

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2013 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選初賽 個人賽試題

_____縣市_____國民中學_____年級 編號：_____ 姓名：_____

作答時間：二小時

性別：男 女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1. 從 100 到 999 之間的整數中，其個位數數碼和百位數數碼之差為 3 的數共有_____個。

答：_____

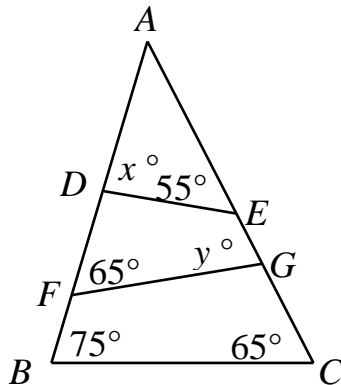
2. 算式 $3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{333\dots333}_{2013\text{個}3}$ 之和的最後四個數碼為_____。

答：_____

3. 已知 $n-9$ 為正整數，且 $n-9$ 為 $n^3 - 300$ 的因數，則 n 的最大值為_____。

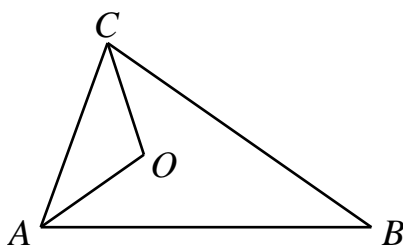
答：_____

4. 如下圖，在 $\triangle ABC$ 中，已知點 D 、 F 為 AB 邊上的兩個點，點 E 、 G 為 AC 邊上兩個點，連接 DE 、 FG 。若各角之度數如圖所標記，則 $x+y$ 之值為_____。



答：_____

5. 已知 O 為 $\triangle ABC$ 的內心，若 $BC = AO + AC$ 且 $\angle ABC = 35^\circ$ ，如圖所示。則 $\angle BAC =$ _____。



答：_____

6. 從 1、3、5、7、9 五個奇數中選取四個不同的數 p 、 q 、 r 、 s ，則 $\frac{p}{q} + \frac{r}{s}$ 的最小值為_____。

答：_____

7. 設 $\overline{a_1a_2\cdots a_9}$ 是由 1、2、3、...、9 九個數碼排列而成的九位數，其中每一個數碼恰只在 $\overline{a_1a_2\cdots a_9}$ 中出現一次，若 $\overline{b_1b_2\cdots b_9}$ 是由 $\overline{a_1a_2\cdots a_9}$ 重新排列的任意一個九位數；則 $\overline{a_1a_2\cdots a_9}$ 與 $\overline{b_1b_2\cdots b_9}$ 的最大公因數為_____。

答：_____

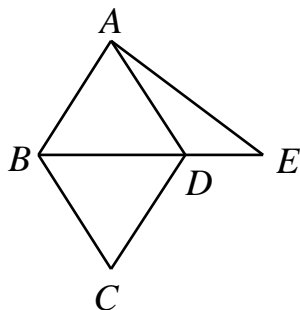
8. 已知函數 $f(x) = \begin{cases} f(f(x+7)), & x \leq 25 \\ x-6, & x > 25 \end{cases}$ ，則 $f(1) + f(2) + \cdots + f(25) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答：_____

9. 設 k 為正整數且 x 、 y 為整數，若方程 $138x + 222y = 10^{2013} + k$ 有整數解，則 k 的最小值為_____。

答：_____

10. 菱形 $ABCD$ 的一個頂點 D 在三角形 ABE 的邊 BE 上，如下圖所示。已知線段 AE 、 AB 、 BD 的長度分別比線段 DE 的長度多了 13 cm、5 cm、4 cm，則線段 DE 的長度為_____ cm。



答：_____

11. 某次數學競賽共有 20 道試題，給分方式如下：

每答對一道試題給 9 分；

對於每一道未作答的試題則給 4 分；

每答錯一道試題則給 1 分。

已知小明在此次競賽中的得分為 118 分，則他答錯_____道試題。

答：_____

12. 若 $a = \frac{9}{17}$ 、 $b = \frac{1}{4}$ 、 $c = \frac{15}{68}$ ，則 $\frac{a^2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) + b^2\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) + c^2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}{a\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答：_____

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 若 n 為正整數，則 $n!$ 表示前 n 個連續正整數的乘積，即

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \cdots \times 2 \times 1, \text{ 例如: } 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24。$$

已知 $m!$ 是 $2^{11} \times 3^4 \times 5^2$ 的倍數，請問正整數 m 的值至少為多少？

答：_____

2. 若 a 為正整數，且已知一元二次方程 $(a-1)x^2 - cx + a = 0$ 有兩個正整數根，試求 $(a^c + c^a)(a^a + c^c)$ 之值。

答：_____

3. 點 O 為 $\triangle ABC$ 外接圓的圓心，由點 B 作 AC 的垂線、垂足為點 D ，再延長 BD 交圓 O 於點 P ；由點 C 作 AB 的垂線、垂足為點 E ，再延長 CE 交圓 O 於點 Q ，連接 DE 、 PQ ，如下圖所示。
 求證： (a) $DE \parallel PQ$ (10分)； (b) $OA \perp DE$ (10分)。

