2012年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選複賽

個人賽試題

作答時間: 二 小 時

第一部分：填充題，每小題5分，共60分

(注意：在試卷上作答，只需寫出答案，答案若為分數，請化為最簡分數)

1. 設 a、b 為互質的兩正整數且 $a < b$，若 $a + b = 3056$，則這樣的有序數對(a, b)共有__________組。

【參考解法】

因 a、b 為互質的兩正整數，故 a、b 不可同時為偶數，即 a、b 同時為奇數；

因 $a=3056-b$，且 $3056=2^4\times191$，其中191為質數，故 a、b 同時為191的倍數或同時不為191的倍數，而由題意知 a、b 需同時不為191的倍數。

因小於3056的奇數共有3056÷2=1528個，其中191、573、955、1337、1719、2101、2483、2865這8個數為191的倍數，且再因 $a < b$，故知有序數對(a, b)共有(1528－8)÷2=760組。

答：760組

2. 由三個皆不為 0 的數碼所組成的三位數中，若$\overline{a_1a_2a_3}$為這些三位數之一，且$\overline{a_1a_2a_3}$與其三個組成的數碼乘積$a_1\times a_2\times a_3$之差為最大，則$\overline{a_1a_2a_3}$=_________。

【參考解法1】

令所求差之值為 A，即 $A=\overline{a_1a_2a_3}-a_1\times a_2\times a_3$。

因要求出 A 的最大值，故可先假設 A 的百位數為9。

此時可判斷出 a_1=9 且 $a_1\times a_2\times a_3=9a_2\times a_3<\overline{a_2a_3}=10a_2+a_3$，

即 $a_2(9a_3-10)<a_3$；

而當 $a_3\ge2$ 時，$a_3>a_2(9a_3-10)\ge8a_2\ge8$，數碼中僅 $a_2=1$、$a_3=9$ 可能發生，但代回原不等式 $a_3>a_2(9a_3-10)$ 後發現 $9>1\times(9\times9-10)=71$，矛盾；

因此 $a_3=1$，且可得 $A=\overline{9a_21}-9a_2=901+a_2$，故 A 的最大值發生在 $a_2=9$ 時，此時 A=910，三位數為991。

【參考解法2】

令所求差值為 A，即

$$A=\overline{a_1a_2a_3}-a_1a_2a_3=100a_1+10a_2+a_3-a_1a_2a_3=a_1(100-a_2a_3)+10a_2+a_3。$$

因要求出 A 的最大值且 $a_2a_3<100$，故可令 a_1=9，即得

$$A=900-9a_2a_3+10a_2+a_3=900+a_2(10-9a_3)+a_3$$

因要求出 A 的最大值，故可令 a_3=1，即得

$$A=900+a_2+1$$

因要求出 A 的最大值，故可令 a_2=9，即得 A=910，此時三位數為991。

答：991

3. 將 25 個數排成的五行五列，如下所示：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{matrix}$$

已知第一橫列a_{11}、a_{12}、a_{13}、a_{14}、a_{15}為等差數列，而每一直行a_{1j}、a_{2j}、a_{3j}、a_{4j}、a_{5j}，$1\le j\le 5$，皆為等比數列，且五個公比皆相等。若$a_{24}=4$、$a_{41}=-2$、$a_{43}=10$，則$a_{11}\times a_{55}$的值為__________。

【參考解法】

可知每一橫行上的數也會是等差數列，但這五個等差數列的公差不一定相等。

現由$a_{41}=-2$、$a_{43}=10$，可知$a_{42}=\dfrac{10+(-2)}{2}=4$且公差為 6，故$a_{44}=16$、$a_{45}=22$。

再由$a_{24}=4$、$a_{44}=16$知公比$s=\pm 2$。

若$s=2$，則$a_{11}=\dfrac{-2}{s^3}=-\dfrac{1}{4}$、$a_{55}=22\times 2=4\times 11$，故$a_{11}\times a_{55}=-11$；

若$s=-2$，則$a_{11}=\dfrac{-2}{s^3}=\dfrac{1}{4}$、$a_{55}=22\times(-2)=4\times(-11)$，故$a_{11}\times a_{55}=-11$。

