2013 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選複賽試題

________縣市________國民中學____年級　編號：________　姓名：__________

作答時間: 二 小 時　　　　　　　　　　　　　　　　性別:☐男 ☐女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1. 已知實數 $x>0$，若 $xy=21$、$yz=132$ 與 $zx=77$，則 x 之值為____________。

【參考解法】

因 $xy=3\times7$ 、 $yz=2^2\times3\times11$ 、 $zx=7\times11$，故三式相乘後可得

$$(xyz)^2=2^2\times3^2\times7^2\times11^2，$$

即 $xyz=2\times3\times7\times11$，因此 $x=\dfrac{xyz}{yz}=\dfrac{2\times3\times7\times11}{2^2\times3\times11}=\dfrac{7}{2}$。

答：$\dfrac{7}{2}$

2. 小傑一共有 216 個大小為 1 cm × 1 cm × 1 cm 的小立方塊積木。請問小傑利用這些積木共可以拼成_________種不同的實心長方體。

【參考解法】

長方體的體積為長×寬×高，故觀察216分解成三個正整數之乘積的情形。可知

$216=1\times1\times216$

$=1\times2\times108=1\times3\times72=1\times4\times54=1\times6\times36=1\times8\times27=1\times9\times24=1\times12\times18$

$=2\times2\times54=2\times3\times36=2\times4\times27=2\times6\times18=2\times9\times12$

$=3\times3\times24=3\times4\times18=3\times6\times12=3\times8\times9$

$=4\times6\times9$

$=6\times6\times6$

故知總共有19種不同的實心長方體。　　答：19

3. 設 a、b 均為正整數且 $a>b$，若 $(a+1)(b+1)=18$ 、 $a^2b+ab^2=70$ ，則 $a+2b$ 之值為________。

【參考解法】

因a、b均為正整數，故可知$a+1>1$且$b+1>1$，再由$a>b$及將18寫成二個大於1之正整數乘積的方式為9×2 、 6×3便可以得知$(a, b)=(8, 1)$或$(5, 2)$。

若$(a, b)=(8, 1)$，則 $a^2b+ab^2=72$ ，與條件不合；

若$(a, b)=(5, 2)$，則 $a^2b+ab^2=70$ ，滿足條件，故知$a+2b=5+2\times2=9$ 。

答：9

4. 已知方程式 $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{x}=\frac{1}{5+7+x}$ 有兩個實根，則這兩根之和為__________。

【參考解法】

顯然 x 不等於0、-12。 可將原式化簡如下：

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{x}=\frac{1}{5+7+x}$$

$$\frac{7x+5x+35}{35x}=\frac{1}{12+x}$$

$$(12x+35)(12+x)=35x$$

$$12x^2+144x+420=0$$

故利用根與係數的關係可知兩實根之和為 $-\frac{144}{12}=-12$。

答：-12

5. 若 3 個質數的乘積等於這 3 個質數和的 11 倍，令這 3 個質數中最大的數為 α，則 α 所有可能值的和為________。

【參考解法】

令這三個質數為 p、q、r，則由題意可知 $pqr=11(p+q+r)$。此時知 p、q、r 這三個質數中有一個為11，不妨令 $p=11$ 且 $q<r$，則有 $qr=11+q+r$，因式分解後即可得知 $(q-1)(r-1)=12=1\times12=2\times6=3\times4$：

(i) $q-1=1$、$r-1=12$，此時 $q=2$、$r=13$，故 $\alpha=13$；

(ii) $q-1=2$、$r-1=6$，此時 $q=3$、$r=7$，故 $\alpha=11$；

(iii) $q-1=3$、$r-1=4$，此時 $q=4$、$r=5$，與 p、q、r 為質數矛盾，不合。

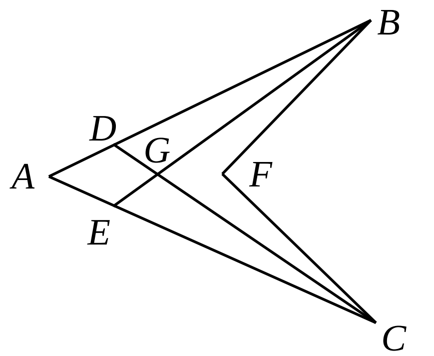
因此 α 所有可能值的和為11+13=24。

答：24

6. 如下圖，已知 $\angle BAC=49°$，BE 為 $\angle ABF$ 的角平分線，CD 為 $\angle FCA$ 的角平分線，CD 與 BE 交於點 G 且 $\angle BGC=68°$，則 $\angle BFC$ 的度數為__________。

