

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

**2015 年青少年數學國際城市邀請賽
參賽代表遴選決賽試題**

_____縣市_____國民中學_____年級 編號：_____ 姓名：_____

作答時間：二小時

性別：男 女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1. 設 m 為整數且 $m = \frac{(10^4 + 324)(22^4 + 324)(34^4 + 324)(46^4 + 324)}{(4^4 + 324)(16^4 + 324)(28^4 + 324)(40^4 + 324)}$ ，

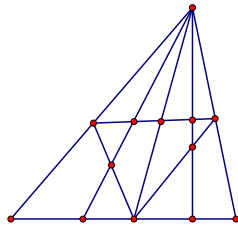
則 $m =$ _____。

答： 241

2. 設 k 為一正數，若方程式 $2015x^2 + kx + 5102 = 0$ 和 $5102x^2 + kx + 2015 = 0$ 有一個公共根，則 $k =$ _____。

答： 7117

3. 設右下圖中有 r 個三角形，則 $r =$ _____。



答： 35

4. 小明在做美術作品時，首先將一個邊長為 4 cm 的正方體的各面塗上顏色，然後再將此正方體切割成 64 個邊長為 1 cm 的小正方體，若這些小正方體總共有 n 個面沒有被塗上顏色，則 $n =$ _____。

答： 288

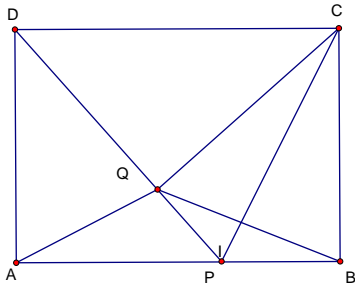
5. 已知 x 與 y 皆為整數，若有 p 組數對 (x, y) 滿足不等式 $4 \leq x^2 + y^2 \leq 17$ ，則 $p =$ _____。

答： 48

6. 設 α, β 為方程式 $x^2 + 2x - 2 = 0$ 的二根，若 α, β 也是 $x^4 - 2ax^2 + b = 0$ 的根，則 $2a + b =$ _____。

答： 12

7. 已知 AB 為長方形 $ABCD$ 的一邊，若 $AB=14\text{cm}$ ， P 為 AB 邊上的一點， $CP=13\text{cm}$ ， $DP=15\text{cm}$ 且 $CQ \perp DP$ 於點 Q ，則 $\triangle ABQ$ 的面積=_____。



答： 36.96

8. 若正整數 m 恰有四個正因數(包括 1 和 m 本身)，而這四個正因數之和為 S ，則 S 為好數，如 12 和 15 都是好數，問在 $\{2015, 2016, \dots, 2024\}$ 這些數中共有幾個好數? _____

答： 2

9. 已知正方形 $ABCD$ 的邊長為 13 公分，設 E 為 BC 邊上的一點， F 為 AB 邊上的一點，使得 $\angle FDE=45^\circ$ ，若 $EF=11$ 公分，則 CE 之長為_____公分。

答： $\frac{11 \pm \sqrt{17}}{2}$

10. 設 x 為整數，若有 q 個 x 使得 $S=15x^2-17x-18$ 是某個質數的平方，則 q =_____。

答： 0

11. 設有 2015 個不等於 104 的正整數，今將這些數標示為 $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$ ，若其中任意連續若干數的和均不等於 104，則 $a_1 + a_2 + \dots + a_{2015}$ 最小值為_____。

答： 3991

12. 若從 1, 3, 5, \dots , 2015 這些奇數中，最多可取 t 個數使得任意三個數的和均為 21 的倍數，則 t =_____。

答： 48

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在試卷上作答，須詳列過程及說明理由)

1. 假設有一個盒子裡有紅、白、黑三種顏色的球共 85 顆。已知從其中任意取出 21 顆，便能保證其中至少有 9 顆是同色的。試證明從其中任意取出 39 顆，便能保證其中至少有 18 顆是同色的。

參考解答

假設紅球有 r 顆，白球有 w 顆，黑球有 b 顆。且不妨假設 $r \geq w \geq b$ 。

- (1) 若 $b \leq 4$ ，那麼任取 39 顆球，紅球加白球至少有 35 顆，必有某色有 18 顆以上。
(2) 若 $b \geq 5$ ，如果 $w \geq 8$ ，那麼 8 顆紅球、8 顆白球、5 顆黑球中沒有 9 顆同色的球。可知 $w \geq 8$ 為不可能，因此 $w \leq 7$ 。那麼任取 39 顆球，白球加黑球至多有 14 顆，可知紅球至少有 25 顆。