故所求為-11。

答：-11

4. 設$a=\overbrace{44\cdots4}^{2012個4}$、$b=\overbrace{88\cdots8}^{1006個8}$，若$n=[\sqrt{a-b}]$，其中$[m]$表示小於或等於$m$的最大整數，則$n\div 9$的餘數為__________。

【參考解法】

$$\begin{aligned} n&=[\sqrt{a-b}]\\ &=\left[\sqrt{\overbrace{44\cdots4}^{2012個4}-\overbrace{88\cdots8}^{1006個8}}\right]=\left[2\sqrt{\overbrace{1\cdots1}^{2012個1}-\overbrace{2\cdots2}^{1006個2}}\right]=\left[2\sqrt{\overbrace{1\cdots1}^{1006個1}\times(1\overbrace{0\cdots0}^{1005個0}1-2)}\right]\\ &=\left[2\sqrt{\overbrace{1\cdots1}^{1006個1}\times\overbrace{9\cdots9}^{1006個9}}\right]=\left[2\times 3\sqrt{\overbrace{1\cdots1}^{1006個1}\times\overbrace{1\cdots1}^{1006個1}}\right]=\left[2\times 3\times\overbrace{1\cdots1}^{1006個1}\right]\\ &=\overbrace{6\cdots6}^{1006個6} \end{aligned}$$

因此$n\equiv 6\times 1006\equiv 6\times 7\equiv 6 \pmod 9$，即所求為 6。

答：6

5. 設a、b、c、d均為正整數且$a<b<c<d$，若$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}=1$，則$d$的所有可能值之和為__________。

【參考解法】

可知 $1<a<b<c<d$。

若 $a>2$，則 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\le\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{57}{60}<1$，矛盾；

因此 a=2 且知 $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{2}$、$2<b<c<d$。

若 b=3，則有 $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，即 $d=\dfrac{1}{\frac{1}{6}-\frac{1}{c}}=\frac{6c}{c-6}$：

當 $c=7$，則 $d=\frac{6\times7}{7-6}=42$；當 $c=8$，則 $d=\frac{6\times8}{8-6}=24$；

當 $c=9$，則 $d=\frac{6\times9}{9-6}=18$；當 $c=10$，則 $d=\frac{6\times10}{10-6}=15$；

當 $c=11$，則 $d=\frac{6\times11}{11-6}=\frac{66}{5}$ 不為整數，故不合；

當 $c\ge12$ 時，則 $\frac{1}{d}=\frac{1}{6}-\frac{1}{c}\ge\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12}$，即 $d\le12\le c$，故不合；

若 b=4，則有 $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$，即 $d=\dfrac{1}{\frac{1}{4}-\frac{1}{c}}=\frac{4c}{c-4}$：

當 $c=5$，則 $d=\frac{4\times5}{5-4}=20$；當 $c=6$，則 $d=\frac{4\times6}{6-4}=12$；

當 $c=7$，則 $d=\frac{4\times7}{7-4}=\frac{28}{3}$ 不為整數，故不合；

當 $c\ge8$ 時，則 $\frac{1}{d}=\frac{1}{4}-\frac{1}{c}\ge\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$，即 $d\le8\le c$，故不合；

若 b=5，則有 $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$，即 $d=\dfrac{1}{\frac{3}{10}-\frac{1}{c}}=\frac{10c}{3c-10}$：

當 $c=6$，則 $d=\frac{10\times6}{18-10}=\frac{60}{8}$ 不為整數，故不合；

當 $c\ge7$ 時，則 $\frac{1}{d}=\frac{3}{10}-\frac{1}{c}\ge\frac{3}{10}-\frac{1}{7}=\frac{11}{70}>\frac{1}{7}$，即 $d\le7\le c$，故不合；

若 $b>7$，則 $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\le\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}=\frac{121}{360}<\frac{1}{2}$，矛盾；