【參考解法】

$$\begin{aligned}\angle BFC &= \angle BAC+\angle ABF+\angle ACF\\ &= \angle BAC+2\left(\frac{1}{2}\angle ABF+\frac{1}{2}\angle ACF\right)\\ &= \angle BAC+2(\angle BGC-\angle BAC)\\ &= 2\angle BGC-\angle BAC\\ &= 2\times68°-49°\\ &= 87°\end{aligned}$$



答：87

7. 設 $N=7+77+777+\cdots+\underbrace{777\cdots777}_{2013\text{個}7}$，則 N 被 37 除所得的餘數是＿＿＿＿＿＿＿。

【參考解法】

由 $111=37\times 3$ 可知：

$$\begin{aligned} N&=7+77+777+\cdots+\underbrace{777\cdots777}_{2013\text{個}7}\\ &\equiv\underbrace{(7+77+0)+(7+77+0)+\cdots+(7+77+0)}_{671\text{組}(7+77+0)}\\ &\equiv 84\times 671\\ &\equiv 10\times 5\\ &\equiv 13 \pmod{37} \end{aligned}$$

即N被37除所得的餘數是13。

答：13

8. 設方程 $12x+xy=12y$ 的正整數解(x,y)一共有 n 個，分別為(a_1,b_1)、(a_2,b_2)、$\cdots$、(a_n,b_n)，其中 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$，則 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$ 之值為＿＿＿＿＿＿＿。

【參考解法1】

可將$12x+xy=12y$因式分解後改寫為$(x-12)(y+12)=-144=-1\times 144=-2\times 72=-3\times 48=-4\times 36=-6\times 24=-8\times 18=-9\times 16=-12\times 12$。因$x$、$y$皆為正整數，故可得知$y+12>0$、$x-12<0$，此時可得以下的解：

(1) $12+y=144$：此時$y=132$、$x-12=-1$，故$x=11$；

(2) $12+y=72$：此時$y=60$、$x-12=-2$，故$x=10$；

(3) $12+y=48$：此時$y=36$、$x-12=-3$，故$x=9$；

(4) $12+y=36$：此時$y=24$、$x-12=-4$，故$x=8$；

(5) $12+y=24$：此時$y=12$、$x-12=-6$，故$x=6$；

(6) $12+y=18$：此時$y=6$、$x-12=-8$，故$x=4$；

(7) $12+y=16$：此時$y=4$、$x-12=-9$，故$x=3$。

(8) $12+y=12$：此時$y=0$，不合。

因此$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\dfrac{11+10+9+8+6+4+3}{132+60+36+24+12+6+4}=\dfrac{51}{274}$

【參考解法2】

$x=\dfrac{12y}{12+y}=12-\dfrac{144}{12+y}$，因此$x$為正整數的充要條件為$\dfrac{144}{12+y}$為小於12的正整數。因$144=2^4\times 3^2$，故可得以下的解：

