

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 [ccmp@seed.net.tw](mailto:ccmp@seed.net.tw)

**Notice:**

**Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.**

**Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN [ccmp@seed.net.tw](mailto:ccmp@seed.net.tw)**

# 2013 年青少年數學國際城市邀請賽

## 參賽代表遴選決賽試題

\_\_\_\_\_縣市\_\_\_\_\_國民中學\_\_\_\_\_年級 編號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

作答時間：二小時

性別：男 女

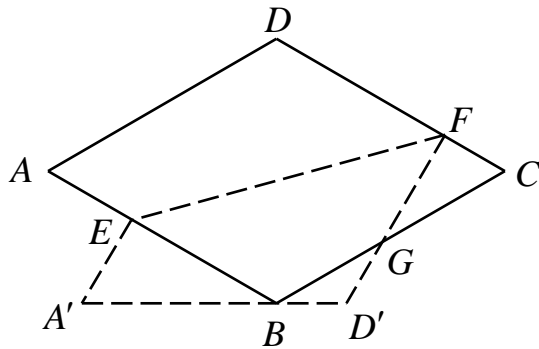
第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

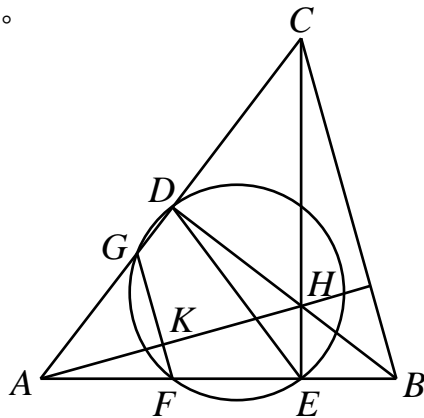
1. 設  $A = \frac{16 \times 72 + 17 \times 73 + 18 \times 74 + 19 \times 75}{16 \times 71 + 17 \times 72 + 18 \times 73 + 19 \times 74} \times 150$ ，則  $A$  的整數部分的值為\_\_\_\_\_。
2. 將一個數的數碼相加得到另一個數，再將所得的數之數碼相加得到另一個數，直到所得結果為一位數為止，我們稱最後的值為這個數的「數碼值」。則從 1 至 2013 共有\_\_\_\_\_個數之數碼值為 1。
3. 小丁買了一瓶漱口水，上面標示每一次的正確使用量為瓶蓋容量的  $\frac{1}{3}$ ；小丁剛買來時，誤將  $\frac{1}{3}$  看成  $\frac{1}{2}$ 。在使用  $5n$  次後才發現錯誤(其中  $n$  為正整數)，此時漱口水已剩原來的  $\frac{n-1}{n}$ 。若往後小丁依正確方式使用，一直到用完時又使用  $21n+6$  次，則該瓶漱口水的體積是漱口水瓶蓋容量的\_\_\_\_\_倍。
4. 將 1、3、5、...、103 這 52 個奇數，以兩個數分為一組，任意分為 26 組。令每組數中的較大數為  $a$ ，較小數為  $b$ ，每組均計算  $|a-b|+2a+b$  之值，共得 26 個值，則這 26 個值的和最大值為\_\_\_\_\_。
5. 設  $S = \{1, 2, 3, \dots, 2013\}$ ，若從  $S$  中最多可選出  $k$  個整數  $a_1, a_2, \dots, a_k$ ，使得這  $k$  個數中任何兩數之和都不能被它們的差整除，則  $k$  之值為\_\_\_\_\_。
6. 若數列  $\{x_n\}$  的首項  $x_1 > 0$ ，且對任意自然數  $n$ ，恆有  $S_n - \frac{1}{x_n} = x_n - S_n$ ，其中符號  $S_n$  表示前  $n$  項之和，則  $S_{2013}^2$  之值為\_\_\_\_\_。
7. 設  $m$  與  $n$  為相異正整數，其中  $m < 20$  且  $n$  不為 1，若有一組數對  $(m, n)$  使得  $|2^m - 5^n| = 3$ ，則此一組數對  $(m, n) =$ \_\_\_\_\_。
8. 若  $N$  是由數碼 2、0、1、3 所組成且沒有三個數碼 3 連續地排在一起的數，我們稱  $N$  為「幸運數」，例如 2013、20133 即為幸運數，而 33303、333321 便不是幸運數。則在六位數中，共有\_\_\_\_\_個幸運數。

