

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2011 年青少年數學國際城市邀請賽
參賽代表遴選初賽
個人競賽試題

編號: _____ 姓名: _____ 校名: _____ 國中

作答時間: 二 小 時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請將答案直接填入各題預留空白處，不須列出計算過程)

1. 187^{2011} 之值的個位數為_____。

【解】

因所求為個位數之值，故觀察 7 的次方之個位數變化。因 7^1 的個位數為 7、 7^2 的個位數為 9、 7^3 的個位數為 3、 7^4 的個位數為 1，故 7 的次方之個位數從 1 次方開始，是依序以 7、9、3、1 這四個數為週期循環出現。因 $2011=4\times 502+3$ ，故 187^{2011} 之值的個位數為 7、9、3、1 中的第三個數，即為 3。

答：3

2. 從 7, 14, 21, 開始，把 7 的倍數依次連接在一起寫下去，一直寫到 1001，成為一個很大的數：71421...9941001，則這個數是_____位數。

【解】

因 $1001=7\times 143$ ，故觀察 7 的 1 倍至 7 的 143 倍各個數的位數變化。

一位數：僅 $7\times 1=7$ 這 1 個數，共 1 位；

二位數：從 $7\times 2=14$ 至 $7\times 14=98$ 共 13 個數，合計 26 位；

三位數：從 $7\times 15=105$ 至 $7\times 142=994$ 共 128 個數，合計 384 位；

四位數：僅 $7\times 143=1001$ 這 1 個數，共 4 位；

因此所寫出的數為 $1+26+384+4=415$ 位數。

答：415 位數

3. 設長方形的長增加其長度的 $\frac{1}{10}$ ，若面積不變，則長方形的寬所減少的長度與原來的寬之比為_____。

【解】

面積不變即為長與寬的乘積是定值。當長增加其長度的 $\frac{1}{10}$ 時，即增為原長度的

$\frac{11}{10}$ ，故寬須縮短為原長度的 $\frac{10}{11}$ ，即需減少 $\frac{1}{11}$ ，故所求之比為 $\frac{1}{11} : 1 = 1 : 11$ 。

答：1 : 11

4. 設 x 、 y 為正整數，則滿足方程式 $\frac{5}{2x} + \frac{2}{5y} = \frac{1}{100}$ 的所有數對 (x, y) 共有 _____ 組。

【解】

$$\frac{5}{2x} + \frac{2}{5y} = \frac{1}{100} \Leftrightarrow 250y + 40x = xy \Leftrightarrow x = \frac{250y}{y-40} = 250 + \frac{10000}{y-40}, \text{ 因此 } x \text{ 為正整數}$$

的條件為 $y-40$ 為 10000 的正因數。因 $10000 = 2^4 \times 5^4$ ，故知 10000 共有 $(4+1) \times (4+1) = 25$ 個正因數，因此數對 (x, y) 共有 25 組。

答：25 組

5. 已知 x, y, z 滿足

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 10 \end{cases}$$

則 $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} =$ _____。

【解一】

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4 - z \\ x^2 + y^2 = 6 - z^2 \\ x^3 + y^3 = 10 - z^3 \end{cases}$$

故 $xy = \frac{(x+y)^2 - (x^2 + y^2)}{2} = 5 - 4z + z^2$ 。因 $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 + y^2 - xy)$ ，故可得

$10 - z^3 = (4 - z)((6 - z) - (5 - 4z + z^2))$ ，化簡後可得 $(z-1)(2z^2 - 5z + 6) = 0$ ，故知

$z=1$ ，因此知 $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$ ，故可得 $2 = xy = x(3-x) \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0$ ，即知 $x=1$ 、

$y=2$ 或 $x=2, y=1$ 。因此 $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 1 + \frac{1}{4} + 1 = 2\frac{1}{4}$ 。