(1) $12+y=144$：此時$y=132$、$\dfrac{144}{12+y}=1$，故$x=11$；

(2) $12+y=72$：此時 $y=60$、$\dfrac{144}{12+y}=2$，故 $x=10$；

(3) $12+y=48$：此時 $y=36$、$\dfrac{144}{12+y}=3$，故 $x=9$；

(4) $12+y=36$：此時 $y=24$、$\dfrac{144}{12+y}=4$，故 $x=8$；

(5) $12+y=24$：此時 $y=12$、$\dfrac{144}{12+y}=6$，故 $x=6$；

(6) $12+y=18$：此時 $y=6$、$\dfrac{144}{12+y}=8$，故 $x=4$；

(7) $12+y=16$：此時 $y=4$、$\dfrac{144}{12+y}=9$，故 $x=3$。

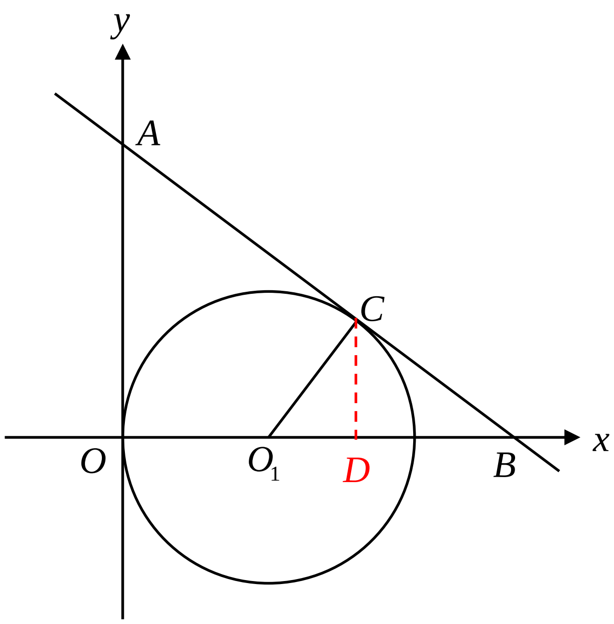
(8) $12+y\le 12$：此時 $y\le 0$，不合。

因此 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\dfrac{11+10+9+8+6+4+3}{132+60+36+24+12+6+4}=\dfrac{51}{274}$

答：$\dfrac{51}{274}$

9. 如下圖，在直角坐標系中，直線 AB 交 y 軸於點 A，交 x 軸於點 B，其方程為 $y=-\dfrac{3}{4}x+2$。已知圓 O_1 的圓心是 x 軸上一點，且圓 O_1 與直線 AB 切於點 C，與 y 軸切於原點 O。則點 C 的座標為__________。

【參考解法】



因圓 O_1 與直線 AB 切於點 C，故知 $O_1C\perp AB$，因此 $\triangle OAB \sim \triangle CO_1B$。而可經由計算得知 A 的座標為 $(0, 2)$、B 的座標為 $(\dfrac{8}{3}, 0)$，因此利用勾股定理可得知 $OA：OB：AB=3：4：5$，換言之，$O_1C：BC：O_1B=3：4：5$，故可令 $O_1O=O_1C=3a$、$BC=4a$、$O_1B=5a$。因為 $OB=O_1O+O_1B$，所以知 $3a+5a=\dfrac{8}{3}$，即 $a=\dfrac{1}{3}$。

【方法1】現可知 $O_1O=O_1C=3a=1$。作 $CD\perp O_1B$ 交 O_1B 於 D 點，則可知再由 $O_1C\perp AB$ 可知 $\triangle DO_1C \sim \triangle CO_1B$，因此 $CD=\dfrac{BC}{O_1B}\times O_1C=\dfrac{4}{5}$、$O_1D=\dfrac{O_1C}{O_1B}\times O_1C=\dfrac{3}{5}$，故知點 C 的座標為 $(1+\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5})=(\dfrac{8}{5}, \dfrac{4}{5})$。

【方法2】可知O_1的座標為(0, 1)。接著再由$O_1C \perp AB$可得知直線O_1C的方程為$y=\frac{4}{3}x+m$，代入O_1的座標便可得$m=-\frac{4}{3}$，即直線O_1C的方程為$y=\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}$。

而可知點C的座標即為方程組$\begin{cases} y=-\frac{3}{4}x+2 \\ y=\frac{4}{3}x-\frac{4}{3} \end{cases}$的解，解之可得$(x, y)=(\frac{8}{5}, \frac{4}{5})$。

答：$(\frac{8}{5}, \frac{4}{5})$

10.設 a、b 為二正整數，已知這兩數的最小公倍數為$2^5\times 3^2\times 7\times 11$，則滿足這樣條件的數對$(a, b)$共有__________組。

【參考解法】

可知a、b中至少有一數的因數分解式中有2^5、至少有一數的因數分解式中有3^2、至少有一數的因數分解式中有7、至少有一數的因數分解式中有11。

(i) 考慮2^5在數對(a, b)中分配的情況：
$(2^5, 2^5)$、$(2^5, 2^4)$、$(2^5, 2^3)$、$(2^5, 2^2)$、$(2^5, 2)$、$(2^5, 1)$、$(2^4, 2^5)$、$(2^3, 2^5)$、$(2^2, 2^5)$、$(2, 2^5)$、$(1, 2^5)$等共11種情況；

