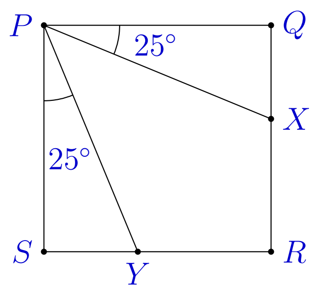
5 Senior paper — draft for traditional chinese translation

高 級 卷

1-10 題，每題 3 分

1. 在右圖中，$PQRS$ 是一個正方形。請問 $\angle XPY$ 的大小是什麼？

(A) $25°$ (B) $30°$ (C) $35°$ (D) $40°$ (E) $45°$



在點 P 上的三個角之和等於 $90°$，所以 $\angle XPY = 90° - 50° = 40°$。

答: (D)。

2. 有一場競走比賽全長 250 km。如果有位選手打算用 8 天走完全程，請問他每天必須大約走多遠？

(A) 15 km (B) 20 km (C) 30 km (D) 40 km (E) 80 km

因為 $8 \times 30 = 240$，所以每天必須走比 30 km 多一點點。

答: (C)。

3. 一個數的一半是 32。請問這個數的兩倍是多少？

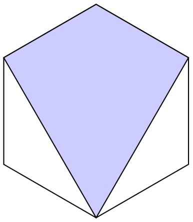
(A) 16　(B) 32　(C) 64　(D) 128　(E) 256

這個數是 64，故它的兩倍為 128。

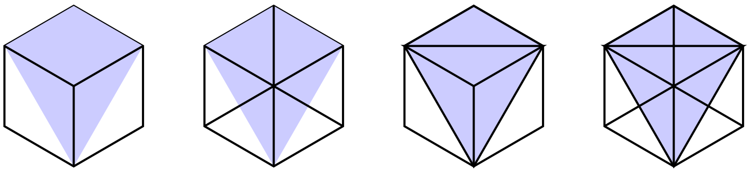
答: (D)。

4. 請問這個正六邊形的幾分之幾被塗上陰影？

(A) $\frac{1}{2}$　(B) $\frac{2}{3}$　(C) $\frac{3}{4}$　(D) $\frac{3}{5}$　(E) $\frac{4}{5}$



有如圖所示許多將正六邊形分割為等面積的方法，由它們都可得知塗上陰影的部分為全部的 $\frac{2}{3}$。



$\frac{2}{3}$　$\frac{4}{6}$　$\frac{4}{6}$　$\frac{8}{12}$

答: (B)。

5. 算式 $9 \times 1.2345 - 9 \times 0.1234$ 之值等於

(A) 9.9999 (B) 9 (C) 9.0909 (D) 10.909 (E) 11.1111

利用分配律，

$$9 \times 1.2345 - 9 \times 0.1234 = 9 \times (1.2345 - 0.1234) = 9 \times 1.1111 = 9.9999$$

答: (A)。

---

6. 請問算式 $2^0 - 1^8$ 之值是什麼？

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 10

$2^0 = 1$ 且 $1^8 = 1$，故 $2^0 - 1^8 = 0$。

答: (A)。

---

7. 一個數的 1000% 等於 100，請問這個數是什麼？

(A) 0.1 (B) 1 (C) 10 (D) 100 (E) 1000

因為 $1000\% = 10 \times 100\%$，一個數的 1000% 即為這個數的十倍。
因此一個數的 10 倍等於 100，即這個數是 10。

答: (C)。

---

8. 餵養四隻狗三天的伙食費為 \$60。若每天每隻狗的伙食費都相同，請問餵養七隻狗七天的伙食費為多少？

(A) \$140 (B) \$200 (C) \$245 (D) \$350 (E) \$420

餵養 4 隻狗一天的伙食費為 $\$60 \div 3 = \$20$，因此餵養 1 隻狗 1 天的伙食費為 $\$20 \div 4 = \$5$。

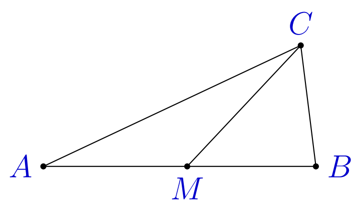
所以餵養 7 隻狗 7 天的伙食費為 $\$5 \times 7 \times 7 = \$245$。

答: (C)。

---

9. 在三角形 ABC 中，點 M 是 AB 的中點。

請問下列哪一項內的敘述為真？

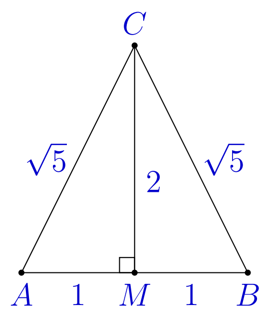


(A) $\angle CAM = \angle ACM$ (B) $\angle CMB = 2\angle CAM$

(C) $AC = 2\,BC$ (D) $CM = BC$

(E) $\triangle AMC$的面積 $= \triangle MBC$的面積

其中四個敘述透過適當選擇一個例子可以剔除。



假設 $AM = MB = 1$、$MC = 2$ 且 $AB \perp MC$，如圖所示。則由勾股定理知 $AC = BC = \sqrt{5}$。這樣可以剔除 (C) 與 (D)。

