

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

3 Junior paper — draft for traditional chinese translation

初級卷

1-10 題，每題 3 分

1. 請問算式 $2 + 0 + 1 + 8$ 之值等於多少？

- (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 38 (E) 2018
-

$$2 + 0 + 1 + 8 = 11。$$

答: (C)。

2. 小佳原本有 \$47，她又得到 \$25 的生日禮金。請問她現在有多少錢？

- (A) \$52 (B) \$62 (C) \$65 (D) \$69 (E) \$72
-

$$\text{她現有 } \$ 47 + \$ 25 = \$ 72。$$

答: (E)。

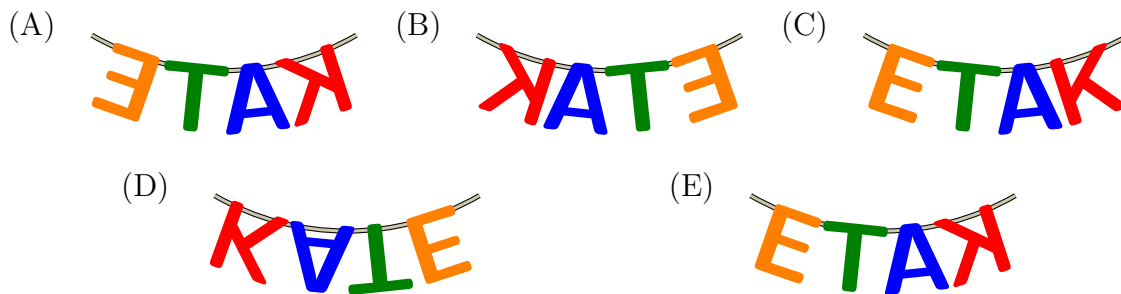
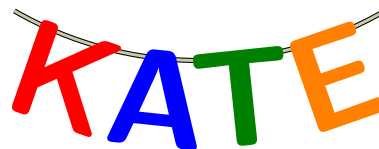
3. 請問算式 $4 \times 10000 + 3 \times 1000 + 2 \times 10 + 4 \times 1$ 之值等於多少？

- (A) 4324 (B) 43024 (C) 43204 (D) 430204 (E) 430024
-

$$4 \times 10000 + 3 \times 1000 + 2 \times 10 + 4 \times 1 = 40000 + 3000 + 20 + 4 = 43000 + 24 = 43024。$$

答: (B)。

4. 小凱用字母串珠做出右側這個項鍊。
她將它翻面過來，展現出串珠的背面。請問下列
哪一項內的圖是現在看起來的樣子？



項鍊的背面將看起來像項鍊正面之鏡像，所以每個字母要做鏡像，且字母的順序要相反：

K A T E | E T A K
正面 反面

答: (A)。

5. 請問在下午 5:34 之前 58 分鐘是什麼時刻？

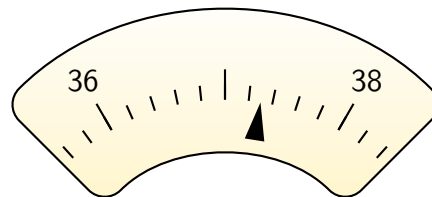
(A) 下午 5:32 (B) 下午 5:36 (C) 下午 6:32 (D) 下午 6:12 (E) 下午 4:36

在下午 5:34 之前 60 分鐘是下午 4:34，所以在下午 5:34 之前 58 分鐘則晚 2 分鐘，即下午 4:36。

答: (E)。

6. 請問這個普遍使用的儀表所指出的值是什麼？

- (A) 36.65 (B) 37.65 (C) 38.65
(D) 37.15 (E) 37.3



長的標記分別是 36、37、38，而每個短的標記相距 0.2 單位。箭頭指在 37 之後的 0.3，所以它指出的值為 37.3。

答: (E)。

7. 從 1000 開始，小絲每次減少 7 向後數。請問小絲數到最小的正整數是什麼？

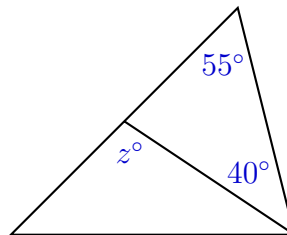
- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

