2015 年青少年數學國際城市邀請賽
參賽代表遴選決賽試題

_________縣市_________國民中學_____年級　編號：_________　姓名：__________

作答時間: 二 小 時　　性別: □男 □女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1. 設 m 為整數且 $m=\dfrac{(10^4+324)(22^4+324)(34^4+324)(46^4+324)}{(4^4+324)(16^4+324)(28^4+324)(40^4+324)}$，

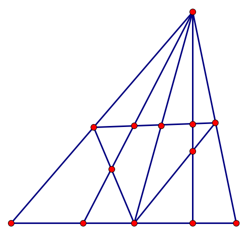
   則 $m=$____________。

答：241

2. 設 k 為一正數，若方程式 $2015x^2+kx+5102=0$ 和 $5102x^2+kx+2015=0$ 有一個公共根，則 $k=$_______。

答：7117

3. 設右下圖中有 r 個三角形，則 $r=$_________。



答：35

4. 小明在做美術作品時，首先將一個邊長為 4 cm 的正方體的各面塗上顏色，然後再將此正方體切割成 64 個邊長為 1 cm 的小正方體，若這些小正方體總共有 n 個面沒有被塗上顏色，則 $n=$__________。

答：288

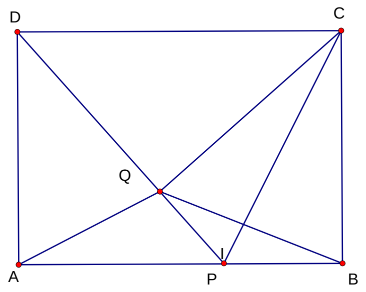
5. 已知 x 與 y 皆為整數，若有 p 組數對 (x, y) 滿足不等式 $4\le x^2+y^2\le 17$，則 $p=$_________。

答：48

6. 設 α, β 為方程式 $x^2+2x-2=0$ 的二根，若 α, β 也是 $x^4-2ax^2+b=0$ 的根，則 $2a+b=$_____________。

答：12

7. 已知 AB 為長方形 $ABCD$ 的一邊，若 AB =14cm，P 為 AB 邊上的一點，CP =13cm，DP =15cm 且 $CQ \perp DP$ 於點 Q，則 ΔABQ 的面積=_______。



答: 36.96

8. 若正整數 m 恰有四個正因數(包括 1 和 m 本身)，而這四個正因數之和為 S，則 S 為好數，如 12 和 15 都是好數，問在{2015,2016,…,2024}這些數中共有幾個好數?_________

答：2

9. 已知正方形 $ABCD$ 的邊長為 13 公分，設 E 為 BC 邊上的一點，F 為 AB 邊上的一點，使得 $\angle FDE = 45^0$，若 $EF = 11$ 公分，則 CE 之長為_________公分。

答：$\dfrac{11 \pm \sqrt{17}}{2}$

10. 設 x 為整數，若有 q 個 x 使得 $S = 15x^2 - 17x - 18$ 是某個質數的平方，則 q =________。

答：0

11. 設有 2015 個不等於 104 的正整數，今將這些數標示為 $a_1, a_2, \ldots, a_{2015}$，若其中任意連續若干數的和均不等於 104，則 $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2015}$ 最小值為_________。

答：3991

12.若從 1, 3, 5, …, 2015 這些奇數中，最多可取 t 個數使得任意三個數的和均為 21 的倍數，則 t =__________。

答：48

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(**注意**：在試卷上作答，須詳列過程及說明理由）

1. 假設有一個盒子裡有紅、白、黑三種顏色的球共 85 顆。已知從其中任意取出 21 顆，便能保證其中至少有 9 顆是同色的。試證明從其中任意取出 39 顆，便能保證其中至少有 18 顆是同色的。

參考解答

假設紅球有 r 顆，白球有 w 顆，黑球有 b 顆。且不妨假設 $r \ge w \ge b$。

(1)若 $b \le 4$，那麼任取 39 顆球，紅球加白球至少有 35 顆，必有某色有 18 顆以上。

(2)若 $b \ge 5$，如果 $w \ge 8$，那麼 8 顆紅球、8 顆白球、5 顆黑球中沒有 9 顆同色的球。
可知 $w \ge 8$ 為不可能, 因此 $w \le 7$。那麼任取 39 顆球，白球加黑球至多有 14 顆，
可知紅球至少有 25 顆。