因此 d 值可能為 42、24、18、15、20 與 12，其總和為 131。

答：131

6. 下圖中，△ABC 和△BPQ 都是正三角形，若 $\overline{AB}:\overline{BP}=4:1$，則四邊形 $AQPC$ 面積：四邊形 $ABPQ$ 面積=________：________。

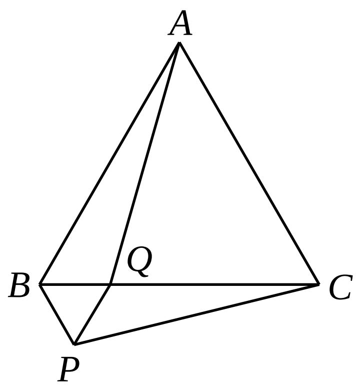
【參考解法】

因△ABC 和△BPQ 都是正三角形，且 $\overline{AB}$ ： $\overline{BP}$ =4：1，故知 $\overline{BQ}$ ： $\overline{QC}$ =1：3。因此若令△BPQ 的面積為 a，則△CPQ 的面積為 $3a$、△ABC 的面積為 $16a$、△ABQ 的面積為 $4a$、△AQC 的面積為 $12a$，因此

四邊形 $AQPC$ 面積：四邊形 $ABPQ$ 面積

= $12a+3a$：$a+4a$

= 3：1

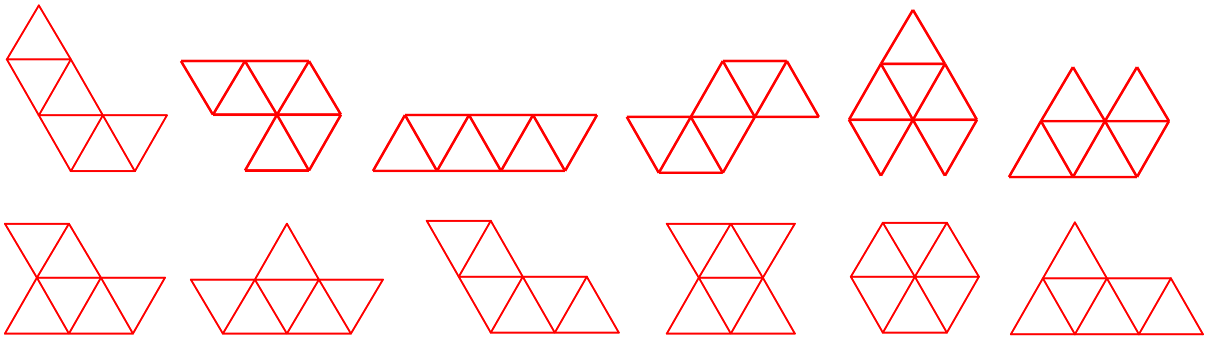


答：3：1

7. 將六個完全相同的正三角形磁磚以邊對邊的方式連接在一起平鋪在地面上，而拼成許多圖案。若經過旋轉或翻轉後相同的圖案視為相同的圖案，則總共可以拼出 ______________種不同的圖案。

【參考解法】

實際操作後，可得以下 12 種圖案：



答：12 種

8. 假設 x、y 均為正整數且滿足 $\sqrt{x+37}=y-\sqrt{x-19}$，若 x=a 時，y 的最大值為 b，則 $a+b=$__________。

【參考解法】

可知 $y=\sqrt{x+37}+\sqrt{x-19}$ 。

不妨令 $A=\sqrt{x+37}$ 、 $B=\sqrt{x-19}$ ，則有 $A^2-B^2=37-(-19)=56$ ，即

$$(A+B)(A-B)=56=2^3\times7$$

因 $A+B$ 、 $A-B$ 的奇偶性相同，故知 $A+B$ 的可能值為 28 或 14，因此 $A+B$ 的最大值 b 為 28，此時 $A-B=2$ ，此時解聯立方程組

$$\begin{cases} A+B=28 \\ A-B=2 \end{cases}$$

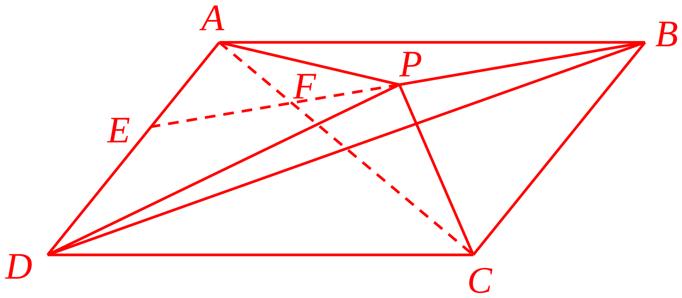
可知 A=15、B=13，因此 $x=15^2-37=13^2+19=188=a$。故 $a+b$ =216。