$1000 \div 7 = 142 \dots 6$ ，經過減少 142 次 7 之後，小絲數出的數為 6。

答: (E)。

8. 右圖中，請問 z 之值是什麼？

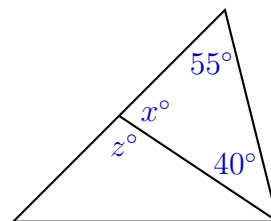
- (A) 75 (B) 85 (C) 95
(D) 100 (E) 105



解法 1

上部的三角形之內角和為 180° ，所以 $x^\circ = 85^\circ$ 。

而 $x^\circ + z^\circ = 180^\circ$ ，因此 $z^\circ = 95^\circ$ 。



答: (C)。

解法 2

在上部的三角形中，因為三角形的外角等於兩個遠內角之和，所以 $z^\circ = 40^\circ + 55^\circ$ 。

答: (C)。

9. 五位小朋友 A、B、C、D、E 一起玩遊戲。他們打算由年齡最大到最小排成一列。

- A 比 B 的年齡大且 B 比 E 的年齡大。
- D 也比 B 的年齡大。
- A 不是年齡最大。
- E 不是年齡最小。

這五位小朋友中，請問誰的年齡第二小？

- (A) A (B) B (C) C (D) D (E) E
-

誰的年齡最小？不是 A、B、D、E，所以 C 的年齡最小。

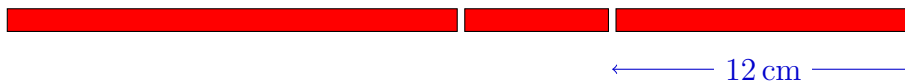
除了 C 之外，誰的年齡最小？不是 A、B、D，所以除了 C 之外，年齡最小的是 E。

答: (E)。

10. 將一條彩帶剪成相等的兩段。使用掉其中的一段，再使用掉另外一段的三分之一，最後剩下 12 cm 的彩帶。請問原來的彩帶長度為多少 cm？

- (A) 24 (B) 32 (C) 36 (D) 48 (E) 50
-

彩帶如下圖所示：



最右邊的彩帶是右半段的三分之二，所以右半段的三分之一是 6 cm，即右半段是 18 cm。

可得知左半段也是 18 cm，原來的彩帶全長 36 cm。

答: (C)。

11-20 題，每題 4 分

11. 一個數的 1000% 等於 100，請問這個數是什麼？

(A) 0.1

(B) 1

(C) 10

(D) 100

(E) 1000

因為 $1000\% = 10 \times 100\%$ ，一個數的 1000% 即為這個數的十倍。

因此一個數的 10 倍等於 100，即這個數是 10。

答: (C)。

12. NORA、ANNE、WARREN 與 ANDREW 四人購買塑膠字母以便在生日蛋糕上拼出他們的名字。他們的生日都在不同的日期，所以他們打算重複使用一些字母在不同的蛋糕上。請問他們至少共需要多少個塑膠字母牌？
- (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12



解法 1

將所需的字母列表如下：

字母	A	D	E	N	O	R	W
NORA	1	-	-	1	1	1	-
ANNE	1	-	1	2	-	-	-
WARREN	1	-	1	1	-	2	1
ANDREW	1	1	1	1	-	1	1
合計	1	1	1	2	1	2	1

因此要含蓋所有的姓名共需 9 個字母牌。

答: (B)。

解法 2

對於 ANDREW，需要字母 ADENRW(依字母排序)。

對於 WARREN，需要增加一個 R：ADENRRW。

對於 ANNE，需要增加一個 N：ADENRRW。

對於 NORA，需要增加一個 O：ADENNORRW。

總共需要 9 個字母牌。

答: (B)。

13. 餵養四隻狗三天的伙食費為 \$60。若每天每隻狗的伙食費都相同，請問餵養七隻狗七天的伙食費為多少？

- (A) \$140 (B) \$200 (C) \$245 (D) \$350 (E) \$420

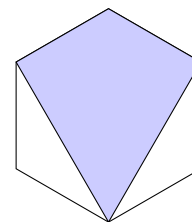
餵養 4 隻狗一天的伙食費為 $\$60 \div 3 = \20 ，因此餵養 1 隻狗 1 天的伙食費為 $\$20 \div 4 = \5 。

所以餵養 7 隻狗 7 天的伙食費為 $\$5 \times 7 \times 7 = \245 。

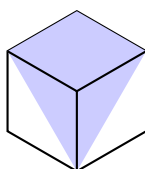
答: (C)。

14. 請問這個正六邊形的幾分之幾被塗上陰影？

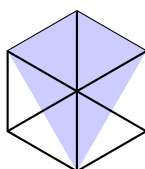
- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{5}$ (E) $\frac{4}{5}$



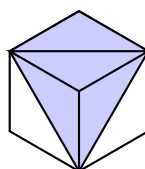
有如圖所示許多將正六邊形分割為等面積的方法，由它們都可得知塗上陰影的部分為全部的 $\frac{2}{3}$ 。



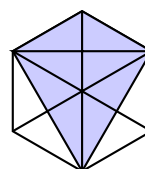
$\frac{2}{3}$



$\frac{4}{6}$



$\frac{4}{6}$



$\frac{8}{12}$

答: (B)。

15. 小李有一些全等的正方形瓷磚，他將它們以邊對邊連接成一長條，而構成一個矩形。這個矩形的周長為單獨一片瓷磚周長的三倍。請問小李共有多少片瓷磚？

(A) 3

(B) 5

(C) 6

(D) 8

(E) 9

解法 1

令一片瓷磚的邊長為 1 單位，則此矩形的周長為 12 單位，所以它的長加寬等於 6 單位。因為此矩形之寬為 1 單位，所以它的長為 5 單位，因此小李共有 5 片瓷磚。
答: (B)。

