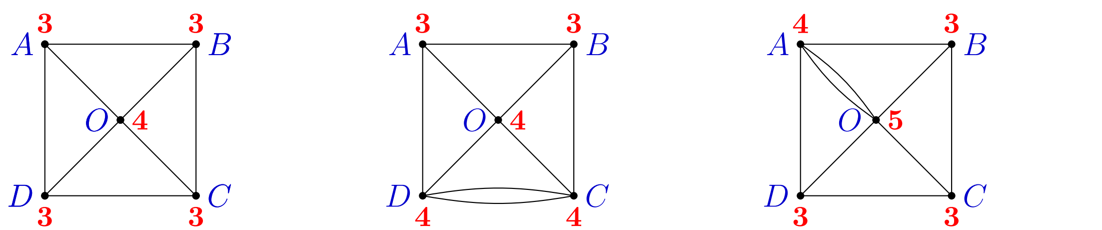
將此正方形標記為 $ABCD$，其中心為 O。所有的長度都以 km 計，所有道路之總長度為 $4+2\sqrt{2}$。此問題在找出行經每一段路的最短路徑。一個可行經所有道路的路徑為 $ABODCOADCB$，其中只有 CD 段的道路行經二次，所以它的總長度為 $5+2\sqrt{2}$。



利用消除法可能排除一些較短的路徑，但我們可以用歐拉在網路路徑的公式來取代：

假設一個網路可以用一條路徑行經每條邊恰一次。將每個頂點標記連接它的邊之數量，則可能 (i) 每個頂點都是偶數或 (ii) 恰只有二個頂點為奇數，其它都是偶數。在情況 (ii) 這兩個奇頂點分別為這條路徑的起點與終點。

但是這個小鎮的網路圖，如下左圖，有 4 個奇頂點。所以不可能有恰經過每條邊一次的路徑。此意即任何行經每一條邊至少一次的路徑必須行經某些邊超過一次。



為了表示一條路徑行經某段路超過一次，可加上額外的邊。此時此路徑是一條歐拉路徑，且此網路至多有 2 個奇頂點。我們的目標是使額外的邊儘可能的短。上面中間的圖，就是一個我們之前找到路徑長度為 $5+2\sqrt{2}$ 的網路圖。

若將其中一條較短的邊重複，如上右圖所示，雖然所有總長度較小，但現在仍有 4 個奇頂點，故不可能。

加上二段或更多段的邊也是可能的，但是任何這樣的作法都會比 $5+2\sqrt{2}$ 長。由此得知 $5+2\sqrt{2}$ 是最短的路徑。

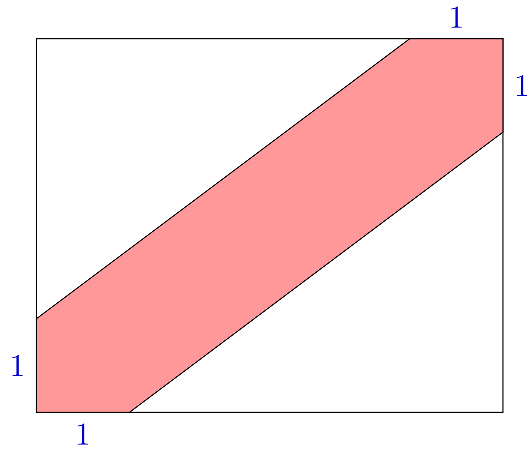
答: (E)。

20. 一個邊長為整數單位的矩形。把距兩個對角頂點各 1 單位處開始的一條斜對角帶子塗上陰影，如圖所示。

已知這條帶子的面積恰等於矩形面積的一半。

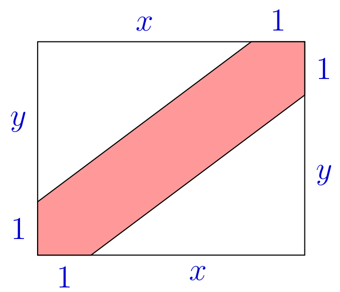
請問這個矩形的周長為多少單位？

(A) 14 (B) 16 (C) 18 (D) 20 (E) 22



- -

解法 1



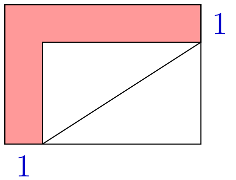
令 x 與 y 為右圖所示之長度，因為陰影部分的面積等於矩形面積的一半，所以也等於兩個白色三角形面積之和，此面積為 $2 \times \frac{1}{2}xy = xy$，而矩形面積為 $(x+1)(y+1)$。由此可得

$$\begin{aligned}
2xy &= (x+1)(y+1) \\
xy - x - y &= 1 \\
(x-1)(y-1) - 1 &= 1 \\
(x-1)(y-1) &= 2
\end{aligned}$$

