2015年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選複賽試題

_________縣市_________國民中學____年級　編號：_________　姓名：__________

作答時間: 二 小 時　　　　　　　　　　　　　　　　　　　性別:□男 □女

第一部分：填充題，每小題5分，共60分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1. 設 $N=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+99^2-100^2$，則 $N=$____________。

【參考解法】

$$\begin{aligned}N&=(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+\cdots+(99^2-100^2)\\&=(1-2)(1+2)+(3-4)(3+4)+\cdots+(99-100)(99+100)\\&=(-1)(1+2)+(-1)(3+4)+\cdots+(-1)(99+100)\\&=-(1+2+3+4+\cdots+99+100)\\&=-\frac{(1+100)\times 100}{2}\\&=-5050\end{aligned}$$

答：-5050

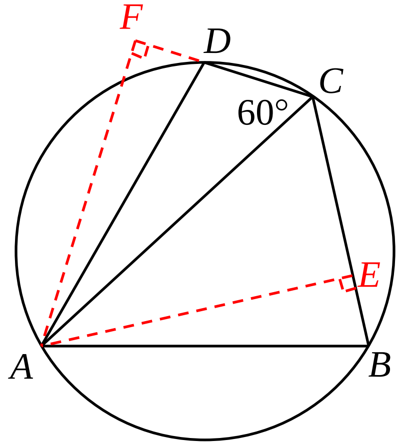
2. 已知一直角三角形的周長為 $6+\sqrt{46}$ cm，且斜邊上的中線為 3 cm，則此直角三角形的面積為____________cm^2。

【參考解法】

由此直角三角形斜邊上的中線長度為 3 cm，可知斜邊的長度為 $3\times 2=6$ cm，即此直角三角形的兩股長度之和為 $6+\sqrt{46}-6=\sqrt{46}$ cm。由勾股定理可知此直角三角形的兩股長度的平方和為 36，可知兩股長度之積為 $\frac{1}{2}((\sqrt{46})^2-36)=5$，所以此直角三角形的面積為 $\frac{5}{2}=2.5\,\text{cm}^2$。

答：$\frac{5}{2}=2.5\,\text{cm}^2$

3. 在圓內接四邊形 $ABCD$ 中，已知 $AB=AD$ 且 $AC=1$ cm、$\angle ACD=60°$，則四邊形 $ABCD$ 的面積為 ____________cm^2。



【參考解法】

由點 A 分別向 BC 與 CD 的延長線作垂線，令其分別交於點 E 與點 F，如圖所示。

因四邊形 $ABCD$ 是一個圓內接四邊形，故可得知 $\angle ABE+\angle ADC=180°$，再因 $\angle ADF+\angle ADC=180°$，所以 $\angle ABE=\angle ADF$；此時再由 $\angle AEB=90°=\angle AFD$、$AB=AD$，可推知 $\triangle ABE\cong\triangle ADF$，所以四邊形 $ABCD$ 的面積與四邊形 $AECF$ 的面積相同。
現再由 $AB=AD$ 可得知 $\angle ACE=\angle ACD=60°$，且知 $\angle AEC=90°=\angle AFC$，故有 $\angle CAE=\angle CAF=30°$。因 $AC=1$ cm，故 $CE=CF=\dfrac{1}{2}$ cm、$AE=AF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm，所以四邊形 $AECF$ 的面積為 $2\times(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2})=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ cm^2。