解法 2

假設小李有 n 片瓷磚，每一片瓷磚的邊長為 s 。則這個矩形的長與寬之長度分別為 s 與 sn ，故它的周長為 $2s + 2sn$ ，由題意知此與 $3 \times 4s = 12s$ 相等，即 $12s = 2s + 2sn$ 。因此可得 $10s = 2sn$ ，故 $n = \frac{10s}{2s} = 5$ 。

答: (B)。

16. 小傑明年打算選修外語課。他必須選擇二門不同的選修課，一門從 A 組選、另一門從 B 組選。

A 組	B 組
華語	華語
日語	德語
西班牙語	阿拉伯語
印尼語	義大利語

請問小傑有多少種不同的可能選修配對組合？

- (A) 7 (B) 8 (C) 12 (D) 15 (E) 16

解法 1

若小傑從 A 組中選擇華語，則在 B 組中他有 3 種選擇。

若小傑從 A 組中選擇日語、西班牙語、印尼語，則在 B 組中他有 4 種選擇，總共有 12 種選擇。

這 15 種選擇全部都不相同，所以小傑共有 15 種可能的配對。

答: (D)。

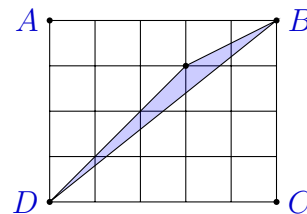
解法 2

小傑從 A 組中的四門選修課中選一門，也從 B 組的四門選修課中選一門，這樣總共有 16 種選擇。其中，唯有從兩組中都選擇華語是不允許的。所以小傑共有 15 種可能的配對。

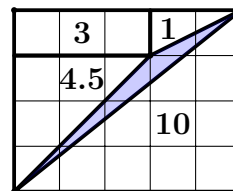
答: (D)。

17. 在右圖中， $ABCD$ 是一個 $5\text{ cm} \times 4\text{ cm}$ 的矩形。每個小方格是 $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$ 。請問陰影部分的面積為多少 cm^2 ？

- (A) 1 (B) 1.5 (C) 0.5 (D) 2 (E) 3



在圖中給出每個區域的面積，所以陰影部分的面積為 $20 - 10 - 3 - 1 - 4.5 = 1.5\text{ cm}^2$ 。



答: (B)。

18. 將一些數填入右側的方格表內，使得每一行、每一列與每條對角線上的數之和都等於 18。
請問在四個角落上的數之總和等於多少？

- (A) 20 (B) 22 (C) 23
(D) 24 (E) 25

	6	
	4	

在中央方格上方的數必須是 8。

因此在上方兩個角落的數之和必須為 10、在下方兩個角落上的數之和必須為 14。
所以任意解答之下，四個角落上的數之總和都等於 24。

驗算，有許多可能的解答，如以下的圖所示。

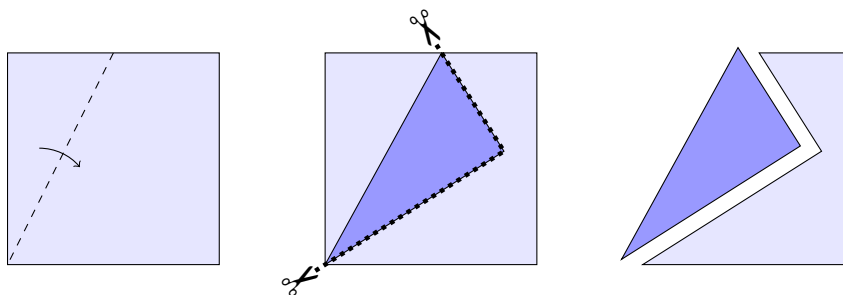
3	8	7
10	6	2
5	4	9

4	8	6
8	6	4
6	4	8

8	8	2
0	6	12
10	4	4

答: (D)。

19. 將一張正方形紙片沿著頂邊的中點與左下方的頂點之連線向內摺疊。再將下層的紙片沿著上層紙片的邊緣剪開，如下圖所示。



將摺疊的這片展開，請問下列哪一項內對於這兩片紙片的描述是正確的？

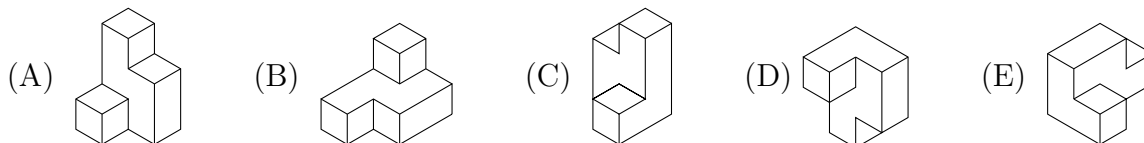
- (A) 一片為箏形、一片為五邊形且它們的面積相等
 (B) 一片為矩形、一片為五邊形且它們的面積相等
 (C) 一片為等腰三角形、一片為五邊形且五邊形的面積較大
 (D) 一片為箏形、一片為五邊形且箏形的面積較小
 (E) 一片為矩形、一片為五邊形且矩形的面積較大