同時，$AM \neq CM$，故 $\triangle ACM$ 不是等腰三角形，則 $\angle CAM \neq \angle ACM$，因此 (A) 是錯的。

同時 $2\angle CAM > 2 \times 45^\circ = \angle CMB$，故 (B) 也是錯的。

而 (E) 恆為真，因為 $\triangle AMC$ 與 $\triangle MBC$ 的底等長，它們有相同的高。

答: (E)。

10. 從 1 到 100 的總和為 5050。請問從 101 到 200 的總和為多少？

(A) 15 050 (B) 50 500 (C) 51 500 (D) 150 500 (E) 505 000

$1+2+\cdots+100$ 與 $101+102+\cdots+200$ 之差為 $100\times 100 = 10000$。所以 $101+102+\cdots+200 = 5050+10000 = 15050$。

答: (A)。

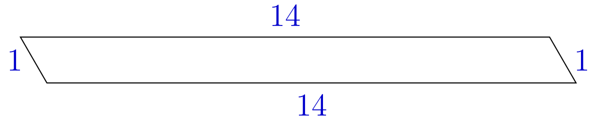
11-20 題，每題 4 分

11. 小蕾有一些全等的正三角形形狀的瓷磚。要將這些瓷磚連成一長列 (以邊對邊) 使得此即將構造出的形狀之周長為原來單片瓷磚周長的十倍，請問共需要多少片瓷磚？

(A) 14 (B) 20 (C) 25 (D) 28 (E) 30

解法 1

令三角形瓷磚之邊長為 1 單位，則這一長列瓷磚的周長為 30 單位。為了拼成一長列，它將如下圖分割為 $30 = 14 + 1 + 14 + 1$。



故共有 28 個三角形，14 個朝上且 14 個朝下。

答: (D)。

解法 2

共有 $10 \times 3 = 30$ 個三角形的邊在周長上。

若在一長列上有 n 個三角形，則共有 $3n$ 條三角形的邊。但有些邊是用來連接的。這些三角形排成一長列，故有 $n - 1$ 個連接處，每處必須用掉 2 條邊，所以周長為 $3n - 2(n - 1) = n + 2$ 條邊。

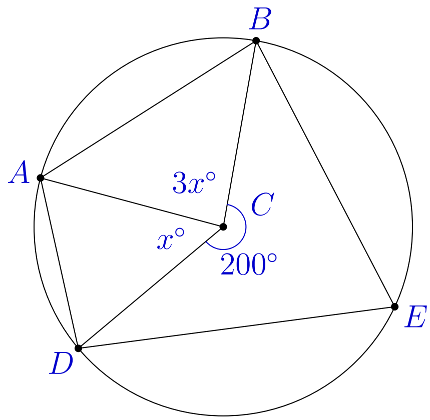
解 $n + 2 = 30$，我們可推導出共需要 28 片瓷磚。

答: (D)。

12. 在如圖所示的圓中，點 C 是圓心，點 A、B、D、E 全部都在圓周上。

優角 $\angle BCD = 200^\circ$、$\angle DCA = x^\circ$、$\angle BCA = 3x^\circ$，如圖所示。

請問 $\angle DAC : \angle BAC$ 之比是什麼？



(A) $3:1$ (B) $5:2$ (C) $8:3$ (D) $7:4$ (E) $7:3$

因為 $x + 3x + 200 = 360$，$x = 40$。

$\triangle ACD$ 是等腰，其中 $\angle ACD = 40^\circ$ 且 $\angle DAC = \angle CDA$。可知 $180^\circ = 40^\circ + 2\angle DAC$，故 $\angle DAC = 70^\circ$。

同理，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC = \angle ABC = \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$。

因此 $\angle DAC : \angle BAC = 70^\circ : 30^\circ = 7:3$。

答: (E)。

13. 欲將一個數乘以 4 再減去 330，有位粗心的小朋友將這個數除以 4 再加上 330。非常幸運地，他竟得出正確的答案。請問原來的數是什麼？

(A) 220 (B) 990 (C) 144 (D) 374 (E) 176

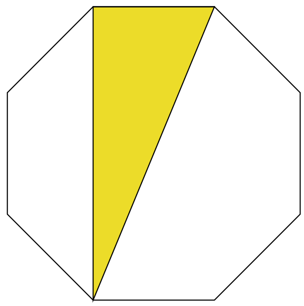
- -

令這個數為 x，則

$$\begin{aligned} 4x - 330 &= \frac{x}{4} + 330 \\ 16x - 4 \times 330 &= x + 4 \times 330 \\ 15x &= 8 \times 330 \\ x &= 8 \times 330 \div 15 = 8 \times 22 = 176 \end{aligned}$$