答：$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ cm^2

4. 若 n 為正整數，使得 2^8+2^n 是一個正整數的完全平方數，則 $n=$__________。

【參考解法】
若 $n\le 8$，則 2^8+2^n 之值為 $2^8+2=258$、$2^8+2^2=260$、$2^8+2^3=264$、$2^8+2^4=272$、$2^8+2^5=288$、$2^8+2^6=320$、$2^8+2^7=384$、$2^8+2^8=512$ 都不是完全平方數，故不合。
若 $n>8$，則由 $2^8+2^n=2^8(1+2^{n-8})=(2^4)^2(1+2^{n-8})$ 知 $1+2^{n-8}$ 為完全平方數。而因 $1+2^{n-8}$ 恆為奇數，故 $1+2^{n-8}$ 為一個奇數的完全平方數，因此可令 $1+2^{n-8}=(2k+1)^2=4k^2+4k+1$，其中 k 為正整數，化簡後得 $2^{n-10}=k(k+1)$。因 k、$k+1$ 為連續的整數，故知這兩個數互質，因此除了 $k=1$ 的情況外，其乘積至少有 2 個質因數，所以可推知 $k=1$，故 $2^{n-10}=2$，即 $n=11$，此時 $2^8+2^{11}=48^2$。

答：11

5. 已知 $\triangle ABC$ 為鈍角三角形，且其三個內角度數都是正整數，若將三個內角由小至大排列後都相同的三角形視為同一個三角形，則三個內角度數都是質數的 $\triangle ABC$ 共有____________個。

【參考解法】
若這三個內角的度數都是奇質數，則其內角和必為奇數，與三角形內角和必為 $180°$ 矛盾，故知其中必有一個角之角度為 $2°$，而另兩個內角和為 $178°$。再由於 $\triangle ABC$ 為鈍角三角形，所以直接計算可以得知另兩個內角的度數可為 $(5, 173)$、$(11, 167)$、$(29, 149)$、$(41, 137)$、$(47, 131)$、$(71, 107)$。
故知這樣的 $\triangle ABC$ 共有 6 個。

答：6 個

6. 若 $\dfrac{x}{2y}=\dfrac{6y}{2x-5y}=\dfrac{3x-20y}{-x}$，則 $\dfrac{3x^2-8xy+4y^2}{x^2-2xy-4y^2}$ 的值為__________。

【參考解法】
令 $\dfrac{x}{2y}=\dfrac{6y}{2x-5y}=\dfrac{3x-20y}{-x}=k$，顯然 k 不等於 0，則有：

$$\begin{cases} x=2ky & \cdots\cdots(1) \\ 6y=2kx-5ky & \cdots\cdots(2) \\ 3x-20y=-kx & \cdots\cdots(3) \end{cases}$$

將(1)式$\times 3$、(2)式$\times\dfrac{20}{6}$代入(3)式後可得

$$6ky-\frac{20}{6}\times 2kx+\frac{20}{6}\times 5ky=-kx$$
$$36ky-40kx+100ky=-6kx$$
$$136ky=34kx$$
$$4y=x$$

因此$\dfrac{3x^2-8xy+4y^2}{x^2-2xy-4y^2}=\dfrac{3(4y)^2-8\times 4y^2+4y^2}{(4y)^2-2\times 4y^2-4y^2}=\dfrac{48y^2-32y^2+4y^2}{16y^2-8y^2-4y^2}=5$。

答：5

7. 設 k 為任意正整數，若方程式 $x^2-(4k-1)x+(2k-5)=0$ 最多可以有 m 個整數根，則 $m=$____________。

【參考解法】可知方程式 $x^2-(4k-1)x+(2k-5)=0$ 的判別式為

$$(4k-1)^2-4(2k-5)=16k^2-16k+4+17=(4k-2)^2+17\text{。}$$

若有整數根，則判別式之值必為完全平方數，故可令 $(4k-2)^2+17=a^2$，其中 a 為正整數。此時有

$$17=a^2-(4k-2)^2=(a+4k-2)(a-4k+2)\text{。}$$

因兩正數之和必大於兩正數之差且 17 為質數，故可得

$$\begin{cases} a+4k-2=17 \\ a-4k+2=1 \end{cases}$$

解此方程組可知 $k=\dfrac{5}{2}$，矛盾。所以無論正整數 k 為何，此方程都沒有整數根。

答：0 個

8. 若存在正整數 k 與 n 使得 $1+2+3+\cdots+n=2^k+2^{k+1}+2^{k+2}+\cdots+2^{k+99}$，則 n 的最小值為____________。