答：216

9. 已知 $ABCD$ 為一個平行四邊形，點 P 為$\triangle BAD$ 內部的一點。如果$\triangle PAB$ 的面積為 2 cm^2、$\triangle PCB$ 的面積為 5 cm^2，則$\triangle PBD$ 的面積為__________cm^2。

【參考解法】

如圖，連接 AC 並延長 BP 交 AC、AD 於 F、E。



因

$\triangle PAB$ 的面積：$\triangle PCB$ 的面積 $=2:5$，

故知 $AF:FC=2:5$，

因此 $AE:BC=2:5$，

即 $AE:ED=2:3$，

即$\triangle PAB$ 的面積：$\triangle PBD$ 的面積$=2:3$，故知$\triangle PBD$ 的面積為 3 cm^2。

答：3 cm^2

10. 設 $f(n)$ 為一個定義域為正整數的函數，且滿足

$$f(n)=\begin{cases} n-2, & n\ge 500, \\ f\left(f(n+5)\right), & n<500. \end{cases}$$

則 $f(60)$ 之值為__________。

【參考解法】

由 $f(n)$ 的定義可知：

$$f(60)=f(f(65))=f(f(f(70)))=\cdots=\overbrace{f(\cdots(f}^{89\text{層}}(500))\cdots)$$

而

$$\begin{aligned}\overbrace{f(\cdots(f}^{89\text{層}}(500))\cdots)&=\overbrace{f(\cdots(f}^{88\text{層}}(498))\cdots)=\overbrace{f(\cdots(f}^{89\text{層}}(503))\cdots)\\&=\overbrace{f(\cdots(f}^{88\text{層}}(501))\cdots)=\overbrace{f(\cdots(f}^{87\text{層}}(499))\cdots)\\&=\overbrace{f(\cdots(f}^{88\text{層}}(504))\cdots)=\overbrace{f(\cdots(f}^{87\text{層}}(502))\cdots)=\overbrace{f(\cdots(f}^{86\text{層}}(500))\cdots)\end{aligned}$$

故繼續操作下去，可知

$$\begin{aligned}\overbrace{f(\cdots(f}^{89\text{層}}(500))\cdots)&=\overbrace{f(\cdots(f}^{86\text{層}}(500))\cdots)\\&=\overbrace{f(\cdots(f}^{83\text{層}}(500))\cdots)\\&\ \vdots\\&=\overbrace{f(\cdots(f}^{5\text{層}}(500))\cdots)\\&=f(f(500))=f(498)=f(f(503))=f(501)=499\end{aligned}$$

答：499

11.已知方程式 $x^2-2\sqrt{3}mx+\frac{3n^2}{4}=0$，其中 m、n 分別為一個等腰銳角$\triangle ABC$的腰與底邊之長。若該方程式的兩實根之差的絕對值為$8\sqrt{3}$，且$\triangle ABC$的面積為$8\sqrt{2}$，則$\triangle ABC$的周長為__________。

【參考解法】

因 m、n 分別為一個等腰銳角$\triangle ABC$的腰與底邊長，故知等腰銳角$\triangle ABC$底邊上的高之長度為$\sqrt{m^2-\frac{n^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4m^2-n^2}$，故可得$\frac{1}{2}n\times\frac{1}{2}\sqrt{4m^2-n^2}=8\sqrt{2}$，即

$$n\sqrt{4m^2-n^2}=32\sqrt{2}\text{ 。}$$

若令該方程式兩實根為α、β，則由根與係數的關係知$\alpha+\beta=2\sqrt{3}m$與$\alpha\beta=\frac{3}{4}n^2$

且因已知兩實根之差的絕對值為$8\sqrt{3}$，故可得

$$(\alpha-\beta)^2=(8\sqrt{3})^2$$
$$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=64\times 3$$
$$12m^2-3n^2=64\times 3$$
$$4m^2-n^2=64$$