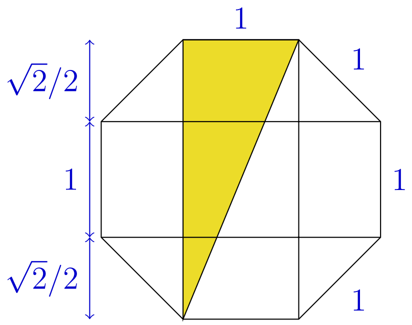
答: (E)。

14. 右圖所示為一個邊長為 1 m 的正八邊形。請問圖中塗上陰影部分的面積為多少 m^2？



(A) 1　(B) $\sqrt{2}$　(C) 2　(D) $3-\sqrt{2}$　(E) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

用水平線及鉛垂線將此八邊形如下圖方式切割，並用直角等腰三角形各邊之比例找出水平線之間的距離。



故塗上陰影部分的三角形之底為 1 m，高為 $1+\sqrt{2}$ m，
所以其面積為 $\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{2})$ m^2。

答: (E)。

15. 一位教練計劃為 P 隊與 W 隊的隊員舉辦火車旅遊。

由於 P 隊與 W 隊住在不同的城市，所以不同隊的隊員之火車票價不相同。用相同的車費，這位教練可以安排 6 位 P 隊與 7 位 W 隊的隊員，或者 8 位 P 隊與 4 位 W 隊的隊員。

用相同的車資，若這位教練只安排 W 隊的隊員去旅遊，請問共可安排多少位？

(A) 11 (B) 13 (C) 16 (D) 20 (E) 25

- -

解法 1

由題設可知，將 2 位 P 隊的隊員與 3 位 W 隊的隊員對調並不改變車資。

由此可知，從原來 6 位 P 隊與 7 位 W 隊的隊員開始，教練可將 6 位 P 隊的隊員換成 9 位 W 隊的隊員。所以他可以只安排 16 位 W 隊的隊員去旅遊。

答: (C)。

解法 2

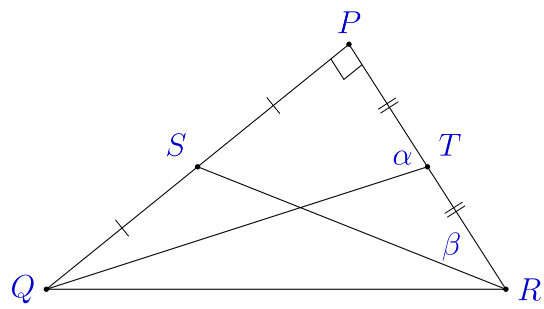
若票價分別為 p 與 w 且總車資為 C，則

$$\begin{aligned} C &= 6p + 7w \\ C &= 8p + 4w \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4C &= 24p + 28w \\ 3C &= 24p + 12w \\ 4C - 3C &= 24p + 28w - 24p - 12w \\ C &= 16w \end{aligned}$$

此即，用車資 C 教練可以安排 16 位 W 隊的隊員去旅遊。

答: (C)。

16. 直角三角形 PQR 的直角頂點為 P 點，如圖所示。點 T 與 S 分別為邊 PR 與 PQ 的中點。若 $\angle QTP = \alpha$、$\angle SRP = \beta$，請問 $\tan\alpha : \tan\beta$ 等於什麼？



(A) $3:1$ (B) $4:1$ (C) $5:1$ (D) $7:2$ (E) $9:2$

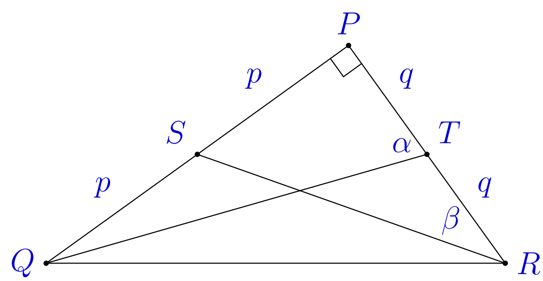
- -

令 $PS = SQ = p$、$PT = TR = q$。

則 $\tan\alpha = \dfrac{2p}{q}$ and $\tan\beta = \dfrac{p}{2q}$。

故

$$\tan\alpha : \tan\beta = \frac{2p}{q} : \frac{p}{2q} = 4:1,$$



答: (B)。

---

17. 投擲三枚公平的正六面體骰子。請問投擲出的三個點數為三個連續的數之機率是多少？

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{9}$ (C) $\frac{1}{27}$ (D) $\frac{7}{36}$ (E) $\frac{1}{54}$

- -

三枚骰子是不相同的個體，其樣本空間為機率相同的 $6^3 = 216$ 種可能性。

有四種可能的連續數：123、234、345、456。每個數在樣本空間中出現 6 次，故所求之機率為 $\dfrac{24}{216} = \dfrac{1}{9}$。

