

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 [ccmp@seed.net.tw](mailto:ccmp@seed.net.tw)

**Notice:**

**Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.**

**Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN [ccmp@seed.net.tw](mailto:ccmp@seed.net.tw)**

# 2011 年青少年數學國際城市邀請賽

## 參賽代表遴選個人賽決賽試題

編號: \_\_\_\_\_ 縣市: \_\_\_\_\_ 校名: \_\_\_\_\_

姓名: \_\_\_\_\_ 性別: 男 女

作答時間: 二小時

第一部分: 填充題, 每小題 5 分, 共 60 分

(注意: 請將答案直接填入各題預留空白處, 不需列出計算過程)

1. 用 1、2、3、4 四個數字共可組成 256 個不同的四位數, 其中數字可以重覆, 則此 256 個四位數的總和為 \_\_\_\_\_。  
Ans: 711040

2. 設  $a, b, c$  均為實數, 若  $N = \frac{a+3c}{a+2b+c} + \frac{7a+6b+3c}{a+b+2c} + \frac{c-a}{2a+b+c}$ ; 則  $N$  的最小值為 \_\_\_\_\_。  
Ans:  $1+2\sqrt{3}$

3. 設  $a$  為正整數並使方程式  $ax^2 + 2(2a-1)x + 4(a-3) = 0$  至少有一個整數根, 則  $a$  的所有可能之值的和為 \_\_\_\_\_。  
Ans: 20

4. 設有 20 段長度分別為 1, 2, ..., 20 的線段, 欲從中任意挑選 3 線段來構成一個任意兩邊長的差至少為 2 至多為 7 的三角形, 問滿足該條件的相異挑選方法共有多少種? \_\_\_\_\_。  
Ans: 110

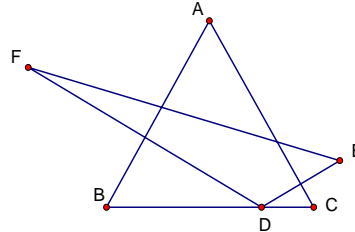
5. 已知  $a, b, c, d$  為四相異有理數且滿足  $\frac{a+2c}{b+2c} = \frac{b+d}{a+d} = \frac{3}{(b+2c)(a+d)}$ , 則  $(a+2c)(b+2c)$  之值為 \_\_\_\_\_。  
Ans: -3

6. 甲、乙兄弟兩人在同一個工廠工作, 由於工作性質不同, 他們按照自己的工程表上班, 甲的工作日程表是工作 5 天接著休息 2 天, 乙的工作日程表是工作 7 天接著休息 3 天; 若兄弟兩人在同一天進入工廠開始工作, 則在此後的 2011 天中, 他們共同休息的日子共有 \_\_\_\_\_ 天。  
Ans: 172

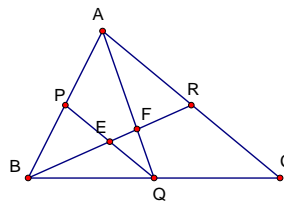
7. 甲乙兩人玩猜字母遊戲, 甲可從  $a, b, c, d, e, f, g, h$  這 8 個字母中任意選兩個字母並寫在一張卡片上(每張卡片寫兩個字母, 且可寫許多張), 而乙可任意從這 8 個字母中選出四個字母; 試問甲至少要寫多少張卡片, 才能保證他所寫的卡片中至少有一張卡片上面的字母一定不會出現在乙所選出的四個字母中。 \_\_\_\_\_  
Ans: 7

8. 若  $\alpha$  和  $\beta$  均為正整數且方程式  $6x^2 - 3\alpha x + \beta = 0$  的兩根都大於 2 且小於 3，則  $\beta - \alpha$  之值為\_\_\_\_\_。  
 Ans: 27

