2013 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選決賽試題

________縣市________國民中學____年級　編號：________　姓名：_________

作答時間: 二 小 時　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　性別: □男 □女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1. 設 $A=\dfrac{16\times72+17\times73+18\times74+19\times75}{16\times71+17\times72+18\times73+19\times74}\times150$，則 A 的整數部分的值為____。

2. 將一個數的數碼相加得到另一個數，再將所得的數之數碼相加得到另一個數，直到所得結果為一位數為止，我們稱最後的值為這個數的「數碼值」。則從1至2013共有________個數之數碼值為1。

3. 小丁買了一瓶漱口水，上面標示每一次的正確使用量為瓶蓋容量的$\dfrac{1}{3}$；小丁剛買來時，誤將$\dfrac{1}{3}$看成$\dfrac{1}{2}$。在使用$5n$次後才發現錯誤(其中n為正整數)，此時漱口水已剩原來的$\dfrac{n-1}{n}$。若往後小丁依正確方式使用，一直到用完時又使用$21n+6$次，則該瓶漱口水的體積是漱口水瓶蓋容量的__________倍。

4. 將1、3、5、…、103這52個奇數，以兩個數分為一組，任意分為26組。令每組數中的較大數為a，較小數為b，每組均計算$|a-b|+2a+b$之值，共得26個值，則這26個值的和最大值為__________。

5. 設$S=\{1, 2, 3, \ldots, 2013\}$，若從$S$中最多可選出$k$個整數$a_1,a_2,\cdots,a_k$，使得這$k$個數中任何兩數之和都不能被它們的差整除，則$k$之值為_________。

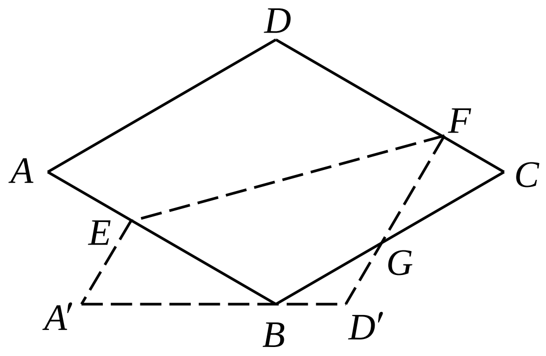
6. 若數列$\{x_n\}$的首項$x_1>0$，且對任意自然數n，恆有$S_n-\dfrac{1}{x_n}=x_n-S_n$，其中符號$S_n$表示前$n$項之和，則$S_{2013}^2$之值為__________。

7. 設m與n為相異正整數，其中$m<20$且n不為1，若有一組數對(m, n)使得$|2^m-5^n|=3$，則此一組數對(m, n) =_________。

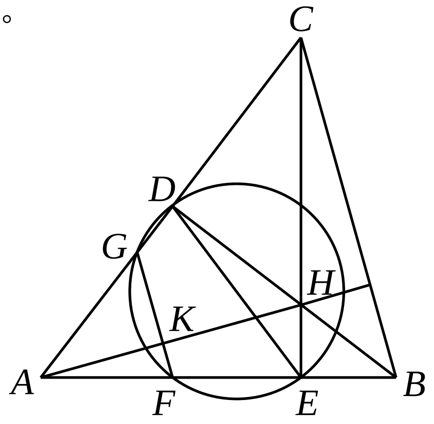
8. 若N是由數碼2、0、1、3所組成且沒有三個數碼3連續地排在一起的數，我們稱N為「幸運數」，例如2013、20133即為幸運數，而33303、333321便不是幸運數。則在六位數中，共有__________個幸運數。

9. 已知正整數a、b滿足$(3a+b)^2+6a-2b-1544=0$，則$a+b$之值為________。

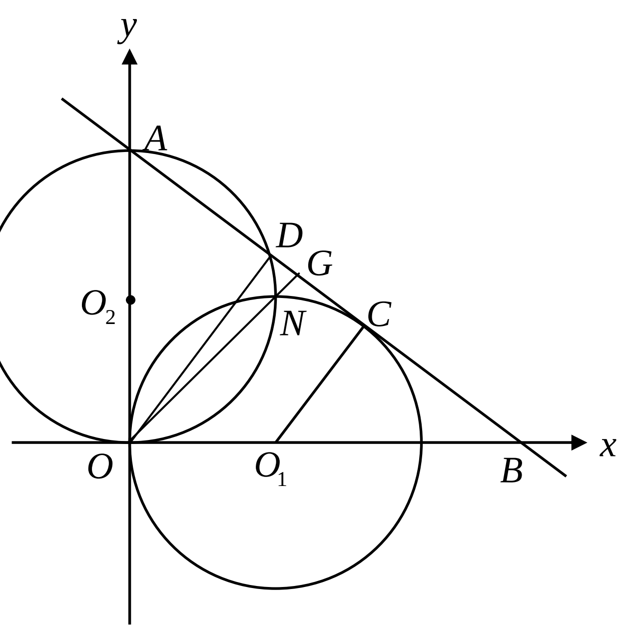
10. 如下圖，已知菱形紙片$ABCD$的$\angle A=60°$，將紙片摺疊讓A、D分別落在點A'、D'處，且使得B點在線段$A'D'$，已知EF為摺痕，若$D'F\perp CD$時，則$\dfrac{CF}{FD}=$__________。



11. 在銳角$\triangle ABC$中，已知AB邊上的高CE與AC邊上的高BD交於H，以DE為直徑的圓與AB、AC分別交於點F、G，而FG與AH交於K；若$BC=25$、$BD=20$、$BE=7$，則AK的長為__________。



12. 如下圖，在直角坐標系中，直線AB交y軸於點A，交x軸於點B，其方程為$y=-\dfrac{3}{4}x+2$。已知圓O_1的圓心是x軸上一點，且圓O_1與直線AB切於點C，與y軸切於原點O。若以AO為直徑作圓O_2，交直線AB於點D，交圓O_1於點N，連接ON並延長交CD於點G，則$\triangle ODG$的面積__________。



第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 在一個圓周上寫著若干個非零整數，且每個正數為其兩側相鄰之數的和、而每個負數與其兩側相鄰之數的和為 0。設所有正數的總和為 P，所有負數的總和為 N，試求可能滿足等式 $P+aN=0$ 的 a 值並在圓周上寫出一組非零整數使這些整數滿足前述條件。

2. 設 r 為有理數，試求所有 r 的值使得方程 $rx^2+(r+2)x+r-1=0$ 的根全都是整數根。

3. 在△ABC 的 BC 邊上取一點 K，已知△ABK、△ACK 的內切圓分別與 BC 切於 M、N 點，求證：$BM \times CN > KM \times KN$ 。