答: (B)。

18. 請問數 20^{18} 是幾位數？

(A) 24 (B) 38 (C) 18 (D) 36 (E) 25

- -

我們可以找近似值 $20^{18} = 2^{18} \times 10^{18} = 2^8 \times 2^{10} \times 10^{18} \approx 200 \times 10^3 \times 10^{18} = 2 \times 10^{23}$，它是個 24 位數。此指出 20^{18} 是 24 位數。

更正式地，$2^{18} = 2^8 \times 2^{10} > 100 \times 1000 = 10^5$ 而 $2^{18} = 2^9 \times 2^9 < 1000 \times 1000 = 10^6$。故 $10^{23} < 20^{18} < 10^{24}$，所以 20^{18} 為 24 位數。

答: (A)。

註： $20^{18} = 262\,144\,000\,000\,000\,000\,000\,000$

19. 在以下減式中，第一個數有 100 個數碼、第二個數有 50 個數碼。

$$\underbrace{111\ldots\ldots111}_{100\text{ 位數}} - \underbrace{222\ldots222}_{50\text{ 位數}}$$

請問所得結果的數碼和是多少？

(A) 375 (B) 420 (C) 429 (D) 450 (E) 475

解法 1
由一些簡單的情況開始：

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & 2 & 2 & 2 & 2 & - \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 8 & 8 & 8 & 9 & \end{array}$$

數碼和 $= 3\times 1 + 3\times 8 + 9 = 36$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & - \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 9 & \end{array}$$

數碼和 $= 4\times 1 + 4\times 8 + 9 = 45$

繼續這樣型式，我們可以將它推廣。則全部的數碼和為 $49\times1+0+49\times8+9 = 450$。

答: (D)。

解法 2

$$\begin{aligned}
\underbrace{111\ldots111}_{100} - \underbrace{222\ldots222}_{50} &= \underbrace{111\ldots111}_{100} - \underbrace{111\ldots111}_{50} - \underbrace{111\ldots111}_{50} \\
&= \underbrace{111\ldots111}_{50}\underbrace{000\ldots000}_{50} - \underbrace{111\ldots111}_{50} \\
&= \underbrace{111\ldots110}_{50}\underbrace{999\ldots999}_{50} - \underbrace{111\ldots110}_{50} \\
&= \underbrace{111\ldots110}_{50}\underbrace{888\ldots889}_{50}
\end{aligned}$$

在這個數的數碼和中，我們可以把 $1+8$ 配對，得到 $50\times 9 = 450$。

答: (D)。

20. 我有兩個正多邊形，其中大的多邊形比小的多邊形多 5 條邊。兩個多邊形的內角相差 $1°$。請問大的多邊形有幾條邊？

(A) 30 (B) 40 (C) 45 (D) 50 (E) 60

解法 1

令較小的多邊形有 n 條邊，故大的多邊形有 $n+5$ 條邊。

一個正 n 邊形的內角和為 $(n-2)\times 180°$，它的一個內角為 $\dfrac{180(n-2)}{n}^{\circ}$。則

$$\begin{aligned}
\frac{180[(n+5)-2]}{n+5}-\frac{180(n-2)}{n}&=1\\
180\left(\frac{n+3}{n+5}-\frac{n-2}{n}\right)&=1\\
180\left(\frac{n(n+3)-(n-2)(n+5)}{n(n+5)}\right)&=1\\
180(n^2+3n-n^2-3n+10)&=n^2+5n\\
n^2+5n-1800&=0\\
(n-40)(n+45)&=0
\end{aligned}$$

因為 n 為正值，故 $n=40$。所以較大的多邊形有 $n+5=45$ 條邊。

答: (C)。

解法 2

令大的與小的多邊形之外角分別為 $\theta°$ 與 $(\theta+1)°$，則多邊形分別有 $\dfrac{360}{\theta}$ 與 $\dfrac{360}{\theta+1}$ 條邊。故

$$\begin{aligned}
5+\frac{360}{\theta+1}&=\frac{360}{\theta}\\
5\theta(\theta+1)+360\theta&=360(\theta+1)\\
5(\theta+9)(\theta-8)&=0
\end{aligned}$$

因為 $\theta>0$，我們有 $\theta=8$，故較大的多邊形有 $\dfrac{360}{8}=45$ 條邊。

答: (C)。

解法 3
令大的與小的多邊形分別有 $n+5$ 與 n 條邊，因為任意多邊形的外角都等於 $360°$。則

$$\begin{aligned}\frac{360}{n}-\frac{360}{n+5}&=1\\ \frac{5\times 360}{n(n+5)}&=1\\ n(n+5)&=1800\\ n^2+5n-1800&=(n+45)(n-40)\end{aligned}$$

因為 n 為正值，故 $n=40$。所以較大的多邊形有 $n+5=45$ 條邊。

答: (C)。

21-25 題，每題 5 分

21. 已知 m、n 為整數。請問方程 $n=\sqrt{100-m^2}$ 有多少組解 (m,n)？

(A) 4 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 10

- -

因為 $n=\sqrt{100-m^2}$，我們可知 $100-m^2\geq 0$，故 $m^2\leq 100$ 且 $-10\leq m\leq 10$。同時 $100-m^2$ 是一個完全平方數，經分別檢驗可能值 $m^2=0^2$、1^2、$\cdots$、10^2 的可能的數對 (m,n) 為