9. 已知正整數 $a$ 、 $b$ 滿足 $(3a+b)^2 + 6a - 2b - 1544 = 0$ ，則 $a+b$ 之值為\_\_\_\_\_。

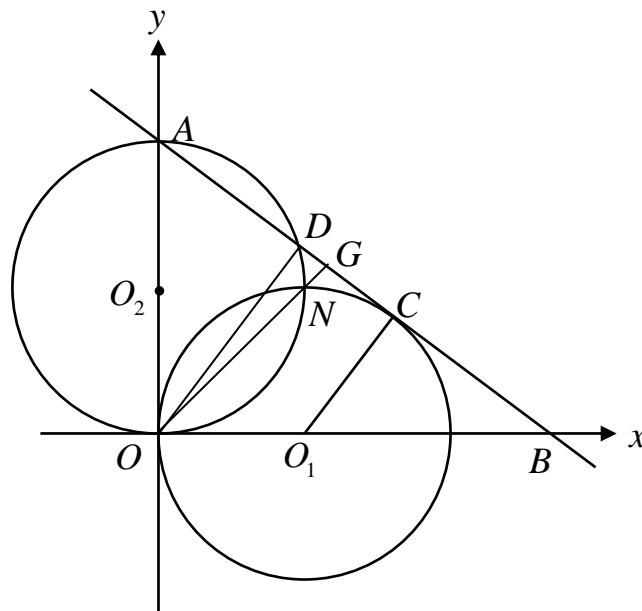
10. 如下圖，已知菱形紙片 $ABCD$ 的 $\angle A = 60^\circ$ ，將紙片摺疊讓 $A$ 、 $D$ 分別落在點 $A'$ 、 $D'$ 處，且使得 $B$ 點在線段 $A'D'$ ，已知 $EF$ 為摺痕，若 $D'F \perp CD$ 時，則 $\frac{CF}{FD} =$ \_\_\_\_\_。



11. 在銳角 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB$ 邊上的高 $CE$ 與 $AC$ 邊上的高 $BD$ 交於 $H$ ，以 $DE$ 為直徑的圓與 $AB$ 、 $AC$ 分別交於點 $F$ 、 $G$ ，而 $FG$ 與 $AH$ 交於 $K$ ；若 $BC=25$ 、 $BD=20$ 、 $BE=7$ ，則 $AK$ 的長為\_\_\_\_\_。



12. 如下圖，在直角坐標系中，直線 $AB$ 交 $y$ 軸於點 $A$ ，交 $x$ 軸於點 $B$ ，其方程為 $y = -\frac{3}{4}x + 2$ 。已知圓 $O_1$ 的圓心是 $x$ 軸上一點，且圓 $O_1$ 與直線 $AB$ 切於點 $C$ ，與 $y$ 軸切於原點 $O$ 。若以 $AO$ 為直徑作圓 $O_2$ ，交直線 $AB$ 於點 $D$ ，交圓 $O_1$ 於點 $N$ ，連接 $ON$ 並延長交 $CD$ 於點 $G$ ，則 $\triangle ODG$ 的面積\_\_\_\_\_。



## 第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 在一個圓周上寫著若干個非零整數，且每個正數為其兩側相鄰之數的和、而每個負數與其兩側相鄰之數的和為 0。設所有正數的總和為  $P$ ，所有負數的總和為  $N$ ，試求可能滿足等式  $P+aN=0$  的  $a$  值並在圓周上寫出一組非零整數使這些整數滿足前述條件。

2. 設  $r$  為有理數，試求所有  $r$  的值使得方程  $rx^2 + (r+2)x + r-1=0$  的根全都是整數根。

3. 在 $\triangle ABC$ 的 $BC$ 邊上取一點 $K$ ，已知 $\triangle ABK$ 、 $\triangle ACK$ 的內切圓分別與 $BC$ 切於 $M$ 、 $N$ 點，求證： $BM \times CN > KM \times KN$ 。