被摺疊的這一片包括兩個直角三角形，其中摺疊線為對稱軸且為這兩個三角形的斜邊，所以它必定是個箏形。另一片則是凹五邊形。

令正方形的邊長為 2 單位，故它的面積為 4 平方單位。摺疊的三角形面積為 $\frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$ 平方單位，所以這個箏形的面積為 2 平方單位。由此可知五邊形的面積也是 2 平方單位，等於箏形面積。

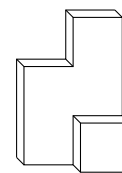
答: (A)。

20. 一個 3 維的積木是由六個全等的正立方體黏貼在一起而構成的。以下各項內的積木中，有四個是從不同角度觀看此積木的圖形，而其中有一個是不同的積木。請問哪一項內的圖是這個不同的積木？



當在 (B)、(C)、(D)、(E) 項內的積木分別從頂部方向、前左方向、前左方向、前右方向看去並適當旋轉時，每一個看起來都如右圖。

然而，除非有第七個正立方體隱藏在背面，否則 (A) 項內的積木不可能看起來也如此。



答: (A)。

21-25 題，每題 5 分

21. 我們定義一個月的千分之一為一毫月。請問一毫月大約等於多久？

(A) 20 秒 (B) 70 秒 (C) 8 分鐘 (D) 40 分鐘 (E) 3 小時

一個月大約為 30 天 = 720 小時 = 43200 分鐘，所以一個月的 $\frac{1}{1000}$ 大約為 43 分鐘。

答: (D)。

22. 將從 1 到 8 的數不重複地填入右圖所示的圓圈內，其中數 3 已經填入，如圖所示。

每一個三角形上的三個數之和都相等。

在中央正方形角落的四個數之和為 20。

請問 $x + y$ 等於多少？

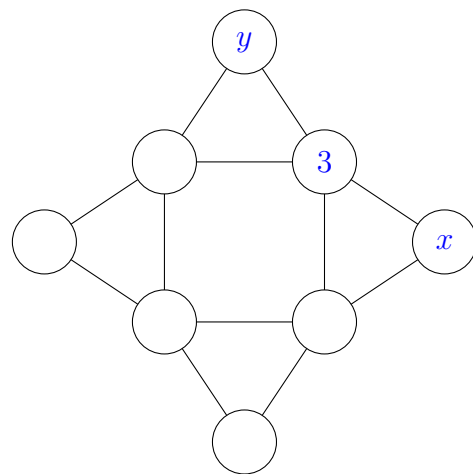
(A) 10

(B) 11

(C) 12

(D) 13

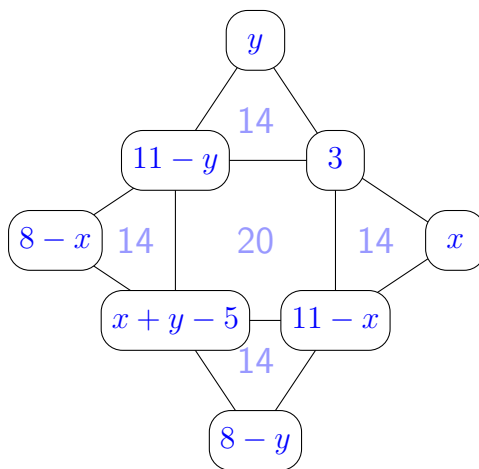
(E) 14



解法 1

八個數之和為 $1 + \dots + 8 = 36$ ，故在外部四個數之和為 16。

令 T 為一個三角形上的數之和，則 $4T = 2 \times 20 + 1 \times 16 = 56$ ，故 $T = 14$ 。我們可以將 $11 - y$ 與 $11 - x$ 填入正方形內，則正方形最一個角落的數為 $20 - 3 - (11 - x) - (11 - y) = x + y - 5$ ，故其他二個外部的數為 $14 - (11 - y) - (x + y - 5) = 8 - x$ 與 $14 - (11 - x) - (x + y - 5) = 8 - y$ 。