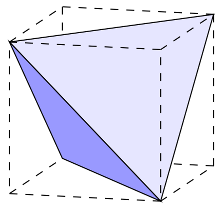
$$(\pm 10,0)\text{ 、}(\pm 8,6)\text{ 、}(\pm 6,8)\text{ 、}(0,10)$$

故可能的解 (m,n) 共有 7 組。

答: (C)。

---

22. 一個正四面體內接於一個邊長為 2 的正立方體，如圖所示。請問這個正四面體的體積是什麼？



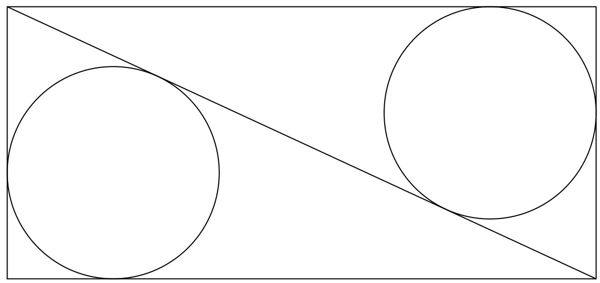
(A) $\frac{8}{3}$ (B) 4 (C) $\frac{16}{3}$ (D) $\sqrt{6}$ (E) $8-2\sqrt{2}$

這個正四面體可以由一個正六面體切除 4 個三角錐而得到。每一個這樣的三角錐的底面積為 2、高為 2、體積為 $\frac{4}{3}$。

故這個正四面體的體積為 $8-4\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$。

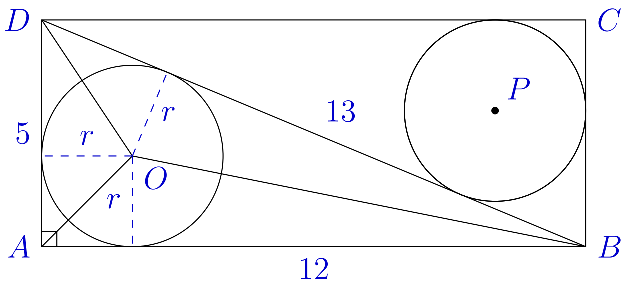
答: (A)。

23. 一個邊長為 5 單位 ×12 單位的矩形。
畫出其中一條對角線，然後在兩個三角形內畫出最大可能的內接圓。
請問這兩個圓的圓心之距離為多少單位？

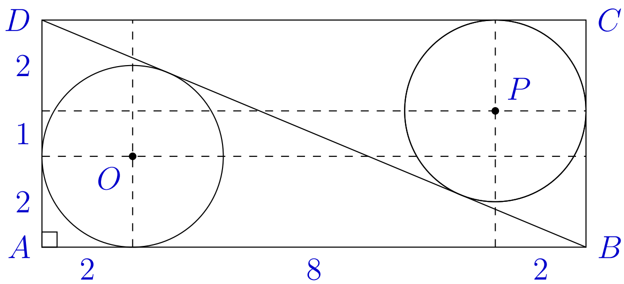


(A) $\sqrt{60}$ (B) 8 (C) $\sqrt{65}$ (D) $\sqrt{68}$ (E) 9

此矩形的對角線為 $\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=13\,\text{cm}$。



為求圓的半徑，注意到 $\triangle ADB$ 的面積為 30，它等於 $\triangle AOB$、$\triangle DOA$、$\triangle BOD$ 的面積總和，它們是 $\frac{12r}{2}+\frac{5r}{2}+\frac{13r}{2}=15r$，故 $r=2$。
我們可以用水平線與鉛垂線分割此矩形：



由勾股定理可得知 $OP=\sqrt{8^2+1^2}=\sqrt{65}$。

答: (C)。

24. 方程 $\underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots\sqrt{256}}}}_{60} = 2^{(8^x)}$，請問 x 之值為何？

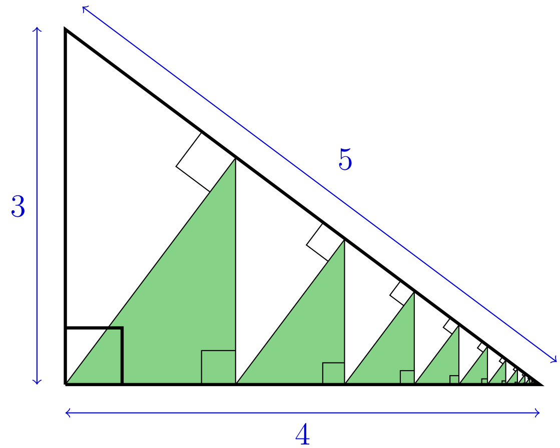
(A) -17 (B) -19 (C) -21 (D) -23 (E) 16

$$\underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots\sqrt{256}}}}_{60} = (\cdots((2^8)\underbrace{^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\cdots)^{\frac{1}{2}}}_{60}$$
$$= 2^{8\cdot(1/2)^{60}}$$
$$= 2^{2^{-57}}$$
$$= 2^{(2^3)^{-19}}$$
$$= 2^{8^{-19}}$$