故知$n=\frac{32\sqrt{2}}{\sqrt{4m^2-n^2}}=4\sqrt{2}$、$m=\sqrt{\frac{64+n^2}{4}}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$，

所以$\triangle ABC$的周長為$2m+n=4\sqrt{6}+4\sqrt{2}=4(\sqrt{6}+\sqrt{2})$。　　答：$4(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

12.設 x、y 為實數，滿足$\left(5x-\sqrt{25x^2-2012}\right)\left(5y-\sqrt{25y^2-2012}\right)=2012$，則$x^2+y^2$之值為__________。

【參考解法】

令$A=\sqrt{25x^2-2012}$、$B=\sqrt{25y^2-2012}$，則知$2012=25x^2-A^2=25y^2-B^2$，即$2012=(5x+A)(5x-A)=(5y+B)(5y-B)$，因此可得

$$2012^2=(5x+A)(5x-A)(5y+B)(5y-B)$$

而原式可視為$2012=(5x-A)(5y-B)$，故知$2012=(5x+A)(5y+B)$，此即

$$(5x-A)(5y-B)=(5x+A)(5y+B)$$
$$25xy-5xB-5yA+AB=25xy+5xB+5yA+AB$$
$$-yA=xB$$
$$-y\sqrt{25x^2-2012}=x\sqrt{25y^2-2012}$$
$$25x^2y^2-2012y^2=25x^2y^2-2012x^2$$
$$x^2=y^2$$

而可觀察出原式$\left(5x-\sqrt{25x^2-2012}\right)\left(5y-\sqrt{25y^2-2012}\right)=2012$為一個 x、y 的對稱式，故可由$x^2=y^2$直接推得 $x=y$，因此原式即為$(5x-\sqrt{25x^2-2012})^2=2012$

此即

$$25x^2-10x\sqrt{25x^2-2012}+25x^2-2012=2012$$

$$50x^2-4024=10x\sqrt{25x^2-2012}$$

$$2500x^4-402400x^2+4024^2=2500x^4-201200x^2$$

$$201200x^2=4024^2$$

$$x^2=\frac{4024^2}{201200}=\frac{8048}{100}$$

故知 $x^2+y^2=\frac{8048}{50}=\frac{4024}{25}=160\frac{24}{25}=160.96$ 。

答： $\frac{4024}{25}=160\frac{24}{25}=160.96$

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在試卷上作答，須詳列過程及說明理由)

1. 小傑手中有一疊 414 張的卡片，它們依序從最上面一張到最下面一張編號如 1、2、3、4、5、6、7、8、9、1、2、3、4、5、6、7、8、9、1、2、⋯、7、8、9。每次操作，小傑取出手上這疊卡片最上面的二張卡片，將上面第一張卡片丟掉並將第二張卡片放到此疊卡片的最下面。依此規則繼續操作下去。當他手中的卡片剩下 194 張卡片時，編號為 5 的卡片共被丟掉 a 張；而當他手中只剩下一張卡片時，此卡片的編號為 b，試求 a 與 b 之值。

【參考解法 1】

因 414=9×46，故原有 46 張編號 5。可將這 414 張卡片看成如下圖方式排列：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

等小傑將 414 張卡片全部都操作過一次後，即為將以上表格中由左至右的奇數行(即上表中塗黃色部分)全部刪除後剩餘的編號即為小傑手上的 207 張卡片順序，並可再依序如下圖方式排列：