現在考慮哪一個數是 8。

若 $x = 8$ ，則 $8 - x = 0$ ，這是不可能的。

若 $8 - x = 8$ ，則 $x = 0$ ，這一樣也是不可能的，所以 $8 - x \neq 8$ 。同理 $8 - y \neq 8$ 。

若 $11 - x = 8$ ，則 $x = 3$ ，已經出現在圖中了，所以 $11 - x \neq 8$ 且同理 $11 - y \neq 8$ 。

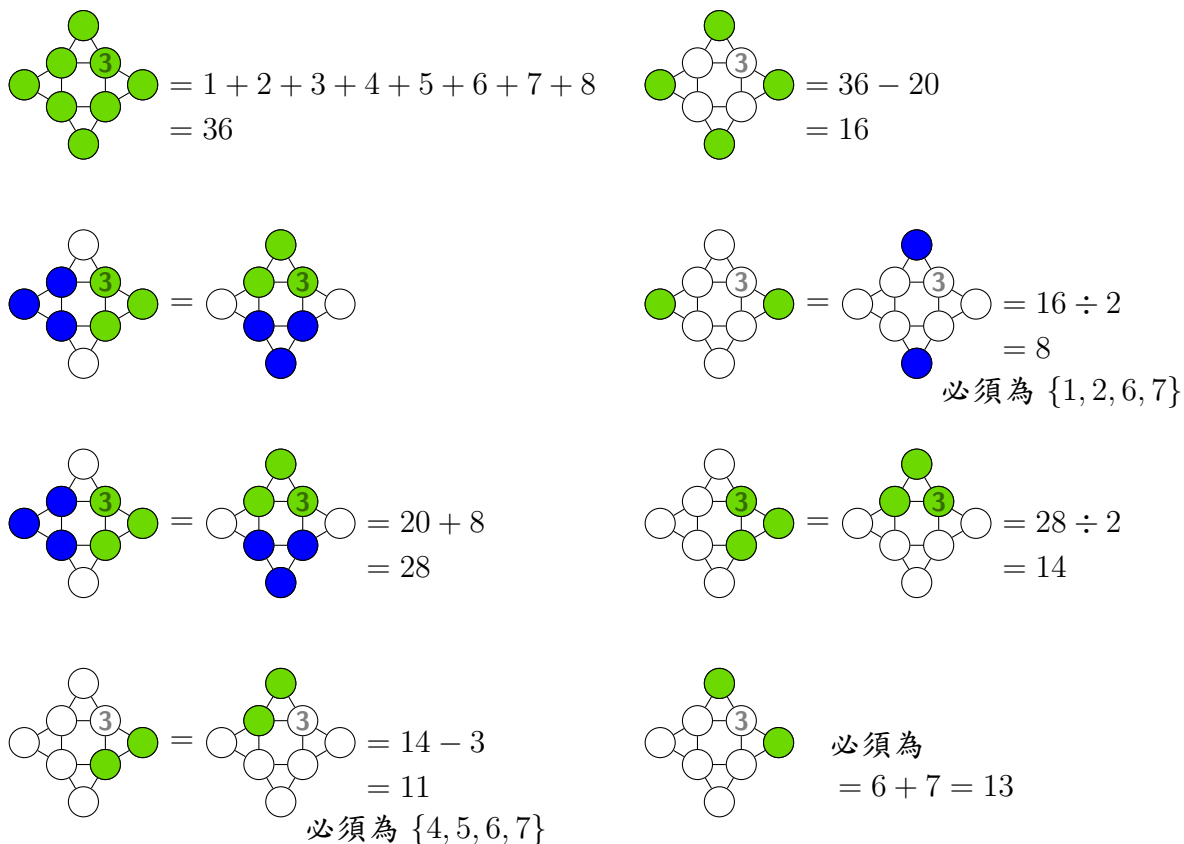
由此可得知 $x + y - 5 = 8$ ，即 $x + y = 13$ 。

答: (D)。

註：一旦我們得知 $x + y - 5 = 8$ ，即 $x + y = 13$ ，則 $x = 6$ 、 $y = 7$ 或二者對調。無論何種情況，我們利用上式即可完成圖中剩下的數。

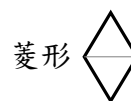
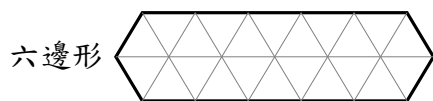
解法 2

在以下解答中，塗上陰影的圓圈的集合用來代表它們各種不同的和。



答: (D)。

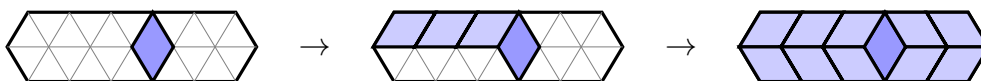
23. 一個長且窄的六邊形是由 22 個邊長為 1 單位的正三角形組成的。
欲用 11 個邊長為 1 單位的菱形 (它是由二個邊長為 1 單位的正三角形組成的) 將這個六邊形蓋滿, 請問共有多少種不同的方法?



