# 2013年青少年數學國際城市邀請賽

## 參賽代表遴選初賽 個人賽試題

________縣市________國民中學____年級 編號：________ 姓名：_________

作答時間: 二 小 時　　　　　　　　　　　　　　　　　性別: □男 □女

### 第一部分：填充題，每小題5分，共60分

**(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)**

1. 從100到999之間的整數中，其個位數數碼和百位數數碼之差為3的數共有__________個。

答：__________

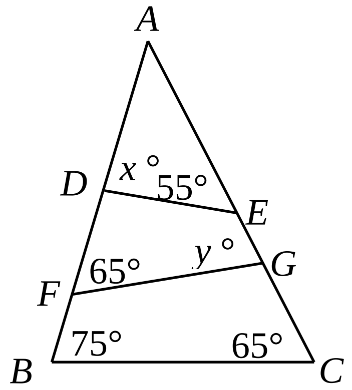
2. 算式 $3+33+333+\cdots+\underbrace{333\cdots333}_{2013\text{個}3}$ 之和的最後四個數碼為__________。

答：__________

3. 已知 $n-9$ 為正整數，且 $n-9$ 為 $n^3-300$ 的因數，則 $n$ 的最大值為_______。

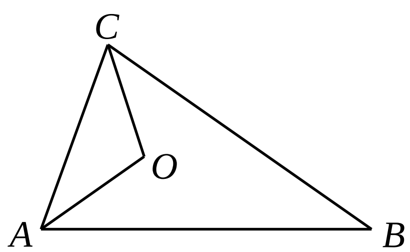
答：__________

4. 如下圖，在△$ABC$ 中，已知點 $D$、$F$ 為 $AB$ 邊上的兩個點，點 $E$、$G$ 為 $AC$ 邊上兩個點，連接 $DE$、$FG$。若各角之度數如圖所示標記，則 $x+y$ 之值為__________。




答：__________

5. 已知 $O$ 為△$ABC$ 的內心，若 $BC = AO + AC$ 且 $\angle ABC = 35°$，如圖所示。則 $\angle BAC =$ __________°。




答：__________

6. 從 1、3、5、7、9 五個奇數中選取四個不同的數 $p$、$q$、$r$、$s$，則$\dfrac{p}{q}+\dfrac{r}{s}$的最小值為＿＿＿＿＿。

答：＿＿＿＿＿＿＿＿

7. 設$\overline{a_1a_2\cdots a_9}$是由 1、2、3、…、9 九個數碼排列而成的九位數，其中每一個數碼恰只在$\overline{a_1a_2\cdots a_9}$中出現一次，若$\overline{b_1b_2\cdots b_9}$是由$\overline{a_1a_2\cdots a_9}$重新排列的任意一個九位數；則$\overline{a_1a_2\cdots a_9}$與$\overline{b_1b_2\cdots b_9}$的最大公因數為＿＿＿＿＿。

答：＿＿＿＿＿＿＿＿

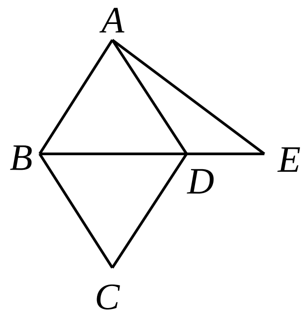
8. 已知函數 $f(x)=\begin{cases} f\left(f(x+7)\right), & x\le 25 \\ x-6, & x>25 \end{cases}$，則 $f(1)+f(2)+\cdots+f(25)$ =＿＿。

答：＿＿＿＿＿＿＿＿

9. 設 $k$ 為正整數且 $x$、$y$ 為整數，若方程$138x+222y=10^{2013}+k$有整數解，則 $k$ 的最小值為＿＿＿＿＿。

答：＿＿＿＿＿＿＿＿

10. 菱形 $ABCD$ 的一個頂點 $D$ 在三角形 $ABE$ 的邊 $BE$ 上，如下圖所示。已知線段 $AE$、$AB$、$BD$ 的長度分別比線段 $DE$ 的長度多了 13 cm、5 cm、4 cm，則線段 $DE$ 的長度為＿＿＿＿＿ cm。




答：＿＿＿＿＿＿＿＿

11. 某次數學競賽共有 20 道試題，給分方式如下：

每答對一道試題給 9 分；

對於每一道未作答的試題則給 4 分；

每答錯一道試題則給 1 分。

已知小明在此次競賽中的得分為 118 分，則他答錯＿＿＿＿＿道試題。

答：＿＿＿＿＿＿＿＿

12. 若$a=\dfrac{9}{17}$、$b=\dfrac{1}{4}$、$c=\dfrac{15}{68}$，則$\dfrac{a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$ =＿＿＿＿。

答：＿＿＿＿＿＿＿＿

## 第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

**(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)**

1. 若 $n$ 為正整數，則 $n!$ 表示前 $n$ 個連續正整數的乘積，即

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \cdots \times 2 \times 1$$，例如: $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$。

   已知 $m!$ 是 $2^{11} \times 3^{4} \times 5^{2}$ 的倍數，請問正整數 $m$ 的值至少為多少?

答：________________

2. 若 $a$ 為正整數，且已知一元二次方程 $(a-1)x^2 - cx + a = 0$ 有兩個正整數根，試求 $(a^c + c^a)(a^a + c^c)$ 之值。

答：________________

3. 點 $O$ 為$\triangle ABC$ 外接圓的圓心，由點 $B$ 作 $AC$ 的垂線、垂足為點 $D$，再延長 $BD$ 交圓 $O$ 於點 $P$；由點 $C$ 作 $AB$ 的垂線、垂足為點 $E$，再延長 $CE$ 交圓 $O$ 於點 $Q$，連接 $DE$、$PQ$，如下圖所示。

求證： ($a$) $DE // PQ$ (10 分)； ($b$) $OA \perp DE$ (10 分)。