答: (B)。

25. 一個邊長為 3、4、5 的直角三角形是由無限多個直角三角形所拼成的，如圖所示。

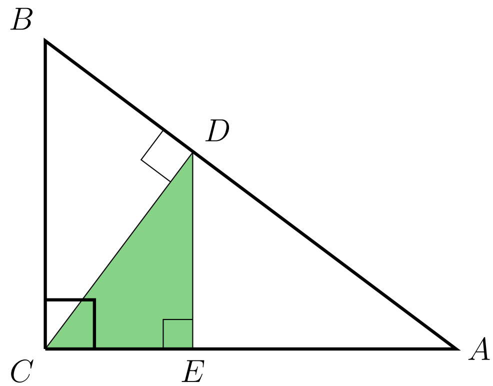
請問圖中塗上陰影部分的面積是什麼？



(A) $\frac{18}{7}$ (B) $\frac{54}{25}$ (C) $\frac{8}{3}$

(D) $\frac{27}{17}$ (E) $\frac{96}{41}$

解法 1



將原來的三角形及首二個三角形標記如圖所示。注意到所有三角形都相似，它們有一個角為直角及一個相同的鋭角。我們首先求出在梯形 $BDCE$ 中有幾分之幾被塗上陰影。

相似 $\triangle ABC$、$\triangle CBD$、$\triangle DCE$ 顯示出 $\frac{DE}{DC} = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5}$，故 $\triangle DCE$ 之面積為 $\triangle CBD$ 面積之 $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$。即 $\triangle DCE$ 為梯形 $BDCE$ 面積之 $\frac{16}{41}$ 倍。

接下來任何一對三角形構成的梯形 (其中白色三角形較大) 也都具有這樣相同的比例。更進一步，$\triangle ABC$ 包括一系列這樣的梯形。

由此可得知塗上陰影部分的面積佔 $\triangle ABC$ 面積之 $\frac{16}{41}$。即塗上陰影部分的面積為

$$\frac{16}{41} \times 6 = \frac{96}{41}$$

答: (E)。

解法 2

假設塗上陰影部分的面積為 x，則未塗色面積為 $6-x$。

最左側未塗色的三角形相似於整個面積為 6 的三角形，但其斜邊為 3 而不是 5。所以最左側三角形之面積為 $\left(\frac{3}{5}\right)^2 \times 6 = \frac{54}{25}$。

移除最左側的三角形留下面積為 $6-\frac{54}{25}=\frac{96}{25}$ 的三角形，其中有 x 被塗色、$\frac{96}{25}-x$ 未塗色。此三角形相似於原來的三角形，但是塗色相反。由此可得知原來三角形中未塗色與塗色的面積比與移除最左側三角形後塗色與未塗色的面積比，即：

$$\begin{aligned}
\frac{6-x}{x} &= \frac{x}{\frac{96}{25}-x} \\
x^2 &= (6-x)(\frac{96}{25}-x) \\
25x^2 &= (6-x)(96-25x) = 25x^2-246x+576 \\
x &= \frac{576}{246} = \frac{96}{41}
\end{aligned}$$

答: (E)。

解法 3

在這一無限系列的三角形 (白色、塗色、白色、$\cdots$) 中，每個三角形都與邊長比為 3：4：5 的三角形相似。經由比較它們的邊，每個的面積都是前一個面積的 $r=\frac{16}{25}$。此即，它們的面積形成一個等比數列：

$$6 = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1-r}$$

對於一個一般的幾何級數 $S = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots$，分別考慮偶數指數與奇數指數的項：

$$A = a + ar^2 + ar^4 + \cdots \qquad \text{與} \qquad B = ar + ar^3 + ar^5 + \cdots$$

則 $B = rA$、$A+B=S$。所以 $A=\frac{1}{1+r}S$ 且 $B=\frac{r}{1+r}S$。

在此題目中，塗上陰影部分三角形面積表示為上述的級數 B，其中 $S=6$、$r=\frac{16}{25}$，故有

$$B=\frac{r}{1+r}S=\frac{\frac{16}{25}}{\frac{41}{25}}\times 6=\frac{96}{41}$$

答: (E)。

問題 26-30 的答案為 000-999 之間的整數，
請將答案填在答案卡上對應的位置。

第 26 題占 6 分，第 27 題占 7 分，第 28 題占 8 分，
第 29 題占 9 分，第 30 題占 10 分。

---

26. 令 A 為一個可被 9 整除的 2018 位數，令 B 為 A 的所有數碼相加、C 為 B 的所有數碼和。請問 C 的所有可能值之總和是什麼？

- -

數 A 可被 9 整除，若且唯若它的數碼和可被 9 整除，所以 B 與 C 也都可被 9 整除。

因為 A 是一個 2018 位數，$B < 2018 \times 9 \leqslant 19999$，所以 $C \leqslant 1 + 4 \times 9 = 37$，$C$ 可能為 9、18、27、36 之一。