2	4	6	8	1	3	5	7	9	2	4	6	8	1	3	5	7	9
2	4	6	8	1	3	5	7	9	2	4	6	8	1	3	5	7	9
2	4	6	8	1	3	5	7	9	2	4	6	8	1	3	5	7	9
2	4	6	8	1	3	5	7	9	2	4	6	8	1	3	5	7	9
2	4	6	8	1	3	5	7	9	2	4	6	8	1	3	5	7	9
2	4	6	8	1	3	5	7	9	2	4	6	8	1	3	5	7	9
2	4	6	8	1	3	5	7	9	2	4	6	8	1	3	5	7	9
2	4	6	8	1	3	5	7	9	2	4	6	8	1	3	5	7	9
2	4	6	8	1	3	5	7	9	2	4	6	8	1	3	5	7	9
2	4	6	8	1	3	5	7	9	2	4	6	8	1	3	5	7	9
2	4	6	8	1	3	5	7	9	2	4	6	8	1	3	5	7	9
2	4	6	8	1	3	5	7	9									

當手中卡片剩下 194 張卡片時，即為再抽走 13 張，而 13=9+4，故抽走的第 13 張會落在第 4 行，即第 13 張為編號 5，故至此共抽走 46÷2+2=25 張編號 5，即 a=25。而前 206 張卡片全部都操作過一次後，即為將以上表格中由左至右的奇數行全部刪除後，將最後一數移到最前面即為小傑手上的 104 張卡片順序，並可再依序如下圖方式排列：

9	4	8	3	7	2	6	1	5	9	4	8	3	7	2	6	1	5
9	4	8	3	7	2	6	1	5	9	4	8	3	7	2	6	1	5
9	4	8	3	7	2	6	1	5	9	4	8	3	7	2	6	1	5
9	4	8	3	7	2	6	1	5	9	4	8	3	7	2	6	1	5
9	4	8	3	7	2	6	1	5	9	4	8	3	7	2	6	1	5
9	4	8	3	7	2	6	1	5	9	4	8	3	7				

再將 104 張卡片全部都操作過一次後，即將上表格中由左至右的奇數行全部刪除，剩餘的編號即為小傑手上的 52 張卡片順序，並再依序如下圖方式排列：

4	3	2	1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	9	8	7	6	5
4	3	2	1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	9	8	7	6	5
4	3	2	1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	9	8	7		

再將 52 張卡片全部都操作過一次後，即將上表格中由左至右的奇數行全部刪除，剩餘的編號即為小傑手上的 26 張卡片順序，並再依序如下圖方式排列：

3	1	8	6	4	2	9	7	5	3	1	8	6	4	2	9	7	5
3	1	8	6	4	2	9	7										

再將 26 張卡片全部都操作過一次後，即將上表格中由左至右的奇數行全部刪除，剩餘的編號即為小傑手上的 13 張卡片順序，並再依序如下圖方式排列：

1	6	2	7	3	8	4	9	5	1	6	2	7					

而前 12 張卡片全部都操作過一次後，即將上表格中由左至右的奇數行全部刪除，將最後一數移到最前面即為小傑手上的 7 張卡片順序，並再依序如下圖方式排列：

7	6	7	8	9	1	2											

而前 6 張卡片全部都操作過一次後，即將上表格中由左至右的奇數行全部刪除，將最後一數移到最前面即為小傑手上的 4 張卡片順序，並再依序如下圖方式排列：

2	6	8	1														

再將 4 張卡片全部都操作過一次後，即將上表格中由左至右的奇數行全部刪除，剩餘的編號即為小傑手上的 2 張卡片順序，並再依序如下圖方式排列：

6	1																

現作最後一次操作後即可知小傑手上剩下的卡片號碼為 1，因此 $b=1$。

【參考解法 2】

因 $414=9\times46$，故原有 46 張編號 5。而觀察操作規則，小傑將 414 張卡片全部都操作過一次後，每二張編號 5 會有一張被刪除，故此時已丟掉 $46\div2=23$ 張編號 5，且小傑剩下 207 張卡片；而當手中卡片剩下 194 張卡片時，即為再刪除 13 張，同樣再觀察接下來的操作規則，此時卡片順序為 2、4、6、8、1、3、5、7、9 循環重複出現，由 5 的位置知仍然是每二張 5 編號會有一張被刪除，且第 13 張恰為編號 5，因此共會再刪除 2 張編號 5，即 $a=23+2=25$。