(ii) 考慮3^2在數對(a, b)中分配的情況：
$(3^2, 3^2)$、$(3^2, 3)$、$(3^2, 1)$、$(3, 3^2)$、$(1, 3^2)$ 等共5種情況；

(iii) 考慮7在數對(a, b)中分配的情況：
(7, 7)、(7, 1)、(1, 7)等共3種情況；

(iv) 考慮11在數對(a, b)中分配的情況：
(11, 11)、(11, 1)、 (1, 11) 等共3種情況。

這樣的數對(a, b)為從2^5、3^2、7、11中各取一種分配情況後相乘，因此這樣的數對(a, b)共有$11\times 5\times 3\times 3=495$組。

答：495

11.假設平面上有 9 個點，其中任意三點皆不共線，以及 20 個連接這些點的線段。若這些線段沒有構成任何的三角形(任意三點必存在兩點沒有線段連接)。試問一個點最多能連接__________條線段。

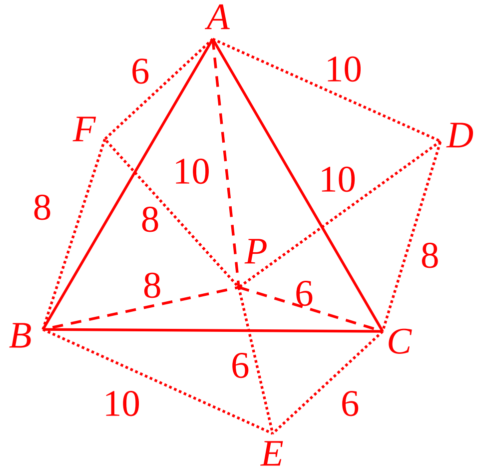
【參考解法】

令點 A 為這 9 個點中的其中一點。若點 A 有連接 6 條線段，則知點 A 與 6 個點有線段連接、2 個點沒有線段連接。因這些線段沒有構成三角形，故可推知與點 A 有線段連接的 6 個點彼此之間不能有線段相連，因此線段總數至多有 $6+6\times 2=18$ 條，與共有 20 條線段矛盾。因此一個點最多能連接 5 條線段，可利用以下方式完成：將 9 個點分成兩組，一組有 4 個點、另一組有 5 個點。同組內的點互不相連，僅連接不同組之間的點，則恰可畫出 4×5=20 條線段，且這些線段皆無法形成三角形。可知有 4 個點的這一組，每一點都連接 5 條線段。

答：5

12.$\triangle ABC$ 為正三角形，P 為$\triangle ABC$ 內部之一點，若 $PA = 10$ cm，$PB = 8$ cm，$PC = 6$ cm，則 $\triangle ABC$ 的面積為__________cm^2。

【參考解法】



如圖，以點A為中心，旋轉$\triangle APB$至$\triangle ADC$。此時可以知道CD=8 cm、AD=10 cm 且$\angle PAD = \angle PAC + \angle CAD = \angle PAC + \angle BAP = \angle BAC = 60°$，因此$PD$=10 cm，故知$\triangle PAD$為正三角形、$\triangle PDC$為直角三角形，因此四邊形$APCD$的面積為$\frac{1}{2}\times 6\times 8+\frac{\sqrt{3}}{4}\times 10^2 = 24+25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$。

依相同方式，分別以點C為中心旋轉$\triangle APC$至$\triangle BEC$、以點B為中心旋轉$\triangle CPB$至$\triangle AFB$，則利用相同推論方式可知：

$$\text{四邊形}CPBE\text{的面積為}\frac{1}{2}\times 6\times 8+\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2 = 24+9\sqrt{3}\ \text{cm}^2\text{、}$$

$$\text{四邊形}APBF\text{的面積為}\frac{1}{2}\times 6\times 8+\frac{\sqrt{3}}{4}\times 8^2 = 24+16\sqrt{3}\ \text{cm}^2\text{，}$$

故六邊形$AFBECD$的面積為$72+50\sqrt{3}$。而由構成六邊形$AFBECD$的方式可知其面積為$\triangle ABC$的面積的2倍，因此$\triangle ABC$的面積為$36+25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$。