- (A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 12 (E) 16

這個六邊形有二列各有 11 個三角形, 故每一列不能有整數個菱形, 且至少有一個菱形必須是每一列各有一個三角形, 這個菱形將是垂直方向的。

一旦有一個垂直的菱形, 由於在剩下的空位裡有 60° 角需要填滿, 所有剩下的菱形只能有一種方法置入, 不能再有垂直的。例如:



所以六種選擇垂直菱形的方法恰可產生一種拼法, 故共有六種不同的拼法。

答: (A)。

24. 在以下的小方格內填入加號或減號使得其結果為最小可能的正數：

$$\square \frac{1}{3} \square \frac{1}{4} \square \frac{1}{5} \square \frac{1}{6} \square \frac{1}{7}$$

請問此結果滿足下列哪一項？

- (A) 介於 0 與 $\frac{1}{100}$ 之間
 (B) 介於 $\frac{1}{100}$ 與 $\frac{1}{50}$ 之間
 (C) 介於 $\frac{1}{50}$ 與 $\frac{1}{20}$ 之間
 (D) 介於 $\frac{1}{20}$ 與 $\frac{1}{10}$ 之間
 (E) 介於 $\frac{1}{10}$ 與 1 之間

解法 1

將每個數乘以 $\text{lcm}(3, 4, 5, 6, 7) = 420$ ，則題目變成整數的版本：

$$\square 140 \square 105 \square 84 \square 70 \square 60$$

其中有一些數要加；有一些數要減，使得結果為儘可能靠近 0 的正整數。所以任務是要將這五個整數分成兩組（加對減），使得每一組內的數儘可能靠近目標 $(140 + 105 + 84 + 70 + 60) \div 2 = 229.5$ 。

數 140 將在其中一組，在同組的其他數將儘可能靠近 $229.5 - 140 = 89.5$ 。顯然，84 是最靠近的一個數並且兩個或以上其它的數最小是 $60 + 70 = 130$ ，這樣更糟。所以這一組是 $\{140, 84\}$ 。

因此在最佳的解答中，這兩組為 $\{140, 84\}$ 與 $\{105, 70, 60\}$ ，它們的和分別為 224 與 235，給出其解答為

$$-140 + 105 - 84 + 70 + 60 = 235 - 224 = 11$$

將此解答轉回原來分數的問題，其解答為

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{11}{420}$$

此值接近於 $\frac{1}{40}$ ，所以它介於 $\frac{1}{50}$ 與 $\frac{1}{20}$ 。

驗算， $\frac{1}{20} = \frac{21}{420} > \frac{11}{420}$ 且 $\frac{1}{50} < \frac{1}{42} < \frac{11}{420}$ ，所以 $\frac{1}{50} < \frac{11}{420} < \frac{1}{20}$ 。

答：(C)。

解法 2

用小數表示，選項中出現的數分別為 0、0.01、0.02、0.05、0.1 與 1。它們最小的區間長度為 0.01，所以我們試著用三位小數來解答它。

用三位小數，題目中的分數分別為 0.333、0.25、0.2、0.167 與 0.143。它們相加得到 1.092，我們欲將它們分為二組，每一組的目標為 $1.092 \div 2 = 0.546$ 。

有 0.333 的這一組，其它的數之目標為 $0.546 - 0.333 = 0.213$ 。我們可以找到最靠近的數是 0.2，即最佳的和為 $0.333 + 0.2 = 0.533$ 。留下來 $0.25 + 0.167 + 0.143 = 0.56$ 為其它的數之總和。

所以最小可能的正數解為 $(0.25 + 0.167 + 0.143) - (0.333 + 0.2) = 0.56 - 0.533 = 0.027$ 。

此解答介於 $0.02 = \frac{1}{50}$ 與 $0.05 = \frac{1}{20}$ 之間。

答：(C)。

註：這個解答是一個近似值，但並不影響答案。我們所用的每個分數近似值誤差在 0.0005 之內，所以準確的答案誤差只佔 0.027 之 $5 \times 0.0005 = 0.0025$ 之內。所以它仍然介於 0.02 與 0.05 之間。

25. 在以下減式中，第一個數有 100 個數碼、第二個數有 50 個數碼。

$$\underbrace{111 \dots 111}_{100 \text{ 位數}} - \underbrace{222 \dots 222}_{50 \text{ 位數}}$$

請問所得結果的數碼和是多少？

- (A) 375 (B) 420 (C) 429 (D) 450 (E) 475

解法 1

由一些簡單的情況開始：

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ - \\ \hline 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 8 \ 8 \ 8 \ 9 \end{array} \quad \text{數碼和} = 3 \times 1 + 3 \times 8 + 9 = 36$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ - \\ \hline 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 8 \ 8 \ 8 \ 8 \ 9 \end{array} \quad \text{數碼和} = 4 \times 1 + 4 \times 8 + 9 = 45$$