【解二】

$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \Rightarrow 16 = 6 + 2(xy + yz + zx)$ ，故知：

$$xy + yz + zx = 5$$

$$(x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2) = x^3 + y^3 + z^3 + xy^2 + xz^2 + yx^2 + yz^2 + zx^2 + zy^2$$

$$= x^3 + y^3 + z^3 + (x+y+z)(xy + yz + zx) - 3xyz$$

故知：

$$4 \times 6 = 10 + 4 \times 5 - 3xyz \Rightarrow xyz = 2$$

$$\text{因此 } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2}{x^2 y^2 z^2} = \frac{(xy + yz + zx)^2 - 2xyz(x+y+z)}{(xyz)^2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

答：2 $\frac{1}{4}$

6. 設 x, y 與 z 為正整數，並計算它們的倒數和；接著將這三個正整數 x, y 與 z 依序分別加上 1、2 與 3 後，再計算它們的倒數和。請問經過這樣操作之後，倒數和之差的最大值是_____。

【解】

此即為計算 $(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) - (\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+3})$ 的最大值。

因 $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$ 、 $\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2} = \frac{2}{y(y+2)}$ 、 $\frac{1}{z} - \frac{1}{z+3} = \frac{3}{z(z+3)}$ ，故知

$(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) - (\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+3})$ 為遞減函數，因此最大值發生在 $x=y=z=1$ 時，

其值為 $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{23}{12}$ 。 答： $\frac{23}{12}$

7. 已知一正整數加上 37 後為一完全平方數，而此正整數減去 36 仍為一個完全平方數，則此正整數為_____。

【解】

令此正整數為 a ，且 $a+37=A^2$ 、 $a-36=B^2$ ，故知 $A^2-B^2=37+36=73$ ，即 $(A+B)(A-B)=73$ 。因 73 為質數，故知 $A+B=73$ 、 $A-B=1$ ，解之可得 $A=37$ 、 $B=36$ ，故 $a=37^2-37=36^2+36=1332$ 。

答：1332

8. 設 $N = \underbrace{66\cdots65}_{2011\text{個}6} \times \underbrace{133\cdots3}_{2012\text{個}3}$ ，則 N 的最後五個數碼為_____。

【解】

因所求為 N 的最後五個數碼，故考慮乘數與被乘數的最後五碼相乘所得之積，即考慮 66665×33333 。因 $66665 \times 3 = 199995$ ，故 $66665 \times 33333 = 199995 + 199950 + 19999500 + 199995000 + 1999950000$ ，即其最後五個數碼為 44445

答：44445

9. 已知 a 及 $\frac{a^3+25}{a+5}$ 均為正整數，則 a 的最大值為_____。

【解】

因為 $\frac{a^3+25}{a+5} = a^2 - 5a + 25 - \frac{100}{a+5}$ ，故知 $\frac{a^3+25}{a+5}$ 為正整數的必要條件為 $\frac{100}{a+5}$ 是整數，即 $a+5$ 為 100 的因數。因所求為 a 的最大值，即可知其發生於 $a+5=100$ 時，此時 $a=95$ 、 $\frac{a^3+25}{a+5} = 8574$ 。

答：95

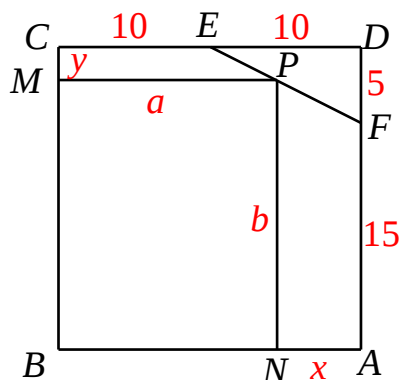
10. 設 x 、 y 為正整數，則滿足方程式 $x^2y^3=6^{12}$ 的所有數對 (x, y) 共有_____組。

【解】

因 $6^{12} = 2^{12} \times 3^{12}$ 且 2 與 3 為互質，故 2^{12} 與 3^{12} 必分別都是一個完全平方數與一個完全立方數的乘積。因 $p^{12} = (p^0)^2(p^4)^3 = (p^3)^2(p^2)^3 = (p^6)^2(p^0)^3$ 共有 3 種情況，所以合計有 $3 \times 3 = 9$ 組正整數解。