答：$36+25\sqrt{3}$

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在試卷上作答，須詳列過程及說明理由)

1. 設 n 為正整數且$1\le n\le 47$，證明存在一個由 n 個 1 組成的正整數$\underbrace{111\cdots111}_{n\text{個}}$為 47 的倍數。

【參考解法1】

假設這樣的n不存在，則這樣的正整數除以47所得的餘數只可能是 1、2、…、46，利用抽屜原理可得知這47個數中必存在二個數被47除後所得之餘數相同，不妨令這二個正整數分別為$M = \underbrace{111\cdots111}_{m\text{個}1}$、$N = \underbrace{111\cdots111}_{n\text{個}1}$，其中$1\le n< m< 47$。

因 M、N 被47除後所得之餘數相同，故可得知$M - N = \underbrace{111\cdots111}_{m-n\text{個}1}\underbrace{000\cdots000}_{n\text{個}0}$

$= \underbrace{111\cdots111}_{m-n\text{個}1}\times 10^n$必為47的倍數，可推知$\underbrace{111\cdots111}_{m-n\text{個}1}$為47的倍數，其中$m-n<47$，矛盾。故知假設錯誤，即存在一個由$n$個1組成的正整數$111\cdots111$ $(1\le n\le 47)$是47的倍數。

【參考解法2】

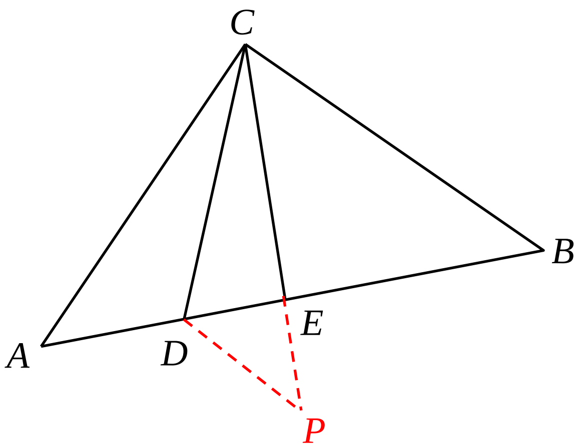
直接逐一計算，可得知當$n = 46$時，這樣的正整數是47的倍數：

1,111,111,111,111,111,111,111,111,111,111,111,111,111,111,111,111 ÷ 47

= 23,640,661,938,534,278,959,810,874,704,491,725,768,321,513

2. 如圖，已知$\angle ACD = \angle DCE$、$AC = BD$ 且 $2\angle ACD + 3\angle CAD = 180°$，求證 $\angle BCE = \angle CAD$。

【參考解法】



延長CE，在此延長線上取一點P，使得 $CP = CA$。

連接DP，則由 $\angle ACD = \angle DCE$、
$CD = CD$、
$AC = PC$

知$\triangle ADC \cong \triangle PDC$，

故$\angle CAD = \angle CPD$。

而因$\angle CDE = \angle CAD + \angle ACD$，

故

$$\begin{aligned}\angle EDP &= \angle CDP - \angle CDE\\ &= \angle CDA - (\angle CAD + \angle ACD)\\ &= (180° - (\angle CAD + \angle ACD)) - (\angle CAD + \angle ACD)\\ &= 180° - 2(\angle CAD + \angle ACD)\\ &= \angle CAD\\ &= \angle EPD\end{aligned}$$

故知$DE = PE$。

再因為$PC = AC = BD$，故可得知 $CE = BE$，因此$\angle BCE = \angle EBC$。

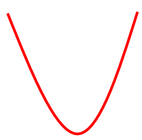
【方法1】因為$\angle CEB = \angle ACD + \angle DCE + \angle CAD = 2\angle ACD + \angle CAD$，故可得知 $\angle BCE = \dfrac{1}{2}(180° - \angle CEB) = \dfrac{1}{2}(180° - 2\angle ACD - \angle CAD) = \angle CAD$。

【方法2】由$DE : BE = PE : CE$、$\angle DEP = \angle BEC$ 可知 $\triangle DEP \sim \triangle BEC$，因此 $\angle BCE = \angle EPD = \angle CAD$。