繼續這樣型式，我們可以將它推廣。則全部的數碼和為 $49 \times 1 + 0 + 49 \times 8 + 9 = 450$ 。
答：(D)。

解法 2

$$\begin{aligned} \underbrace{111 \dots 111}_{100} - \underbrace{222 \dots 222}_{50} &= \underbrace{111 \dots 111}_{100} - \underbrace{111 \dots 111}_{50} - \underbrace{111 \dots 111}_{50} \\ &= \underbrace{111 \dots 111}_{50} \underbrace{000 \dots 000}_{50} - \underbrace{111 \dots 111}_{50} \\ &= \underbrace{111 \dots 110}_{50} \underbrace{999 \dots 999}_{50} - \underbrace{111 \dots 110}_{50} \\ &= \underbrace{111 \dots 110}_{50} \underbrace{888 \dots 889}_{50} \end{aligned}$$

在這個數的數碼和中，我們可以把 $1 + 8$ 配對，得到 $50 \times 9 = 450$ 。

答：(D)。

問題 26-30 的答案為 000-999 之間的整數，
請將答案填在答案卡上對應的位置。

第 26 題占 6 分，第 27 題占 7 分，第 28 題占 8 分，
第 29 題占 9 分，第 30 題占 10 分。

26. 只使用數碼 0、1、2，右圖這個正立方體每個面上的數都互不相同。
任意在相對面上的兩個數之和都等於一個相同的三位數。
請問這兩個數之和的最大可能值是什麼？



令 X 為任意相對面上的兩個數之和，它可以表示為 \overline{abc} 。因為在正立方體上的每個數碼都小於 5，所以當它們相加時不可能產生進位的情況。

在百位數上， $a = 1 + \square = 2 + \square$ ，其中小方格內只能是 0、1、2。所以只能是 $a = 2$ 或 $a = 3$ 。(若看不見的面上之數少於三位數，它的百位數碼取為 0。)

在十位數上， $b = 0 + \square = 2 + \square$ ，只可能是 $b = 2$ 。

在個位數上， $c = 0 + \square = 1 + \square$ ，只可能是 $c = 1$ 或 $c = 2$ 。

所以 X 可能為 221、222、321、322。

若 $X = 322$ ，則看不見的面上之數為 102、201、121，此時在這個正立方體上只有四個互不相同的數，所以 $X = 322$ 不是一個解答。

若 $X = 321$ ，則看不見的面上之數為 101、200、120，則在這個正立方體上共有 6 個不相同的數。所以 $X = 321$ 是最大的可能之解答。

答: (321)。

27. 有一個三位數減掉它的數碼和後等於這個三位數的數碼和之平方。請問這個三位數是什麼？

假設這個數的數碼為 a 、 b 與 c ，則其數碼和為 $s = a + b + c$ 。

$$\begin{aligned} s^2 &= n - s \\ &= 100a + 10b + c - (a + b + c) \\ &= 99a + 9b \end{aligned}$$

因此 s^2 是 9 的倍數，所以 s 必須是 3 的倍數，同時 $s \geq \sqrt{99} > 9$ 且 $s \leq 27$ 。所以我們逐項檢查 $s = 12, 15, 18, \dots, 27$ 是否滿足 $n = s^2 + s = s(s + 1)$ 。

s	12	15	18	21	24	27
$n = s(s + 1)$	156	240	342	462	600	756
	✓	×	×	×	×	×

其中 $s = 15, \dots, 27$ 都不滿足，因為 n 的數碼和都不等於 s 。所以只有唯一解 $n = 156$ 。

答：(156)。

28. 從甲地到乙地的鐵路長度為 999 km。在沿路上每 km 都有一個如下圖所示的路標指示與兩地之距離。

0|999
1|998
2|997
3|996
...
998|1
999|0

請問總共有多少個路標上只恰使用二種不同的數碼？

考慮恰使用兩種不同數碼的路標 $\boxed{X|Y}$ ，其中 X 與 Y 為使得 $X + Y = 999$ 的數。對於 X 的個位數碼 a ，有 10 種可能的數碼。 Y 的個位數碼將為 $b = 9 - a$ ，它不會與 a 相同，所以在路標上的兩個數碼必須是 a 與 b 。

X 的十位數碼只能是 a 或 b ，這兩種選擇方式都同時確定了 Y 的十位數碼。同理 X 與 Y 的百位數碼也共有二種選法。

由此可得知 $10 \times 2 \times 2 = 40$ 種情況，每一種都恰有一個可能的路標。其中有一些的首位數為 0，例如 $X = 090$ 、 $Y = 909$ 。無論如何這些仍然只有一個有效的路標，如 $\boxed{90|909}$ 。所以只恰使用二種不同數碼的路標共有 40 個。