答：9 組

11. 如右圖，邊長為 20 的正方形 $ABCD$ 截去一角成為五邊形 $ABCEF$ ，其中 $DE=10$ ， $DF=5$ ；若點 P 在線段 EF 上使矩形 $PMBN$ 有最大面積時，則 PE 的長度為_____。



【解一】

可令 $PM=a$ 、 $PN=b$ 、 $CM=y$ 、 $AN=x$ 。則知 $10 \leq a \leq 20$ 、 $15 \leq b \leq 20$ 、 $a+x=b+y=20$ ，即 $x=20-a$ 、 $y=20-b$ 。且由矩形 $PMBN$ 的面積可得以下等式：

$$\begin{aligned} ab &= 20^2 - \frac{1}{2}y(a+10) - \frac{1}{2}x(b+15) - \frac{1}{2} \times 5 \times 10 \\ &= 375 - \frac{1}{2}((20-b)(a+10) + (20-a)(b+15)) \\ &= 125 - \frac{5}{2}a - 5b + ab \end{aligned}$$

此等價於 $a+2b=50$ ，即 $a=50-2b$ 。故知矩形 $PMBN$ 的面積為

$$ab = b(50-2b) = -2(b - \frac{25}{2})^2 + 2 \times (\frac{25}{2})^2$$

此函數最大值發生在 $b = \frac{25}{2} < 15$ 。但因 $15 \leq b \leq 20$ ，故知矩形 $PMBN$ 有最大面積

發生於 $b=15$ ，此時 $PE = EF = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$ 。

【解二】

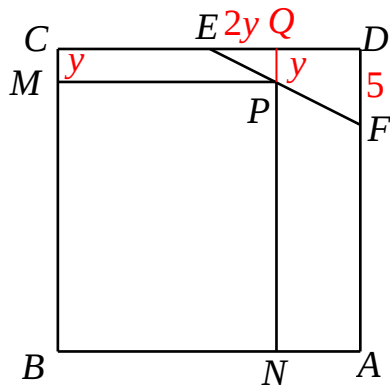
延長 NP 交 CD 於 Q 點，則知 $\triangle PQE \sim \triangle FDE$ 。可令 $PQ=CM=y$ ，其中 $0 \leq y \leq 5$ ，則 $EQ=2y$ 。此時矩形 $PMBN$ 的面積為

$$\begin{aligned} (10+2y)(20-y) &= 200 + 30y - 2y^2 \\ &= -2(y^2 - 15y) + 200 \\ &= -2(y - \frac{15}{2})^2 + \frac{625}{2} \end{aligned}$$

此函數最大值發生在 $y = \frac{15}{2} > 5$ 。但因 $0 \leq y \leq 5$ ，故

知矩形 $PMBN$ 有最大面積發生於 $y=5$ ，此時 $PE = EF = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$ 。

答： $5\sqrt{5}$



12. 已知正三角形 ABC 內部一點 P 滿足 $PA=3$ 、 $PB=4$ 、 $PC=5$ ，則正三角形 ABC 的面積=_____。

【解法一】

如圖，在三角形 ABC 外部取一點 D 使得 $\triangle ADB \cong \triangle APC$ ，則可知 $AD=3$ 、 $DB=5$ ，且 $\angle DAB = \angle PAC$ ，故知 $\angle DAP = \angle DAB + \angle BAP = \angle PAC + \angle BAP = 60^\circ$ ，所以可推知 $\angle ADP = \angle APD = 60^\circ$ ，即 $\triangle ADP$ 為正三角形，因此 $DP=3$ ，此時可由

畢氏定理推知 $DP \perp BP$ 。依同樣方法再取出 E 、 F 點使得 $\triangle BEC \cong \triangle BPA$ 、 $\triangle AFC \cong \triangle BPC$ ，則可推得六邊形 $ADBECF$ 的面積為正三角形 ABC 的面積的 2 倍，且六邊形 $ADBECF$ 由邊長分別為 3、4、5 的三個正三角形與 3 個邊長分別為 3、4、5 的直角三角形所組成，因此正三角形 ABC 的面積為