每個 C 的這四個值都是可能的，如下表所示：

A	B	C
$90000000\ldots0000000$	9	9
$\underbrace{99999999999}_{11}00\ldots00$	99	18
$\underbrace{9999\ldots9999}_{111}00\ldots00$	999	27
$\underbrace{9999\ldots9999}_{1111}00\ldots00$	9999	36

由此可得知 C 的四個可能值之總和為 $9 + 18 + 27 + 36 = 90$。

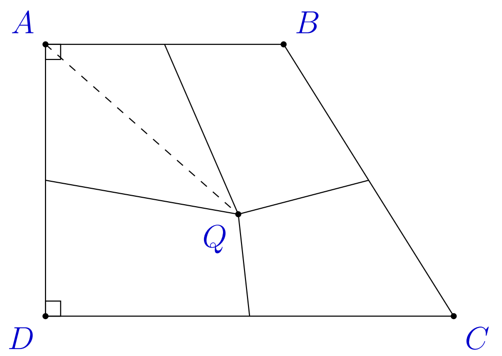
答: (090)。

---

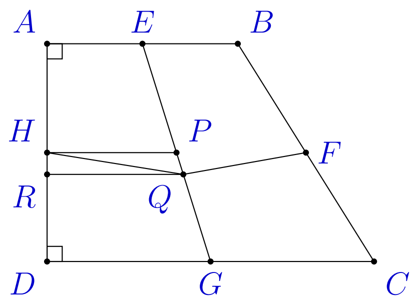
27. 在梯形 $ABCD$ 中，$AB=100$、$BC=130$、$CD=150$、$DA=120$ 且在點 A、點 D 處為直角。

將內點 Q 與 4 個邊的中點相連所構成的四個四邊形之面積相等。

請問 AQ 的長度是什麼？



梯形 $ABCD$ 的面積為 $\frac{120}{2}\times(100+150)=15000$，所以每個小四邊形之面積為 3750。



令各邊中點分別為 E、F、G、H，如圖所示。令 R 為從 Q 向 AD 所做垂線之垂足。EG 平分此梯形，所以點 Q 必須在 EG 上。

令點 P 為 EG 的中點，則 $AEPH$ 是個梯形，其中 $AE=50$、$AH=60$、$HP=\frac{125}{2}=62.5$。故 $AEPH$ 之面積為 $\frac{60}{2}\times(50+62.5)=3375$。由此得知 $\triangle HPQ$ 之面積為 $3750-3375=375$。

令 $HR=h$ 為 $\triangle HPQ$ 的高，則

$$375=\frac{1}{2}\times\frac{125}{2}h \implies h=12$$

則 $AR=60+12=72$ 且 $RQ=50+72\times\frac{25}{120}=65$。再由勾股定理知 $AQ=\sqrt{65^2+72^2}=\sqrt{9409}=97$

答: (097)。

28. 小東有一雙藍色的鞋子、一雙紅色的鞋子、一雙白色的鞋子。他打算將這六隻鞋緊靠在一起排成一列。然而，小東希望同一雙的左腳鞋子在右腳鞋子左側的某處。請問小東共有多少種方法排列這些鞋子？

解法 1

若我們先忽略我們希望每一雙鞋子出現正確的順序，共有 $6\times5\times4\times3\times2\times1=720$ 種方法將這六隻鞋子排成一列。這些排列中的一半會是藍色鞋子依正確順序排列，而這些排列中的一半會是紅色鞋子依正確順序排列，同時這些排列中的一半會是白色鞋子依正確順序排列。所以小東共有 $720\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=90$ 種方法完成任務。

答: (090)。

解法 2

從兩隻藍色鞋子 B_L 與 B_R 排成一列開始。

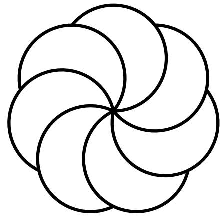
接著放入兩隻紅色鞋子 R_L 與 R_R，使得 4 隻鞋子排成一列，其中二隻為紅色鞋子。共有 $\binom{4}{2}=6$ 種方法達成。

最後放入兩隻白色鞋子 W_L 與 W_R，它共有 $\binom{6}{2}=15$ 種方法完成。

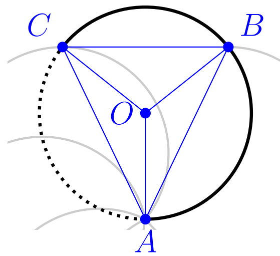
所以小東總共有 $6\times15=90$ 種方法完成任務。

答: (090)。

29. 對於 $n \geq 3$，用 n 個圓周長為 1 單位互相重疊的圓可構造一個圖案，每個圓都通過一個中心點，最後得到的圖案具有 n 階旋轉對稱。
例如，右圖所示的為 $n = 7$ 的這種圖案。
若可看見的弧之總長度為 60 單位，請問 n 等於多少？



