2012 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選複賽

個人賽試題

__________縣市__________國民中學____年級　編號:________　姓名:__________

性別: □男 □女

作答時間: 二 小 時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：在試卷上作答，只需寫出答案，答案若為分數，請化為最簡分數)

1. 設 a、b 為互質的兩正整數且 $a < b$，若 $a + b = 3056$，則這樣的有序數對(a, b)共有__________組。

2. 由三個皆不為 0 的數碼所組成的三位數中，若 $\overline{a_1a_2a_3}$ 為這些三位數之一，且 $\overline{a_1a_2a_3}$ 與其三個組成的數碼乘積 $a_1 \times a_2 \times a_3$ 之差為最大，則 $\overline{a_1a_2a_3}$ =________。

3. 將 25 個數排成的五行五列，如下所示：

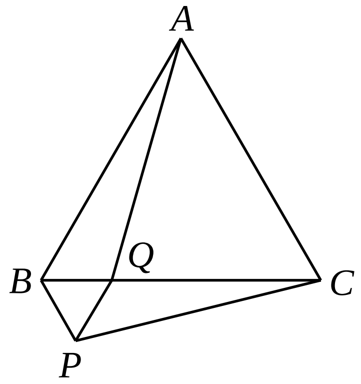
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{matrix}$$

已知第一橫列 a_{11}、a_{12}、a_{13}、a_{14}、a_{15} 為等差數列，而每一直行 a_{1j}、a_{2j}、a_{3j}、a_{4j}、a_{5j}，$1 \le j \le 5$，皆為等比數列，且五個公比皆相等。若 $a_{24} = 4$、$a_{41} = -2$、$a_{43} = 10$，則 $a_{11} \times a_{55}$ 的值為__________。

4. 設 $a = \overbrace{44\cdots4}^{2012個4}$、$b = \overbrace{88\cdots8}^{1006個8}$，若 $n = [\sqrt{a-b}]$，其中$[m]$表示小於或等於 m 的最大整數，則 $n \div 9$ 的餘數為__________。

5. 設 a、b、c、d 均為正整數且 $a < b < c < d$，若 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$，則 d 的所有可能值之和為__________。

6. 下圖中，$\triangle ABC$ 和$\triangle BPQ$ 都是正三角形，若 $\overline{AB}:\overline{BP}=4:1$，則四邊形 $AQPC$ 面積：四邊形 $ABPQ$ 面積=______：______。



7. 將六個完全相同的正三角形磁磚以邊對邊的方式連接在一起平鋪在地面上，而拼成許多圖案。若經過旋轉或翻轉後相同的圖案視為相同的圖案，則總共可以拼出 ____________種不同的圖案。

8. 假設 x、y 均為正整數且滿足$\sqrt{x+37}=y-\sqrt{x-19}$，若 $x=a$ 時，y 的最大值為 b，則 $a+b=$__________。

9. 已知 $ABCD$ 為一個平行四邊形，點 P 為$\triangle BAD$ 內部的一點。如果$\triangle PAB$ 的面積為 2 cm^2、$\triangle PCB$ 的面積為 5 cm^2，則$\triangle PBD$ 的面積為__________cm^2。

10. 設 $f(n)$ 為一個定義域為正整數的函數，且滿足

$$f(n)=\begin{cases} n-2, & n\geq 500, \\ f\left(f(n+5)\right), & n<500. \end{cases}$$

則 $f(60)$ 之值為__________。

11. 已知方程式 $x^2-2\sqrt{3}mx+\dfrac{3n^2}{4}=0$，其中 m、n 分別為一個等腰銳角$\triangle ABC$ 的腰與底邊之長。若該方程式的兩實根之差的絕對值為$8\sqrt{3}$，且$\triangle ABC$ 的面積為$8\sqrt{2}$，則$\triangle ABC$ 的周長為__________。

12. 設 x、y 為實數，滿足$\left(5x-\sqrt{25x^2-2012}\right)\left(5y-\sqrt{25y^2-2012}\right)=2012$，則 x^2+y^2 之值為__________。

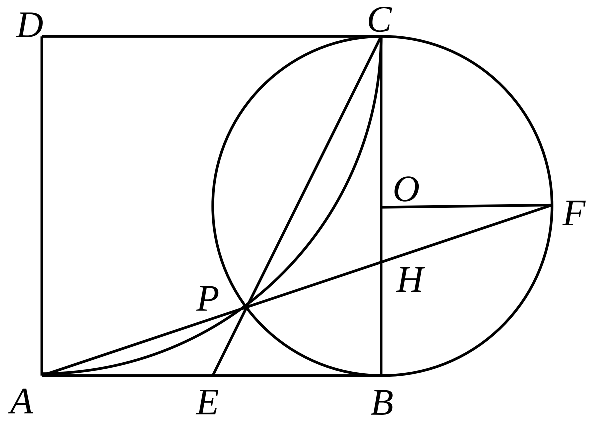
第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在試卷上作答，須詳列過程及說明理由)

1. 小傑手中有一疊 414 張的卡片，它們依序從最上面一張到最下面一張編號如 1、2、3、4、5、6、7、8、9、1、2、3、4、5、6、7、8、9、1、2、…、7、8、9。每次操作，小傑取出手上這疊卡片最上面的二張卡片，將上面第一張卡片丟掉並將第二張卡片放到此疊卡片的最下面。依此規則繼續操作下去。當他手中的卡片剩下 194 張卡片時，編號為 5 的卡片共被丟掉 a 張；而當他手中只剩下一張卡片時，此卡片的編號為 b，試求 a 與 b 之值。

答：a=　　　　　b=

2. 已知 $ABCD$ 為正方形，以點 D 為圓心，線段 AD 為半徑的圓弧與以線段 BC 為直徑的圓 O 相交於 P、C 兩點，連接線段 CP、AP，並延長 CP 交 AB 於點 E；延長 AP 分別交線段 BC 與圓 O 於點 H 與 F，連接線段 OF(如圖所示)。證明：$AB//OF$。



3. 若 n 為正整數使得乘積 $77777777\times n$ 之數碼全都是 1，試求 n 之最小值。

答：______________________________