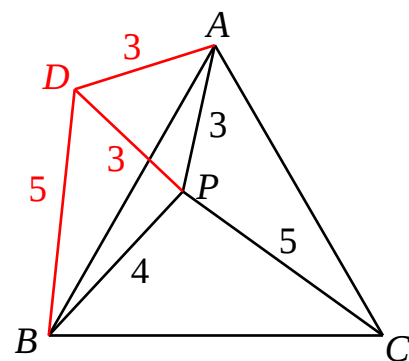
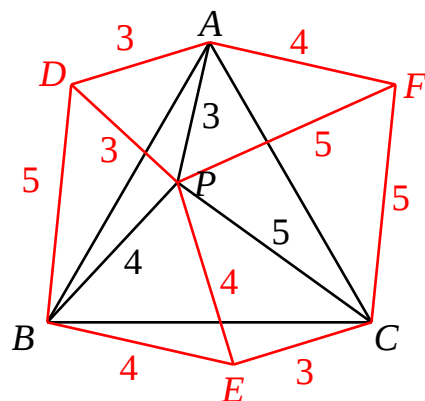
$$\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} (3^2 + 4^2 + 5^2) + 3 \times \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \right) = \frac{36 + 25\sqrt{3}}{4}$$

【解法二】

如圖，在三角形 ABC 外部取一點 D 使得 $\triangle ADB \cong \triangle APC$ ，則可知 $AD=3$ 、 $DB=5$ ，且 $\angle DAB = \angle PAC$ ，故知 $\angle DAP = \angle DAB + \angle BAP = \angle PAC + \angle BAP = 60^\circ$ ，所以可推知 $\angle ADP = \angle APD = 60^\circ$ ，即 $\triangle ADP$ 為正三角形，因此 $DP=3$ ，此時可由畢氏定理推知 $DP \perp BP$ 。故利用餘弦定理可知

$$\begin{aligned} AB^2 &= AP^2 + BP^2 - 2AP \times BP \cos \angle APB \\ &= 3^2 + 4^2 - 24 \cos 150^\circ \\ &= 25 + 12\sqrt{3} \end{aligned}$$

故正三角形 ABC 的面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = \frac{36 + 25\sqrt{3}}{4}$



答： $\frac{36 + 25\sqrt{3}}{4}$

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在本試卷正反面空白處依題號作答，須詳列計算過程及說明理由)

1. 已知 $\square$ 是 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 中的一個數碼，若一百零一位數

$A = \underbrace{99 \dots 99}_{50 \text{ 個 } 9} \square \underbrace{55 \dots 55}_{50 \text{ 個 } 5}$ 是 7 的倍數，則 $\square$ 的所有可能值為何？

【解】

易知 111111 是 7 的倍數。(給 5 分)

因為 $\underbrace{99 \dots 99}_{50 \text{ 個 } 9} \square \underbrace{55 \dots 55}_{50 \text{ 個 } 5} = \underbrace{99 \dots 99}_{48 \text{ 個 } 9} \times 10^{53} + 99 \square 55 \times 10^{48} + \underbrace{55 \dots 55}_{48 \text{ 個 } 5}$ ，以及知

$7 \mid \underbrace{99 \dots 99}_{48 \text{ 個 } 9} \times 10^{53}$ 、 $7 \mid \underbrace{55 \dots 55}_{48 \text{ 個 } 5}$ ，故只要代入的 $\square$ 能使 $99 \square 55 \times 10^{48}$ 是 7 的倍數即是

題目所求答案。(給 10 分)

因為 $(7, 10^{48}) = 1$ ，所以只需討論能使 $99 \square 55$ 是 7 的倍數的所有可能 $\square$ 值。故可求得 $\square = 1$ 或 8。(給 5 分)