令點 A 為圖案的中心，則每個圓有一個圓心 O 且有一個如圖所示的等腰三角形 ABC。故



$$\angle BAC = \frac{360^\circ}{n}$$

$$\angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right) = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}$$

$$\angle AOC = 2\angle ABC = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

因此優角 $AOC = 180^\circ + \frac{360^\circ}{n} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) \times 360^\circ$。由此可知可看見的弧佔此圓的 $\frac{1}{2} + \frac{1}{n}$，即此弧長為 $\frac{1}{2} + \frac{1}{n}$。
可看見的弧之總長度為 $n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) = \frac{n}{2} + 1 = 60$。所以 $\frac{n}{2} = 59$，即 $n = 118$。

答: (118)。

30. 考慮一個已經填入數 1、2、⋯、n^2 的 $n \times n$ 方格表，表內的數由左至右、由上至下漸大。一次**重組**包括以下二個步驟：

- 將每一小方格內的數向右移動一格。在每一列末端的數則移動到下一列最前端的位置，在右下角的數則移到左上角的位置。
- 接著將每一小方格內的數向下移動一格。在每一行最底下的數則移到下一行最頂端的位置，在右下角則移到左上角的位置。

如圖所示是一個 3×3 方格表的例子。請注意這兩個所示的步驟視為一次重組。

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array} \xmapsto[\text{移}]{\text{右}} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 9 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 6 & 7 & 8 \\ \hline \end{array} \xmapsto[\text{移}]{\text{下}} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 8 & 6 & 7 \\ \hline 9 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 & 5 \\ \hline \end{array}$$

請問需要重組超過 20000 次才能使 $n \times n$ 方格表內的所有數回到原來位置的最小值 n 是什麼？

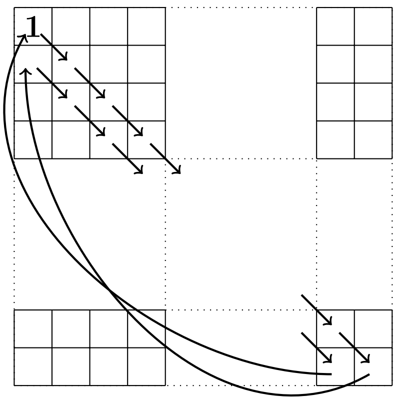
- -

考慮在 $n \times n$ 方格表左上角的數 1。經過一次重組它向右移一格且向下移一格。同理，經過第二次改組，它進一步移到右下的方格內。這樣繼續下去直到經過總共 $n-1$ 次重組後抵達右下角的方格內。接著再一次重組將數 1 送到最右一行在左上角下方的方格內。接下來的 $n-2$ 次重組繼續將它向右與向下直到抵達最底下一列在右下角方格左側的方格內。接著再一次重組將數 1 送回左上角的方格內。
所以它總共需要

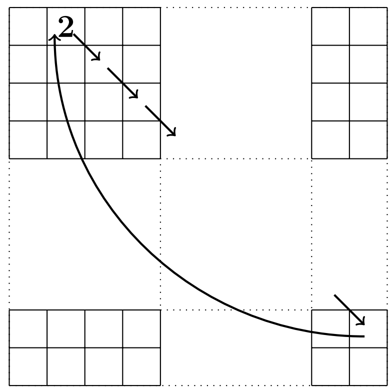
$$(n-1)+1+(n-2)+1 = 2n-1$$

次重組才能使 1 回到原來的位置，如下左圖所示。從這條路徑上開始的其它每一

個數也將依照此方式循環，故經過 $2n-1$ 次重組後，它們也都將回到初始位置。



經過每次重組後 1 的路徑



經過每次重組後 2 的路徑

同理，數 2 的移動路徑如上右圖所示。經過 $n-2$ 次重組後它將抵達最後一行在右下角正上方的方格內，下一次重組將經由左下角的方格送它回到原來的位置。
所以它總共需要

$$(n-2)+1=n-1$$

次重組才能使 2 回到原來的位置。同樣地從這條路徑上開始的其它每一個數也是如此。用相似的分析可得知方格表上其它的數也用 $n-1$ 次重組可回到初始的位置。
因此需要 $\mathrm{lcm}(2n-1,n-1)$ 次重組可以使所有的數都回到它們的初始位置。因為 $2n-1$ 與 $n-1$ 沒有 1 以外的公因數，所以真正所需重組的次數為 $S=(2n-1)(n-1)$。
為找超過 20000 的 S 值，為便於求它的近似值可只用簡單些的表達式 $2n^2$。所以

$$2n^2 \approx 20000$$
$$n^2 \approx 10000$$
$$n \approx 100$$

若 $n=100$，則 $S=199\times 99<20000$；若 $n=101$，則 $S=201\times 100=20100$。

答: (101)。