9. 右下圖中，已知正三角形  $ABC$  的邊長為 4， $D$  為  $BC$  邊上的一點，線段  $DC$  長為 1，若以  $AC$  邊為對稱軸， $D$  的對稱點為  $E$ ；而以  $AB$  邊為對稱軸， $D$  的對稱點為  $F$ 。則線段  $EF$  的長為\_\_\_\_\_。  
 Ans:  $\sqrt{39}$

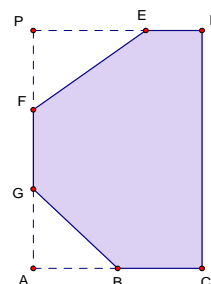


10. 如右下圖，已知  $P, Q, R$  分別為  $\triangle ABC$  三邊  $AB, BC, CA$  的中點， $BR$  與  $PQ, AQ$  分別交於  $E, F$  兩點；若  $\triangle ABC$  的面積為 100，則  $\triangle QEF$  的面積為\_\_\_\_\_。  
 Ans:  $\frac{25}{6}$  (或  $4\frac{1}{6}$ )



11. 已知正整數  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_8, a_9, a_{10}$  滿足  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_8 < a_9 < a_{10}$ ，若  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{10}^2 \leq 2011$ ，則  $a_8 - a_3$  的最大值為\_\_\_\_\_。  
 Ans: 20

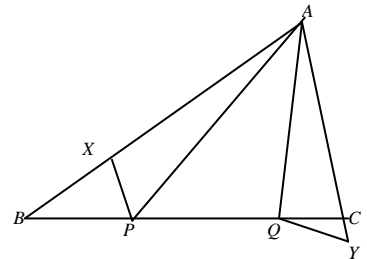
12. 如右下圖，六邊形  $BCDEFG$  是將一個長方形  $ACDP$  剪去兩個直角三角形所形成，長方形  $ACDP$  的長和寬分別為  $\overline{AC} = 6, \overline{CD} = 9$ ，又  $\overline{AB} = \overline{AG} = \overline{GF} = 3$ ， $\overline{DE} = 2$ 。設在六邊形  $BCDEFG$  區域中找出面積最大的長方形  $HUJK$ ，其中  $KH$  平行  $CD$ ， $KJ$  平行  $AC$ ；則長方形  $HUJK$  的面積為\_\_\_\_\_。  
 Ans:  $\frac{729}{28}$  (或  $26\frac{1}{28}$ )



## 第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在答案卷上請依題號作答，須詳列過程及說明理由)

1. 如圖，在 $\triangle ABC$ 中，設 $P, Q$ 為 $BC$ 邊上的兩點，使得 $\angle PAQ = \frac{1}{2}\angle BAC$ ，而 $X$ 為 $AB$ 邊上的一點， $Y$ 為 $AC$ 邊延長邊上的一點，使得 $\angle XPA = \angle APQ$ 及 $\angle YQA = \angle AQP$ 。求證 $PQ = PX + QY$



### 【參考解答】

在 $BC$ 邊上取一點 $M$ ，使得 $\angle MAP = \angle BAP$ ，則

可證得 $\triangle AMP \cong \triangle AXP$  (ASA)

所以 $PX = PM$

$$\angle MAQ = \angle PAQ - \angle MAP$$

$$= \frac{1}{2}(\angle BAC - \angle MAB)$$

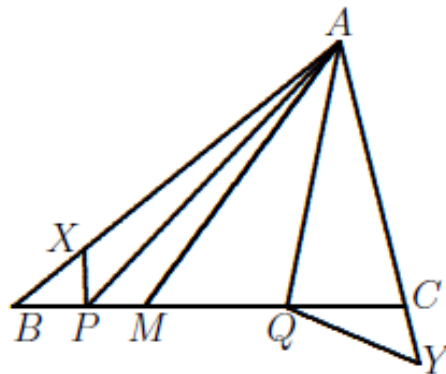
$$= \frac{1}{2}\angle MAC$$

$$= \angle CAQ$$

同理可證得

$$QY = QM$$

因此  $PX + QY = PM + QM = PQ$



2. 在正整數  $1, 2, \dots, 2011$  中，有多少個整數可以表示為 $[5x] + [15x] + [25x]$ 的形式，其中 $x$ 為實數？(對於任意實數 $y$ ，符號 $[y]$ 表示為不大於 $y$ 的最大整數。)