2. 設 u, v 為有理數，如果 w 可以表示為 $3u^2 - 8uv + 6v^2$ 的形式，則稱 w 為“聯誼數”，

試問(1)任意兩個聯誼數的積是否為聯誼數？為什麼？

(2)任意兩個聯誼數的商是否為聯誼數？為什麼？

參考解答：由

$$\begin{aligned} w &= 3u^2 - 8uv + 6v^2 = (u^2 - 4uv + 4v^2) + (2u^2 - 4uv + 2v^2) \\ &= (u - 2v)^2 + 2(u - v)^2 \end{aligned}$$

令

$$m = (u - 2v), n = (u - v) \Rightarrow w = m^2 + 2n^2 (m, n \text{ 為有理數})$$

設 $w_1 = p^2 + 2q^2, w_2 = r^2 + 2s^2$ 為任意兩個聯誼數

(1)

$$\begin{aligned} \text{則 } w_1 \times w_2 &= (p^2 + 2q^2) \times (r^2 + 2s^2) = p^2 r^2 + 2p^2 s^2 + 2q^2 r^2 + 4q^2 s^2 \\ &= (pr + 2qs)^2 + 2(ps - qr)^2 \end{aligned}$$

表示任意兩個聯誼數的積亦為聯誼數

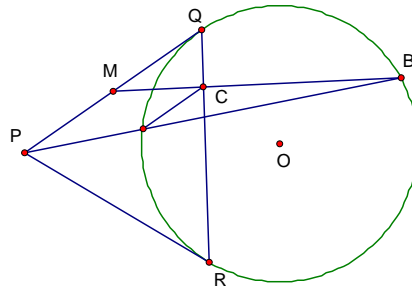
(2)

任意兩個聯誼數之商

$$\begin{aligned} \frac{w_1}{w_2} &= \frac{p^2 + 2q^2}{r^2 + 2s^2} = \frac{(p^2 + 2q^2)(r^2 + 2s^2)}{(r^2 + 2s^2)(r^2 + 2s^2)} = \frac{(pr + 2qs)^2 + 2(ps - qr)^2}{(r^2 + 2s^2)^2} \\ &= \left(\frac{pr + 2qs}{r^2 + 2s^2}\right)^2 + 2\left(\frac{ps - qr}{r^2 + 2s^2}\right)^2 \end{aligned}$$

證得任意兩個聯誼數之商亦為聯誼數

3. 已知 P 為圓 O 外部的一個點，過 P 作圓 O 的兩條切線 PQ 與 PR 和一條割線 PAB ; 令 M 為 PQ 的中點，連接 BM 與 RQ 交於 C 點，證明 $AC \parallel PQ$ 。



參考解答:

聯結 AQ, AR, BQ, BR ; 令 QR 與 PB 交於 D ,

由 $\triangle PRA \sim \triangle PBR$ ($\because \angle APR = \angle BPR, \angle PRA = \angle PBR$) \Rightarrow

$$\frac{AR}{BR} = \frac{PA}{PR} = \frac{PR}{PB}$$

又 $\triangle PAQ \sim \triangle PQB$ ($\because \angle APQ = \angle BPQ, \angle PQA = \angle PBQ$) \Rightarrow

$$\frac{AQ}{BQ} = \frac{PA}{PQ} = \frac{PQ}{PB}$$

$$\frac{a\Delta AQR}{a\Delta BQR} = \frac{AD}{DB}, \quad \frac{a\Delta AQR}{a\Delta BQR} = \frac{AQ \times AR}{BQ \times BR} = \frac{PA \times PR}{PQ \times PB} = \frac{PA}{PB} \quad (\because PR = PQ)$$

而有 $\frac{AD}{DB} = \frac{PA}{PB}$ (1)

$\triangle PDQ$ 被直線 MB 所截, 可得

$$\frac{QM}{MP} \times \frac{PB}{BD} \times \frac{DC}{CQ} = 1 \text{ (麥氏定理)} \Rightarrow \frac{PB}{BD} = \frac{CQ}{DC} \quad (\because QM = MP) \quad \dots\dots(2)$$

將(1)代入(2)得到 $\frac{CQ}{DC} = \frac{AP}{DA}$

證得 $AC \parallel PQ$