現考慮將這 414 張卡片由上而下依序從 1 開始編號至 414。

可知將 414 張卡片全部都操作過一次後，即保留第偶數張而刪除第奇數張，故此時剩下的 207 張卡片標號依序為

2、4、6、8、10、12、14、16、18、…、410、412、414

接著將這 207 張卡片全部都操作過一次後，即保留第偶數張而刪除第奇數張，故此時剩下的 103 張卡片標號依序為

4、8、12、16、…、404、408、412

注意到操作至此，原本的最後一張編號 414 的卡片被刪除，因此接著將這 103 張卡片全部都操作過一次後，是保留第奇數張而刪除第偶數張，故此時剩下的 52 張卡片標號依序為

4、12、20、28、…、396、404、412

接著將這 52 張卡片全部都操作過一次後，即保留第偶數張而刪除第奇數張，故此時剩下的 26 張卡片標號依序為

12、28、44、60、…、380、396、412

接著將這 26 張卡片全部都操作過一次後，即保留第偶數張而刪除第奇數張，故此時剩下的 13 張卡片標號依序為

28、60、92、124、156、188、220、252、284、316、348、380、412

接著將這 13 張卡片全部都操作過一次後，即保留第偶數張而刪除第奇數張，故此時剩下的 6 張卡片標號依序為

60、124、188、252、316、380

注意到操作至此，原本的最後一張編號 412 的卡片被刪除，因此接著將這 6 張卡片全部都操作過一次後，是保留第奇數張而刪除第偶數張，故此時剩下的 3 張卡片標號依序為

60、188、316

注意到操作至此，原本的最後一張編號 380 的卡片被刪除，因此接著將這 3 張卡片全部都操作過一次後，是保留第奇數張而刪除第偶數張，故此時剩下的 2 張卡片標號依序為

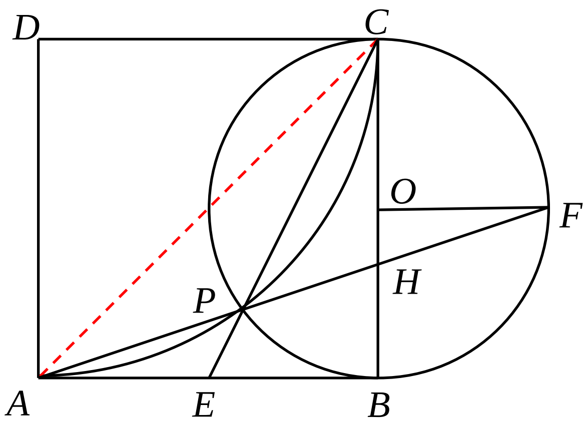
60、316

最後一次保留第 2 張而刪除第 1 張，因此最後剩下編號第 316 號的卡片，而 316=9×35+1，故此卡片的號碼為 1，即 b=1。

答：a=25、b=1

2. 已知 $ABCD$ 為正方形，以點 D 為圓心，線段 AD 為半徑的圓弧與以線段 BC 為直徑的圓 O 相交於 P、C 兩點，連接線段 CP、AP，並延長 CP 交 AB 於點 E；延長 AP 分別交線段 BC 與圓 O 於點 H 與 F，連接線段 OF(如圖所示)。證明：$AB//OF$。

【參考解法 1】



連接線段 AC。因 $ABCD$ 為正方形，故 $\angle CAB=45°$ 且 $AB\perp BC$。因此欲證明 $AB//OF$，即證明 $\angle COF=90°$，而由圓心角與圓周角的關係知此即證明