### 【參考解答】

令 $f(x) = [5x] + [15x] + [25x]$ ，則

$$f\left(x + \frac{1}{5}\right) = \left[5\left(x + \frac{1}{5}\right)\right] + \left[15\left(x + \frac{1}{5}\right)\right] + \left[25\left(x + \frac{1}{5}\right)\right] = [5x + 1] + [15x + 3] + [25x + 5] = f(x) + 9$$

故若整數 $n$ 可以表示為 $f(x)$ 的形式，則 $n + 9k$ 也可以表示為 $f(x)$ 的形式，其中 $k$ 為正整數，故可先從 $1 \sim 9$ 中有多少個數可表示成 $f(x)$ 的形式來考慮。

當 $x \in [0, \frac{1}{25})$ 時， $f(x) = 0$ ；當 $x \in [\frac{1}{25}, \frac{1}{15})$ 時， $f(x) = 1$ ；當 $x \in [\frac{1}{15}, \frac{2}{25})$ 時， $f(x) = 2$ ；

當 $x \in [\frac{2}{25}, \frac{3}{25})$ 時， $f(x) = 3$ ；當 $x \in [\frac{3}{25}, \frac{2}{15})$ 時， $f(x) = 4$ ；當 $x \in [\frac{2}{15}, \frac{4}{25})$ 時， $f(x) = 5$ ；當

$x \in [\frac{4}{25}, \frac{1}{5})$ 時， $f(x) = 6$ ；當 $x = \frac{1}{5}$ 時， $f(x) = 9$ 。故知 $1 \sim 9$ 中，有 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 9$ 共7

個數可表示成 $f(x)$ 的形式；再因 $2011 = 9 \times 223 + 4$ ，故共有 $7 \times 223 + 4 = 1565$ 個數。

3. 設有 3 個網球選手代表隊，每隊的人數都不相同，比賽情形為不同隊的任意兩名隊員都進行一場單打比賽，但同隊的隊員則不互相進行比賽。已知比賽總共進行了 36 場單打比賽，試求三個代表隊的人數各有多少人？

【參考解答】

設三個代表隊的人數分別為  $a, b, c$ ，且可假設  $a < b < c$ 。

由題意可知  $ab + ac + bc = 36$ 。

若  $a = 1$ ，則  $36 = b + c + bc$ 。

可知  $bc + b + c + 1 = (b+1)(c+1) = 37 = 1 \times 37$ ，

求得  $b = 0$ ，不符合。

若  $a = 2$ ，則  $36 = 2b + 2c + bc$ 。

可知  $bc + 2b + 2c + 4 = (b+2)(c+2) = 40 = 1 \times 40 = 2 \times 20 = 4 \times 10 = 5 \times 8$ ，

求得  $b \leq 0$ ， $b = 2$  或  $b = 3$ ，

但  $b = 2$  表示有兩隊的人數相同，不符合。

可知  $b = 3$ ，此時  $c = 6$ 。

若  $a = 3$ ，則  $36 = 3b + 3c + bc$ 。

可知  $bc + 3b + 3c + 9 = (b+3)(c+3) = 45 = 1 \times 45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$ ，

求得  $b \leq 2$ ，與  $a \leq b$  的假設不符合。

若  $a \geq 4$ ，則  $ab + ac + bc \geq 4 \times 4 + 4 \times 4 + 4 \times 4 = 48 > 36$ ，不符合要求。

可得知  $a = 2$ ， $b = 3$ ， $c = 6$ 。即三個代表隊分別有 2 人，3 人，6 人。