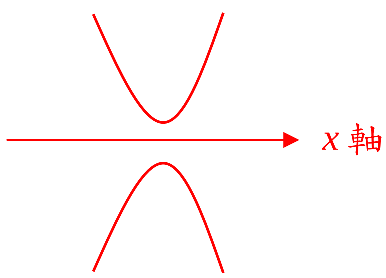
3. 設 a、b 為實數，且方程 $|x^2 + ax + b| = 2$ 有三個不相等的實根。若這三個不相等的實根恰為一個直角三角形三條邊的邊長，請分別求出 a 與 b 的值。

【參考解法1】

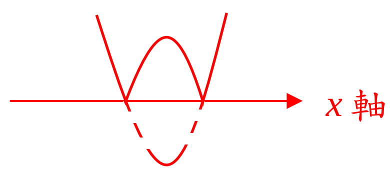
拋物線 $y = x^2 + ax + b$ 的圖形應為



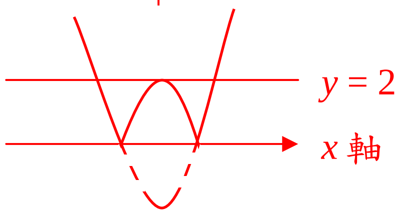
可判斷出$|x^2 + ax + b| = 2$的圖形應與 x 軸對稱，而可能如下圖之一：



或



因$|x^2+ax+b|=2$ 有三個不相等的實根，故知圖形為上右圖的形式，即



所以知 $y=x^2+ax+b$ 的頂點之 y 座標為-2。可令 $y=x^2+ax+b$ 的頂點之座標為$(m,\ -2)$，則有 $y=x^2+ax+b=(x-m)^2-2$ 。此時計算此拋物線與 $y=2$ 的交點：

$$(x-m)^2-2=2$$
$$(x-m)^2=4$$
$$x=\pm 2+m$$

因此知$|x^2+ax+b|=2$的三個實根為$2+m$、m及$-2+m$ 。因其恰為一個直角三角形的三個邊長，而$2+m>m>-2+m>0$，故知

$$(-2+m)^2+m^2=(2+m)^2$$
$$m^2-4m+4+m^2=m^2+4m+4$$
$$m^2-8m=0$$

所以$m=8$，即 $y=x^2+ax+b=(x-8)^2-2=x^2-16x+62$ ，故$a=-16$、$b=62$。

【參考解法2】由方程 $|x^2+ax+b|=2$ 得$\begin{cases} x^2+ax+b=2 & (*1) \\ x^2+ax+b=-2 & (*2) \end{cases}$

可知方程 (*1)、(*2) 的判別式分別為 $\Delta_1=a^2-4b+8$ 、$\Delta_2=a^2-4b-8$ 。

因原方程有三個不相等的實根，方程(*1)與(*2)無公共根，故知方程(*1)與(*2)必有一個方程有兩個相異實根，而另一個方程有兩相等實根。

因 $\Delta_1=a^2-4b+8>\Delta_2=a^2-4b-8$，故可得 $\Delta_1>0$ 、$\Delta_2=0$，即$a^2-4b-8=0$ 。

設方程(*1)的兩相異實根為 x_1 、x_2 ，方程(*2)的根為 x_3 ，則有$x_1+x_2=-a$ ，而x_1 、x_2 中必有一個大於x_3而另一個小於 x_3。否則$x_1+x_2>-a$ 或 $x_1+x_2<-a$ 。

不失一般性可設$x_1>x_3>x_2$，由假設知 $x_1{}^2-x_2{}^2=x_3{}^2$，即 $(x_1+x_2)(x_1-x_2)=x_3{}^2$ ，故

$$-a\sqrt{a^2-4(b-2)}=\left(-\frac{a}{2}\right)^2$$

$$-a\sqrt{a^2-4b+8}=\frac{a^2}{4}$$

可知 $a<0$ (若$a=0$，則$x_3=0$與題目假設矛盾；若$a>0$，則$x_1+x_2=-a<0$，亦與題目假設矛盾)，又已證得$a^2-4b=8$，故知$\dfrac{a^2}{16}=a^2-4b+8=16$，即可得

$a=-16$ 、$b=\dfrac{a^2-8}{4}=\dfrac{(-16)^2-8}{4}=62$ 。

答：$a=-16$、$b=62$