因為 x 與 y 為正整數，$x-1$ 與 $y-1$ 為 1 與 2 或者 2 與 1，故 x 與 y 為 2 與 3 或者 3 與 2。則 $x+y=5$，故矩形的周長為 $2x+2y+4 = 10+4 = 14$。

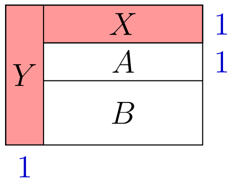
答: (A)。

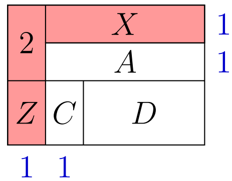
解法 2



移動三角形使它們合併在一起，將矩形的其它部分塗上陰影，如圖所示。因為原來矩形的一半被塗上陰影，這一個圖也是如此。我們可觀察出一個解，即一個 2×3 的白色矩形在一個 3×4 矩形的內部。我們宣稱這是唯一可能的解答。

白色矩形之高必須大於 1 單位，否則它將落入陰影區域的內部。
所以原來矩形的高必須大於 2 單位。同理，原來矩形的寬也必須大於 2 單位。
依下左圖所示方式切割矩形內部塗上陰影與白色區域。因為 $A = X$，故 $B = Y$。





現在依右圖所示方式切割矩形內部塗上陰影與白色區域。則 $C = Z$，故 $D = 2$。
因為 D 的邊長都是整數，只可能是 2×1。
由此可得知原來矩形為 4×3，其周長為 $2 \times 4 + 2 \times 3 = 14$。

答: (A)。

21-25 題，每題 5 分

21. 請問數 20^{18} 是幾位數？

(A) 24 (B) 38 (C) 18 (D) 36 (E) 25

我們可以找近似值 $20^{18} = 2^{18} \times 10^{18} = 2^8 \times 2^{10} \times 10^{18} \approx 200 \times 10^3 \times 10^{18} = 2 \times 10^{23}$，它是個 24 位數。此指出 20^{18} 是 24 位數。
更正式地，$2^{18} = 2^8 \times 2^{10} > 100 \times 1000 = 10^5$ 而 $2^{18} = 2^9 \times 2^9 < 1000 \times 1000 = 10^6$。故 $10^{23} < 20^{18} < 10^{24}$，所以 20^{18} 為 24 位數。

答: (A)。

註： $20^{18} = 262\,144\,000\,000\,000\,000\,000\,000$

---

22. 在以下減式中，第一個數有 100 個數碼、第二個數有 50 個數碼。

$$\underbrace{111\ldots\ldots111}_{100\text{ 位數}} - \underbrace{222\ldots222}_{50\text{ 位數}}$$

請問所得結果的數碼和是多少？

(A) 375 (B) 420 (C) 429 (D) 450 (E) 475

解法 1

由一些簡單的情況開始：

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & 2 & 2 & 2 & 2 & - \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 8 & 8 & 8 & 9 & \end{array} \qquad \text{數碼和} = 3\times 1 + 3\times 8 + 9 = 36$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & - \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 9 & \end{array} \qquad \text{數碼和} = 4\times 1 + 4\times 8 + 9 = 45$$

繼續這樣型式，我們可以將它推廣。則全部的數碼和為 $49\times1+0+49\times8+9 = 450$。

答: (D)。

解法 2

$$\begin{aligned} \underbrace{111\ldots111}_{100} - \underbrace{222\ldots222}_{50} &= \underbrace{111\ldots111}_{100} - \underbrace{111\ldots111}_{50} - \underbrace{111\ldots111}_{50} \\ &= \underbrace{111\ldots111}_{50}\underbrace{000\ldots000}_{50} - \underbrace{111\ldots111}_{50} \\ &= \underbrace{111\ldots110}_{50}\underbrace{999\ldots999}_{50} - \underbrace{111\ldots110}_{50} \\ &= \underbrace{111\ldots110}_{50}\underbrace{888\ldots889}_{50} \end{aligned}$$

