

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2012 年青少年數學國際城市邀請賽
參賽代表遴選決賽
個人賽試題

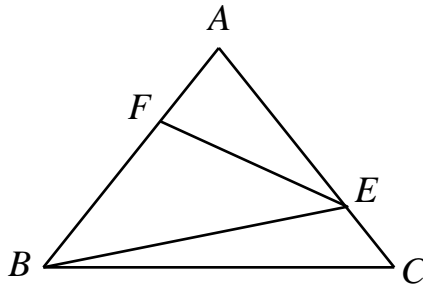
_____縣市_____國民中學_____年級 編號:_____ 姓名:_____ 性別: 男 女

作答時間:二小時

第一部分:填充題,每小題5分,共60分

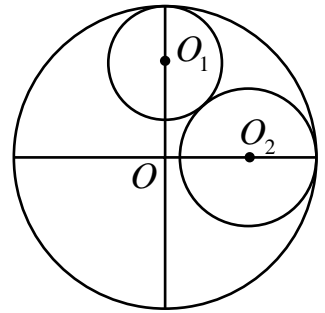
(注意:在試卷上作答,只需寫出答案,答案若為分數請化為最簡分數)

1. 有145個花盆要排成32排,若每排最少排1個花盆最多排8個花盆,那麼至少有_____排的花盆數相同。
2. 等腰三角形 ABC 中, $AB=AC=12$, E 為 AC 邊上的一點, F 為 AB 邊上的一點,如下圖所示。已知四邊形 $BCEF$ 的面積為三角形 AEF 面積的三倍,且 AF 的長為4,則 AE 的長為_____。

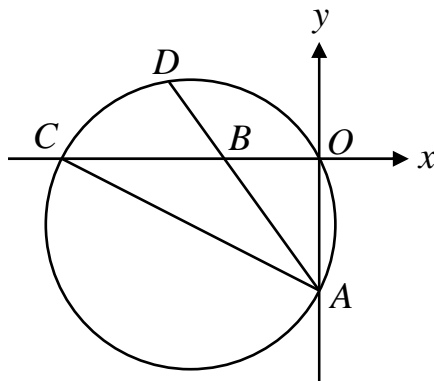


3. 甲、乙、丙、丁四人參加網球賽,任意兩人都恰進行一場比賽。結果沒有平手,勝場數最多者比勝場數最少者多勝兩場,甲的勝場數多過乙的勝場數,且乙丙對峙時由乙獲勝。則甲共勝了_____場。
4. 實數 a 、 b 滿足 $a^2+5a+5=5b^2+15b+9=0$,若 $ab \neq 3$,則 $\frac{a^2-ab}{b^2+ab}$ 之值為_____。
5. 把數碼1、2、3、4、5、6、7、8、9、0各恰用一次,組成兩個五位數 m 和 n ,當 m 和 n 相乘之積為最大時, $m+n$ 之值為_____。
6. 將1、2、3、4、5、6、7、8、9、10這十個正整數依照某一種順序排成一列,使得任意相鄰三個整數的和都不超過 n ,則滿足此條件的 n 之最小值為_____。

7. 圓 O_1 、圓 O_2 、圓 O 兩兩相切，且圓 O_1 與 O_2 的圓心分別在圓 O 的兩條互相垂直的直徑上，如右圖所示。已知圓 O 的半徑長為 α cm，且圓 O_1 與 O_2 面積之和的最小值為 $\beta\pi$ cm²，則 $\frac{\beta}{\alpha^2}$ 之值為_____。



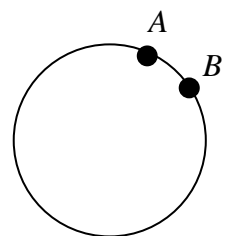
8. 點 B 、 C 在直角坐標系的 x 軸(負向)上，點 A 在 y 軸(負向)上，以 AC 為直徑的圓與 AB 的延長線交於點 D ，如下圖所示。已知 $AB=10$ 、 $AO > BO$ 、弧長 $CD =$ 弧長 AO ，且 AO 、 BO 的長度分別為二次方程式 $x^2 + kx + 48 = 0$ 的兩個實根，則點 D 的座標為_____。



9. 設 a_1 、 a_2 、 a_3 、 \dots 、 a_k 為整數，且 $0 \leq a_k \leq k$ 。若將正整數 2012 寫成一個關於階乘的多項式： $2012 = a_1 + a_2 \times 2! + a_3 \times 3! + \dots + a_n \times n!$ ，則 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 之值為_____。(註：其中 $k! = k \times (k-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ 稱為 k 階乘，例如 $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$)。

10. 設函數 $f(x)$ 滿足 $f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x \cdot f(x) + 2$ ，則 $f(9)$ 之值為_____。

11. 圓周上放有 n 枚棋子，其中 n 是 14 的倍數， B 點的棋子緊鄰 A 點的棋子，如圖所示。小傑首先拿走 B 點的棋子，然後依順時針方向每隔 1 枚拿走 2 枚棋子，這樣子操作連續轉了 10 圈，前 9 次都跨越過 A ，而在第 10 次即將跨越過 A 並要拿走其他棋子時，小傑發現圓周上總共剩下 20 多枚棋子，則此時圓周上共剩_____枚棋子。



12. 設 ka_k ($k = 1, 2, \dots, n$) 為 n 個相異的正整數，且滿足

$$3 = a_1 < 2a_2 < 3a_3 < \dots < na_n = 2419。$$

若此 n 個相異的正整數中任意 $n-1$ 個不同的數之算術平均數均為整數，則 n 的最大值為_____。

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

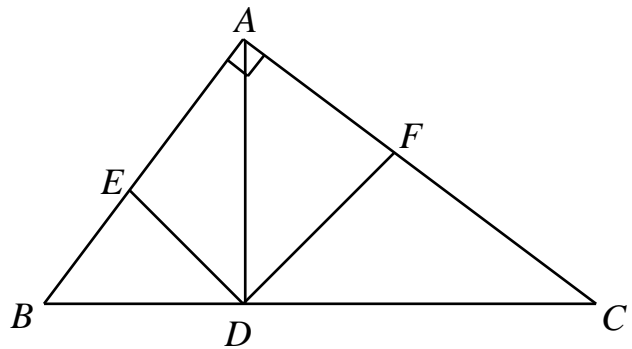
(注意：在試卷上作答，須詳列過程及說明理由)

1. 若有 8 位同學搭乘速度相同的兩輛計程車同時從同一地點走相同路線前往高鐵站，每輛車除司機以外都限乘 4 人。但其中一輛計程車在距離車站 15 公里處故障無法行駛。若這時只有另一輛計程車可以來回運送，且這輛計程車行駛的勻速為 60 km/h，人步行的勻速為 5 km/h，請問最少還需要多少分鐘才能讓這 8 位同學全部都到達高鐵站？

答：_____分鐘

2. 線段 AD 為直角三角形 ABC 斜邊 BC 上的高，直線 DE 為 $\angle ADB$ 的角平分線，直線 DF 為 $\angle ADC$ 的角平分線，如圖所示。已知線段 AB 、 AC 、 BC 之長分別為 15、20、25。

試求： $\triangle BDE$ 的面積 + $\triangle CDF$ 的面積 - 四邊形 $AEDF$ 的面積之值。



答：_____。