答: (040)。

29. 在以下的乘式中， X 、 Y 與 Z 為非零的相異數碼。

$$\begin{array}{r} X Y Z \\ \times \quad 18 \\ \hline Z X Y Y \end{array}$$

請問三位數 \overline{XYZ} 是什麼？

解法 1

這個乘式為

$$\begin{aligned} (100X + 10Y + Z) \times 18 &= (1000Z + 100X + 10Y + Y) \\ 1800X + 180Y + 18Z &= 1000Z + 100X + 11Y \\ 1700X + 169Y &= 982Z \end{aligned}$$

可知 $169Y$ 為偶數，故 Y 必須為偶數。

因 $169Y$ 與 $982Z$ 相差 $1700X$ ，則它們的末兩位數碼必須相同。我們列出 $169Y$ 與 $982Z$ 的所有可能值：

Y	2	4	6	8					
$169Y$	338	676	1014	1352					
Z	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$982Z$	982	1964	2946	3928	4910	5892	6874	7856	8838

只有當 $Z = 9$ 且 $Y = 2$ 時，它們的最後兩位數碼才配對。此時 $1700X = 8838 - 338 = 8500$ ，所以 $X = 5$ 。

由此得知此乘式為 $529 \times 18 = 9522$ ，所以三位數 \overline{XYZ} 是 529。

答：(529)。

解法 2

由這個乘式可得以下方程：

$$\begin{aligned} 18(100X + 10Y + Z) &= 1000Z + 100X + 10Y + Y \\ 1700X + 169Y - 982Z &= 0 \end{aligned}$$

其中係數 1700、169、982 都接近於 170 的倍數。

$$170(10X + Y - 6Z) - Y + 38Z = 0$$

故 $38Z - Y$ 為 170 的倍數，令 $38Z - Y = 170n$ ，其中 $n = 6Z - 10X - Y$ 。因為 Y 與 Z 為非零數碼， $0 < 38Z - Y < 40 \times 9 = 360$ ，故 $n = 1$ 或 $n = 2$ ，同時 $38Z > 170n$ 。

若 $n = 1$ ，則大於 170 的最小 38 之倍數為 $5 \times 38 = 190$ ，所以 $Z \geq 5$ 。則 $Y = 38Z - 170 \geq 20$ ，因為是一個數碼，故此是不可能的。

若 $n = 2$ ，則大於 340 的最小 38 之倍數為 $9 \times 38 = 342$ ，所以 $38 \times 9 - 2 = 340 = 170n$ 為一個解答，其中 $Z = 9$ 且 $Y = 2$ 。

可知 $10X = 6Z - Y - n = 54 - 2 - 2 = 50$ ，故 $X = 5$ 。

由此得知唯一的解為 $X = 5$ 、 $Y = 2$ 、 $Z = 9$ 。

答：(529)。

解法 3

可知積的個位數碼 Y 為 $8Z$ 的個位數碼。因 $Y \neq 0$ ，故 $Z \neq 5$ 。

而積的十位數碼 Y 等於 $8Y + Z + N$ 的個位數碼，其中 N 為 $8Z$ 的十位數碼，故此時可將 Z 的所有可能值列表如下：

Z	1	2	3	4	6	7	8	9
Y , $8Z$ 的個位數碼	8	6	4	2	8	6	4	2
N , $8Z$ 的十位數碼	0	1	2	3	4	5	6	7
$8Y$ 的個位數碼	4	8	2	6	4	8	2	6
$8Y + Z + N$ 的個位數碼	5	1	7	3	4	0	6	2

僅 $Z = 9$ 時會同時滿足 Y 值與 $8Y + Z + N$ 的個位數碼。

現考慮完整的乘式來求 X ：

$$(100X + 29) \times 18 = 9000 + 100X + 22$$

$$1800X + 522 = 9022 + 100X$$

$$1700X = 8500$$

$$X = 5$$

因此三位數 \overline{XYZ} 為 529。

答：(529)。

30. 令 A 為一個可被 9 整除的 2018 位數，令 B 為 A 的所有數碼相加、 C 為 B 的所有數碼和。請問 C 的所有可能值之總和是什麼？

數 A 可被 9 整除，若且唯若它的數碼和可被 9 整除，所以 B 與 C 也都可被 9 整除。

因為 A 是一個 2018 位數， $B < 2018 \times 9 \leq 19999$ ，所以 $C \leq 1 + 4 \times 9 = 37$ ， C 可能為 9、18、27、36 之一。

每個 C 的這四個值都是可能的，如下表所示：

A	B	C
90000000...0000000	9	9
$\underbrace{9999999999}_{11}00\dots00$	99	18
$\underbrace{9999\dots9999}_{111}00\dots00$	999	27
$\underbrace{9999\dots9999}_{1111}00\dots00$	9999	36

由此可得知 C 的四個可能值之總和為 $9 + 18 + 27 + 36 = 90$ 。

答: (090)。