答：1、8

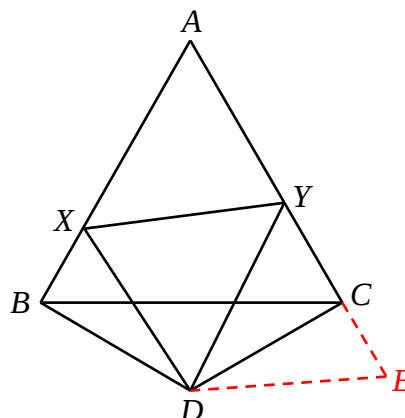
2. 如圖，已知三角形 ABC 是一個邊長為 2011 的正三角形，三角形 BDC 是等腰三角形， $\angle BDC=120^\circ$ 。以 D 為頂點任作一個 60° 的角，角的兩邊分別交 AB 於點 X 、交 AC 於點 Y 。請問三角形 AXY 的周長是多少？

【解】

可知 $\angle ABD=\angle ACD=90^\circ$ 。延長 AC ，在延長線上取 $CE=BX$ ，則可知 $\triangle DBX \cong \triangle DCE$ ，所以 $DX=DE$ 、 $\angle BDY=\angle CDE$ 。(給 5 分)

因此由 $\angle BDC=120^\circ$ ，可推知 $\angle XDE=120^\circ$ ；
再因 $\angle XDY=60^\circ$ ，所以 $\angle EDY=60^\circ=\angle XDY$ ；
此時因 $DX=DE$ 、 $DY=DY$ ，故可知 $\triangle XYD \cong \triangle EYD$ ，
所以 $XY=YE$ 。(給 10 分)

故可知 $AX+AY+XY=AX+AY+YE=AX+AY+YC+CE=$
 $AX+AY+YC+XB=AB+AC=4022$ 。(給 5 分)

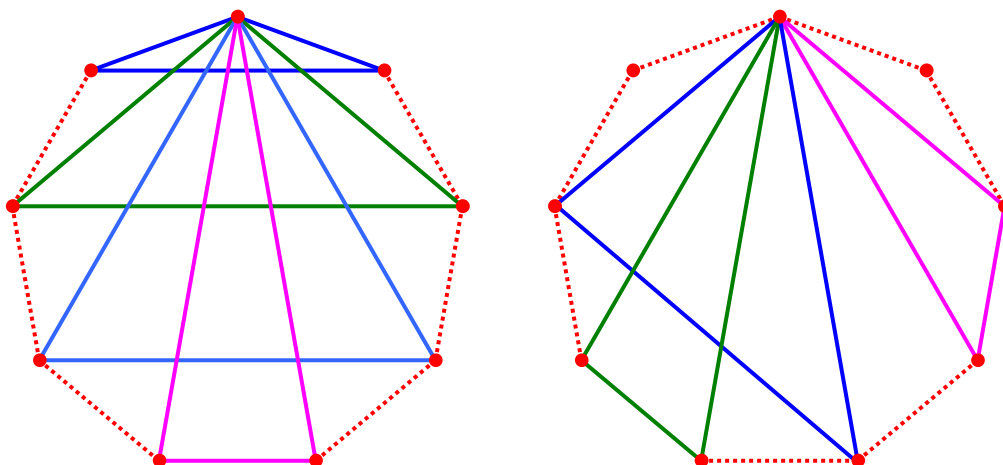


答：4022

3. 有一個正九邊形，將它的各個頂點任意地塗成紅色或白色。以正九邊形的頂點所作出的三角形中，試證：存在兩個全等的三角形，它們的頂點所塗的顏色都各自相同。

【解】

由下圖知三角形的頂點都是正 9 邊形的頂點的情形共有 7 種不同的形狀：
(給 5 分)



將 9 邊形的頂點染上兩種顏色時，必有一種顏色出現在至少 5 個頂點上 (鴿籠原理)，(給 5 分) 以這 5 個頂點中的 3 個點為頂點的三角形有 10 個 (若令這 5 個頂點為 A 、 B 、 C 、 D 、 E ，則有 ABC 、 ABD 、 ABE 、 ABF 、 BCD 、 BCE 、 BCF 、 CDE 、 CDF 、 DEF 這 10 個三角形，或由 $\frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$ 也可得此結論)。因 $10 > 7$ (上圖的 7 種情形)，因此，這 10 個同色三角形中，必有兩個形狀相同 (鴿籠原理)，也就是存在兩個全等的三角形。(給 10 分)