

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2013 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選複賽試題

_____縣市_____國民中學_____年級 編號：_____ 姓名：_____

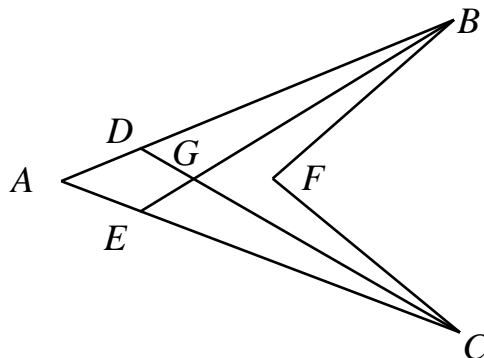
作答時間：二小時

性別：男 女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

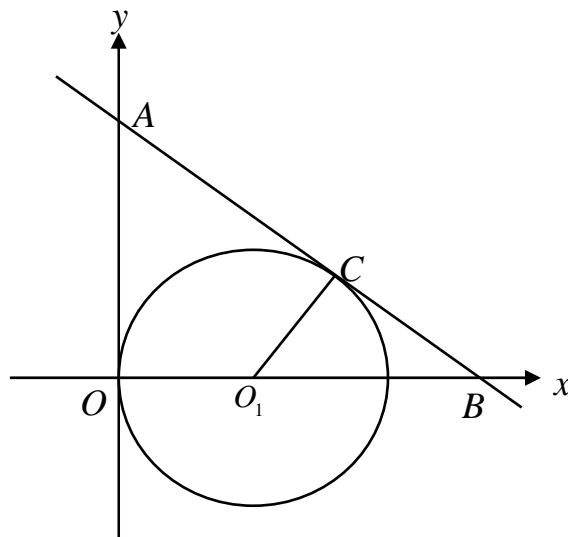
1. 已知實數 $x > 0$ ，若 $xy = 21$ 、 $yz = 132$ 與 $zx = 77$ ，則 x 之值為_____。
2. 小傑共有 216 個 $1\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$ 的正立方體積木。請問小傑利用這些積木共可以拼成_____種不同的實心長方體。
3. 已知 a, b 均為正整數且 $a > b$ ，若 $(a+1)(b+1) = 18$ 且 $a^2b + ab^2 = 70$ ，則 $a + 2b$ 之值為_____。
4. 已知方程 $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{x} = \frac{1}{5+7+x}$ 有兩個實根，則這兩根之和為_____。
5. 若三個質數的乘積等於這三個質數和的 11 倍，令這三個質數中最大的數為 α ，則 α 所有可能值的總和為_____。
6. 如下圖，已知 $\angle BAC = 49^\circ$ ， BE 為 $\angle ABF$ 的角平分線， CD 為 $\angle FCA$ 的角平分線， CD 與 BE 交於點 G 且 $\angle BGC = 68^\circ$ ，則 $\angle BFC$ 的度數為_____。



7. 令 $N = 7 + 77 + 777 + \dots + \underbrace{777\dots777}_{2013\text{個}7}$ ，則 N 被 37 除所得的餘數是_____。

8. 設方程 $12x + xy = 12y$ 總共有 n 組正整數解的數對 (x, y) ，若它們分別為 (a_1, b_1) 、 (a_2, b_2) 、 \dots 、 (a_n, b_n) ，其中 $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$ ，則 $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$ 之值為_____。

9. 如下圖，在直角坐標系上，直線 AB 的方程為 $y = -\frac{3}{4}x + 2$ ，它與 y 軸相交於點 A ，與 x 軸相交於點 B 。已知圓 O_1 的圓心在 x 軸上，且圓 O_1 與直線 AB 相切於點 C ，而與 y 軸相切於原點 O ，則點 C 的座標為_____。



10. 設 a, b 均為正整數，已知 a, b 的最小公倍數為 $2^5 \times 3^2 \times 7 \times 11$ ，則滿足這樣條件的數對 (a, b) 共有_____組。

11. 平面上有九個點，其中任意三點皆不共線，在這九個點之間恰好畫出連接這些點的 20 條線段。若這些線段都沒有構成任何的三角形(任意三點必存在兩點沒有線段連接)，請問其中一個點最多能連接出_____條線段？

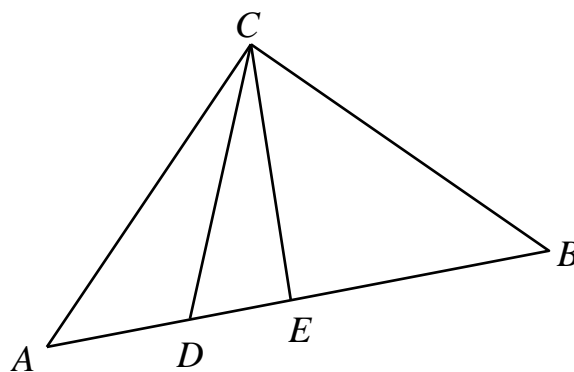
12. $\triangle ABC$ 為正三角形， P 為 $\triangle ABC$ 內部之一點，若 $PA = 10$ cm， $PB = 8$ cm， $PC = 6$ cm，則 $\triangle ABC$ 的面積為_____ cm^2 。

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在試卷上作答，須詳列過程及說明理由)

1. 設 n 為正整數且 $1 \leq n \leq 47$ ，證明存在一個由 n 個 1 組成的正整數 $\underbrace{111 \cdots 111}_{n \text{ 個}}$ 為 47 的倍數。

2. 在下圖中，已知 $\angle ACD = \angle DCE$ ， $AC = BD$ 且 $2\angle ACD + 3\angle CAD = 180^\circ$ ，求證 $\angle BCE = \angle CAD$ 。



3. 設 a, b 為實數，且方程 $|x^2 + ax + b| = 2$ 有三個不相等的實根。若這三個不相等的實根恰為一個直角三角形三條邊的邊長，請分別求出 a 與 b 的值。

答： $a =$ _____ $b =$ _____