在這個數的數碼和中，我們可以把 $1+8$ 配對，得到 $50\times 9 = 450$。

答: (D)。

---

23. 假設 p 是一個二位數，q 與它有相同的數碼但以逆序排列。已知 p^2-q^2 是個非零的完全平方數。請問 p 的數碼和是多少？

(A) 7 (B) 9 (C) 11 (D) 12 (E) 13

令 p 的數碼為 a 與 b。

$$\begin{aligned} p^2-q^2 &= (10a+b)^2-(10b+a)^2 \\ &= (10a+b+10b+a)(10a+b-10b-a) \\ &= 3^2\times 11\times(a+b)(a-b) \end{aligned}$$

因為 p^2-q^2 為完全平方數，因此 $11(a+b)(a-b)$ 是一個完全平方數，且它們的質因數分解包括 11^2。所以 $(a+b)$ 或 $(a-b)$ 是 11 的倍數。
因為 a 與 b 是數碼，$a-b\le 9$，故 $a-b$ 不是 11 的倍數。由此得知 $a+b$ 是 11 的倍數。因為 $a+b\le 18$，故 $a+b=11$。

答: (C)。

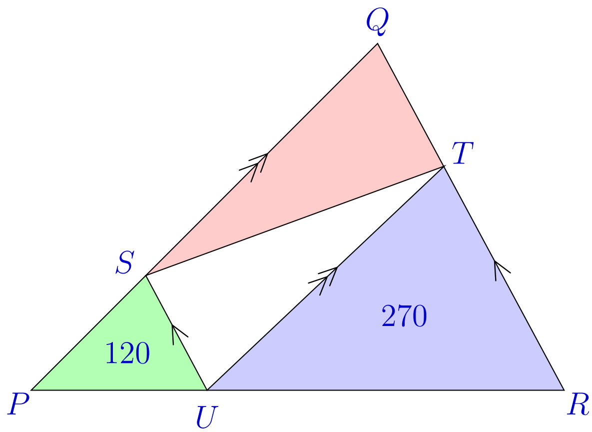
註： 唯一的解答為 $p=65$。

24. 在 $\triangle PQR$ 中，點 U 在 PR 上，點 S 在 PQ 上，點 T 在 QR 上且 $US \parallel RQ$、$UT \parallel PQ$。

已知 $\triangle PSU$ 的面積為 $120\,\text{cm}^2$、$\triangle TUR$ 的面積為 $270\,\text{cm}^2$。

請問 $\triangle QST$ 的面積為多少 cm^2？

(A) 150 (B) 160 (C) 170 (D) 180 (E) 200



解法 1

令 $\triangle QST$ 的面積為 $x\ \text{cm}^2$。因為 $PQ \parallel UT$，$\triangle SPU$ 與 $\triangle QST$ 的高相等且它們的面積之比與它們的底邊之比相等。故 $\dfrac{120}{x} = \dfrac{PS}{SQ} = \dfrac{PS}{UT}$。同理，因為 $SU \parallel QR$，$\triangle RUT$ 與 $\triangle QST$ 的高相等且它們的面積之比與它們的底邊之比相等。故 $\dfrac{270}{x} = \dfrac{TR}{QT} = \dfrac{TR}{SU}$。

由於對應角 $\angle QPR = \angle TUR$、$\angle QRP = \angle SUP$，故 $\triangle QPR$、$\triangle SPU$、$\triangle TUR$ 相似。所以 $\dfrac{PS}{UT} = \dfrac{SU}{TR}$。則 $\dfrac{120}{x} = \dfrac{PS}{UT} = \dfrac{SU}{TR} = \dfrac{x}{270}$。解方程 $x^2 = 120 \times 270 = 2^2 \times 30^2 \times 3^2$，$x = 180$。

答: (D)。

解法 2

由於平行線、$\angle SPU = \angle TUR$、$\angle SUP = \angle TRU$，所以 $\triangle SPU$、$\triangle TUR$、$\triangle QPR$ 相似。

現知 $\triangle TUR$ 的面積為 $\triangle SPU$ 的 $\dfrac{270}{120} = \dfrac{9}{4} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$ 倍，故它的邊長是 $\triangle SPU$ 邊長的 $\dfrac{3}{2}$ 倍。此即，$UR = \dfrac{3}{2}PU$。則 $PR = \dfrac{5}{2}PU$，故 $\triangle QPR$ 的面積為 $\triangle SPU$ 面積的 $\dfrac{25}{4}$ 倍，此即 $\triangle QPR$ 的面積為 $750\ \text{cm}^2$。則四邊形 $QSTU$ 的面積為 $750 - 270 - 120 = 360\ \text{cm}^2$，故 $\triangle QST$ 的面積為 $180\ \text{cm}^2$。