2. 設 u, v 為有理數，如果 w 可以表示為 $3u^2-8uv+6v^2$ 的形式，則稱 w 為“聯誼數”，
試問(1)任意兩個聯誼數的積是否為聯誼數？為什麼？
(2)任意兩個聯誼數的商是否為聯誼數？為什麼？

參考解答:由

$$w=3u^2-8uv+6v^2=(u^2-4uv+4v^2)+(2u^2-4uv+2v^2)$$
$$=(u-2v)^2+2(u-v)^2$$

令

$$m=(u-2v), n=(u-v) \Rightarrow w=m^2+2n^2(m,n\text{為有理數})$$

設 $w_1=p^2+2q^2, w_2=r^2+2s^2$ 為任意兩個聯誼數

(1)

則 $w_1 \times w_2 = (p^2+2q^2)\times(r^2+2s^2) = p^2r^2+2p^2s^2+2q^2r^2+4q^2s^2$

$=(pr+2qs)^2+2(ps-qr)^2$

表示任意兩個聯誼數的積亦為聯誼數

(2)

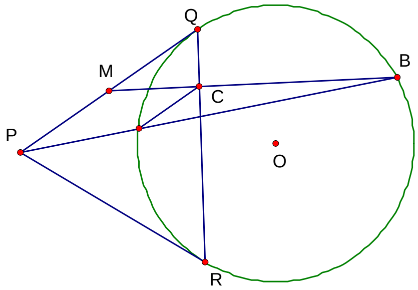
任意兩個聯誼數之商

$$\frac{w_1}{w_2}=\frac{p^2+2q^2}{r^2+2s^2}=\frac{(p^2+2q^2)(r^2+2s^2)}{(r^2+2s^2)(r^2+2s^2)}=\frac{(pr+2qs)^2+2(ps-qr)^2}{(r^2+2s^2)^2}$$

$$=(\frac{pr+2qs}{r^2+2s^2})^2+2(\frac{ps-qr}{r^2+2s^2})^2$$

證得任意兩個聯誼數之商亦為聯誼數

3. 已知 P 為圓 O 外部的一個點，過 P 作圓 O 的兩條切線 PQ 與 PR 和一條割線 PAB;令 M 為 PQ 的中點，連接 BM 與 RQ 交於 C 點，證明 $AC//PQ$。



參考解答:

聯結 AQ, AR, BQ, BR;　令 QR 與 PB 交於 D，

由 $\triangle PRA \backsim \triangle PBR$($\because \angle APR = \angle BPR$, $\angle PRA = \angle PBR$) $\Rightarrow$

$$\frac{AR}{BR}=\frac{PA}{PR}=\frac{PR}{PB}$$

又 $\triangle PAQ \backsim \triangle PQB$($\because \angle APQ = \angle BPQ$, $\angle PQA = \angle PBQ$) $\Rightarrow$

$$\frac{AQ}{BQ}=\frac{PA}{PQ}=\frac{PQ}{PB}$$

$$\frac{a\Delta AQR}{a\Delta BQR}=\frac{AD}{DB}\ ,\quad \frac{a\Delta AQR}{a\Delta BQR}=\frac{AQ\times AR}{BQ\times BR}=\frac{PA\times PR}{PQ\times PB}=\frac{PA}{PB}(\because PR=PQ)$$

而有 $\frac{AD}{DB}=\frac{PA}{PB}$ …………(1)

$\triangle PDQ$ 被直線 MB 所截, 可得

$$\frac{QM}{MP}\times\frac{PB}{BD}\times\frac{DC}{CQ}=1(\text{麥氏定理})\Rightarrow\frac{PB}{BD}=\frac{CQ}{DC}(\because QM=MP)$$ ……(2)

將(1)代入(2)得到 $\frac{CQ}{DC}=\frac{AP}{DA}$

證得 $AC \mathbin{/\!/} PQ$