$$\angle CPF=\angle APE=45° 。$$

現在觀察△AEP、△CEA：

由弦切角與圓周角的關係知

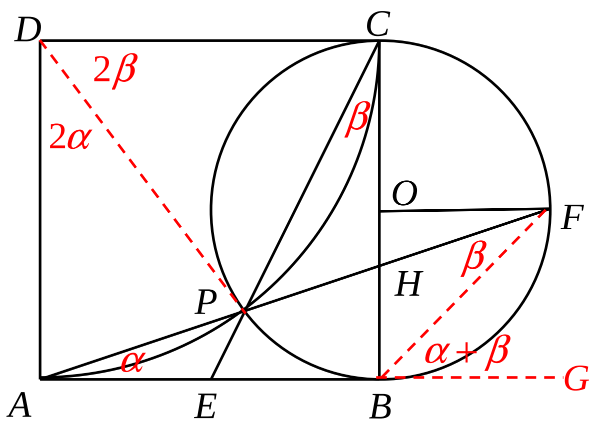
$\angle PAE=\angle ACE$ 且 $\angle AEP=\angle CEA$，

故可得△AEP~△CEA ，

因此 $\angle APE=\angle CAE=45°$，此即得證

$\angle CPF=\angle APE=45°$，故 $\angle COF=90°$，所以 $AB//OF$。

【參考解法 2】



如圖，連接 PD、BF 且延長 AB 為 AG，

並令 $\angle BAH=\alpha$、$\angle BFH=\beta$，

則由弦切角、圓心角與圓周角的關係知：

$\angle ADP=2\alpha$、$\angle BCP=\angle BFP=\beta$、

$\angle PDC=2\beta$ 。

故可得知 $2\alpha+2\beta=90°$，即 $\alpha+\beta=45°$

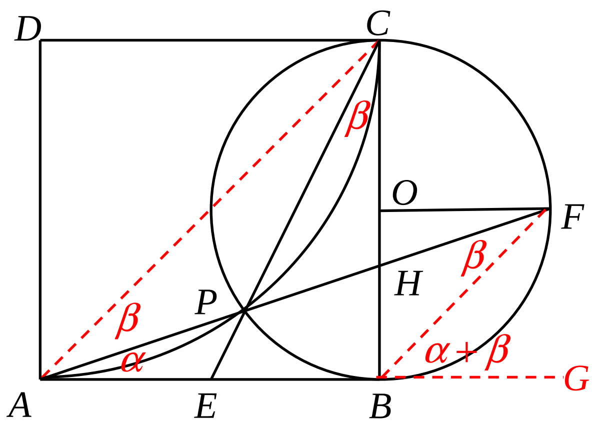
而 $\angle FBG=\alpha+\beta=45°$，

因此 $\angle FBO=90°-45°=45°$ 。

因 $OF=OB$，故 $\angle FBO=\angle BFO=45°$，

因此 $\angle BOF=90°$，所以 $AB//OF$。

【參考解法 3】



如圖，連接 AC、BF 且延長 AB 為 AG，並令 $\angle BAH=\alpha$ 、 $\angle BFH=\beta$，

則由弦切角與圓周角的關係知

$$\angle PAC=\angle BCP=\angle BFP=\beta 。$$

故知 $AC//BF$ 且 $\alpha+\beta=45°$，

因此 $\angle FBG=\alpha+\beta=45°$，

故 $\angle FBO=90°-45°=45°$。因 $OF=OB$，故 $\angle FBO=\angle BFO=45°$，因此 $\angle BOF=90°$，所以 $AB//OF$。

3. 若 n 為正整數使得乘積 $77777777\times n$ 之數碼全都是 1，試求 n 之最小值。

【參考解法】

可知 $77777777\times n=7\times 11111111\times n$。故若要使此乘積之數碼全為 1，則此乘積必為 11111111 的倍數，故知此乘積為 $\underbrace{111\cdots1}_{8k個}$，其中 k 為正整數。因此可知

$$7n=1\underbrace{0000000100000001\cdots00000001}_{k-1個00000001}$$

即 $1\underbrace{0000000100000001\cdots00000001}_{k-1個00000001}$ 為 7 的倍數。可知求 n 之最小值即為求 k 之最小值，而利用 7 的倍數判別方法逐一計算可知 k 最小為 3 才可使 $1\underbrace{0000000100000001\cdots00000001}_{k-1個00000001}$ 為 7 的倍數，即

$$7n=10000000100000001$$

$$n=\frac{10000000100000001}{7}=1428571442857143$$

答：1428571442857143