答: (D)。

25. 在今年小安的年齡等於她數學老師年齡之數碼和。五年後小安的年齡將等於當時數學老師年齡之數碼乘積。
請問小安現年幾歲？

(A) 11　(B) 13　(C) 15　(D) 14　(E) 16

我們可剔除老師的年齡為一位數的可能性，因為這樣小安將與老師同年齡。所以我們可以假設老師的年齡是個二位數 $10x+y$，故小安的年齡為 $x+y$。若 $y=5$、$10x+y>95$，則五年後，小安的年齡將為 0 歲，這是不可能的。五年後小安的年齡將為 $x+y+5$ 而老師的年齡為 $10x+(y+5)$，其中 $y\le 4$，或者 $10(x+1)+(y-5)$，其中 $x<9$ 且 $y\ge 6$。這兩種情況的乘積如下方程：

情況 I：$y\le 4$

$$\begin{aligned} x(y+5) &= x+y+5 \\ xy+5x &= x+y+5 \\ xy+4x &= y+5 \\ x &= \frac{y+5}{y+4} \end{aligned}$$

情況 II：$y\ge 6$

$$\begin{aligned} (x+1)(y-5) &= x+y+5 \\ xy+y-5x-5 &= x+y+5 \\ xy-6x &= 10 \\ x &= \frac{10}{y-6} \end{aligned}$$

因為我們在求一位數正整數碼 x 與 y，考慮個別不等式中的 y，顯然情況 I 無解而情況 II 只有唯一解 $y=8$ 且 $x=5$。所以一個可能的解答為老師現年 58 歲且小安現年 $5+8=13$ 歲，而五年後老師將為 63 歲且小安將為 18 歲，符合所求。

最後，我們考慮老師的年齡為三位數 $100+10x+y$ 的可能性。主要是通常老師的年齡不超過 200 歲，此時小安的年齡為 $1+x+y$。利用相同的理由，我們多了以下情況：

情況 III：$y\le 4$

$$\begin{aligned} 1x(y+5) &= 1+x+y+5 \\ xy+5x &= x+y+6 \\ xy+4x &= y+6 \\ x &= \frac{y+6}{y+4} \end{aligned}$$

情況 IV：$y\ge 5$

$$\begin{aligned} 1(x+1)(y-5) &= 1+x+y+5 \\ xy+y-5x-5 &= x+y+6 \\ xy-6x &= 11 \\ x &= \frac{11}{y-6} \end{aligned}$$

因為二者都不可能得到只有一位數的解答，所以我們可以刪除三位數的情況。

答: (B)。

問題 26-30 的答案為 000-999 之間的整數，
請將答案填在答案卡上對應的位置。

第 26 題占 6 分，第 27 題占 7 分，第 28 題占 8 分，
第 29 題占 9 分，第 30 題占 10 分。

---

26. 有一個三位數減掉它的數碼和後等於這個三位數的數碼和之平方。請問這個三位數是什麼？

假設這個數的數碼為 a、b 與 c，則其數碼和為 $s=a+b+c$。

$$\begin{aligned} s^2 &= n-s \\ &= 100a+10b+c-(a+b+c) \\ &= 99a+9b \end{aligned}$$

因此 s^2 是 9 的倍數，所以 s 必須是 3 的倍數，同時 $s \geq \sqrt{99} > 9$ 且 $s \leq 27$。所以我們逐項檢查 $s=12$、15、18、$\cdots$、27 是否滿足 $n=s^2+s=s(s+1)$。

s	12	15	18	21	24	27
$n=s(s+1)$	156	240	342	462	600	756
	✓	×	×	×	×	×

其中 $s=15$、$\cdots$、27 都不滿足，因為 n 的數碼和都不等於 s。所以只有唯一解 $n=156$。

答: (156)。

27. 從甲地到乙地的鐵路長度為 999 km。在沿路上每 km 都有一個如下圖所示的路標指示與兩地之距離。

$\boxed{0|999}$ $\boxed{1|998}$ $\boxed{2|997}$ $\boxed{3|996}$ $\cdots$ $\boxed{998|1}$ $\boxed{999|0}$

請問總共有多少個路標上只恰使用二種不同的數碼？

考慮恰使用兩種不同數碼的路標$\boxed{X|Y}$，其中 X 與 Y 為使得 $X+Y=999$ 的數。對於 X 的個位數碼 a，有 10 種可能的數碼。Y 的個位數碼將為 $b=9-a$，它不會與 a 相同，所以在路標上的兩個數碼必須是 a 與 b。

X 的十位數碼只能是 a 或 b，這兩種選擇方式都同時確定了 Y 的十位數碼。同理 X 與 Y 的百位數碼也共有二種選法。

由此可得知 $10\times 2\times 2=40$ 種情況，每一種都恰有一個可能的路標。其中有一些的首位數為 0，例如 $X=090$、$Y=909$。無論如何這些仍然只有一個有效的路標，如 $\boxed{90|909}$。所以只恰使用二種不同數碼的路標共有 40 個。

答: (040)。

28. 在以下的除式中，X、Y、Z 為非零的相異數碼：

$$\begin{array}{r|l} & \;Z\;X \quad \text{餘數 } Y \\ 8 & \overline{X\;Y\;Z} \end{array}$$

請問三位數 $\overline{XYZ}$ 是什麼？

將除式改為乘式

$$\begin{aligned} 8(10Z + X) + Y &= 100X + 10Y + Z \\ 8X + Y + 80Z &= 100X + 10Y + Z \\ 79Z &= 92X + 9Y \end{aligned}$$

模 9，可得到 $-2Z \equiv 2X$，將兩邊同乘 5，可得 $-Z \equiv X$。因為 $1 \leq X \leq 9$，我們有 $Z = 9 - X$。

則

$$\begin{aligned} 79Z &= 92X + 9Y \\ 79(9 - X) &= 92X + 9Y \\ 711 &= (92 + 79)X + 9Y = 171X + 9Y \\ 79 &= 19X + Y \end{aligned}$$

因為 X、Y、Z 都是 1 到 9 的數碼，唯一的解答為 $X = 4$、$Y = 3$，因而得知 $Z = 5$。驗算，$435 \div 8 = 54...3$。

答: (435)。

29. 有一列遞增的無限數列具有以下性質：它的首 n 項的中位數等於第 n 個正奇數。請問此數列中有多少個數小於 2018？

因為第 n 項是前 $(2n-1)$ 項的中位數，它必須等於第 $(2n-1)$ 個奇數，即 $2(2n-1)-1=4n-3$。所以為了滿足任意奇數項中位數的條件，此數列必須是

$$1\ 5\ 9\ 13\ \cdots$$

現在證明中位數的條件也滿足偶數項：首 $2n$ 項的中位數為第 n 項與第 $(n+1)$ 項的平均，即

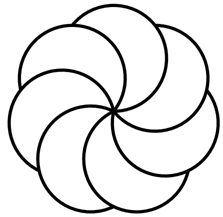
$$\frac{(4n-3)+(4(n+1)-3)}{2}=\frac{8n-2}{2}=2(2n)-1$$

它等於第 $2n$ 個奇數，符合我們的宣稱。
所以數列第 n 項等於 $4n-3$。為求總共有 n 項內的數小於 2018，我們有

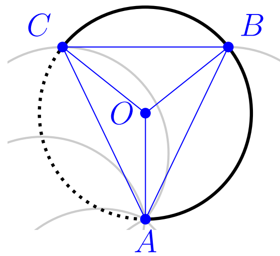
$$\begin{aligned}4n-3 &< 2018\\ 4n &< 2021\\ n &< 505\tfrac{1}{4}\end{aligned}$$

答: (505)。

30. 對於 $n \geq 3$，用 n 個圓周長為 1 單位互相重疊的圓可構造一個圖案，每個圓都通過一個中心點，最後得到的圖案具有 n 階旋轉對稱。
例如，右圖所示的為 $n = 7$ 的這種圖案。
若可看見的弧之總長度為 60 單位，請問 n 等於多少？



令點 A 為圖案的中心，則每個圓有一個圓心 O 且有一個如圖所示的等腰三角形 ABC。故



$$\angle BAC = \frac{360^\circ}{n}$$
$$\angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right) = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}$$
$$\angle AOC = 2\angle ABC = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

因此優角 $AOC = 180^\circ + \frac{360^\circ}{n} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) \times 360^\circ$。由此可知可看見的弧佔此圓的 $\frac{1}{2} + \frac{1}{n}$，即此弧長為 $\frac{1}{2} + \frac{1}{n}$。
可看見的弧之總長度為 $n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) = \frac{n}{2} + 1 = 60$。所以 $\frac{n}{2} = 59$，即 $n = 118$。

答: (118)。