【參考解法】
$$1+2+3+\cdots+n=2^k+2^{k+1}+2^{k+2}+\cdots+2^{k+99}$$
$$\frac{n(n+1)}{2}=2^{k+100}-2^k$$
$$n(n+1)=2^{k+1}(2^{100}-1)$$

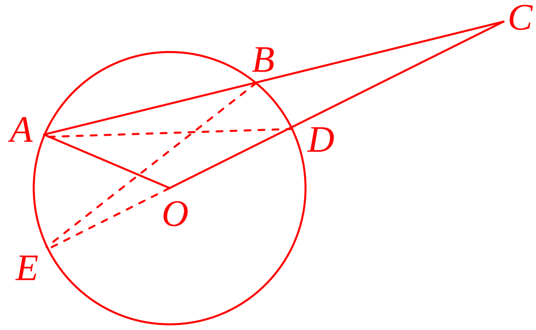
觀察可知 n 與 k 的最小值會同時發生。因 n、$n+1$ 為連續的正整數，故由觀察可知當 $k=99$ 時，$n=2^{100}-1$ 滿足等式。

而若存在 $k<99$ 仍滿足等式，則可知 $2^{k+1}\le 2^{99}<2^{100}-1$，因此由 n 與 $n+1$ 這兩個數互質可判斷出 $2^{k+1}\mid n$ 或 $2^{k+1}\mid(n+1)$，矛盾。 故 n 的最小值為 $2^{100}-1$。

答： $2^{100}-1$

9. 設 A、B 為圓 O 上的兩點，且點 C 在 $\overrightarrow{AB}$ 射線上且位於圓外的一點。已知 $AB=24$ cm、 $BC=28$ cm、$OA=15$ cm，則 $OC=$ __________cm。

【參考解法一】



令 OC 與圓 O 交於點 D，並延長 CO 與圓 O 交於另一點 E。連接 AD、BE。可知 $\angle ACD=\angle ECB$、$\angle DAC=\angle BEC$，因此 $\triangle ACD\sim\triangle ECB$，即 $\dfrac{BC}{DC}=\dfrac{CE}{AC}$。因已知 $OA=15$ cm，故 $CE=30+DC$，即

$$\frac{28}{DC}=\frac{30+DC}{24+28}$$

化簡後可得

$$DC^2+30DC-2^4\times7\times13=0$$
$$(DC+56)(DC-26)=0$$

因長度恆為正數，故知 $DC=26$ cm，因此 $OC=26+15=41$ cm。

【參考解法二】

令 OC 與圓 O 交於點 D，並延長 CO 與圓 O 交於另一點 E，可知 $DE=30$ cm。利用圓冪定理，可知

$$AC\times BC=CD\times CE$$
$$(AB+BC)\times BC=CD\times(CD+DE)$$
$$(24+28)\times28=CD\times(CD+30)$$

化簡後可得

$$DC^2+30DC-2^4\times7\times13=0$$
$$(DC+56)(DC-26)=0$$

因長度恆為正數，故知 $DC=26$ cm，因此 $OC=26+15=41$ cm。

答：41 cm

10.設 a、b、c 皆為正整數，且滿足 $a>b>c$。若 $\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{1}{b-1}+\dfrac{1}{c-1}=1$，則 $a+2b+3c$ 之值為__________。

【參考解法】

令 $A=a-1$、$B=b-1$、$C=c-1$，則知 $A>B>C$ 且有 $\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}+\dfrac{1}{C}=1$。

明顯可知 $C\neq1$。若 $C\geq3$，則 $\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}+\dfrac{1}{C}<\dfrac{3}{C}\leq1$，矛盾，故知 $C=2$，即 $c=3$ 且 $\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$；若 $B\geq4$，則 $\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}<\dfrac{2}{B}\leq\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$，矛盾，故知 $B=3$，即 $b=4$ 且 $\dfrac{1}{A}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$，因此 $A=6$，即 $a=7$。故 $a+2b+3c=7+8+9=24$。

答：24

11. 有一支部隊以固定隊形與勻速前進，該隊伍長度為 50 m。在部隊的最尾端的有一位傳令兵奉命送一訊息至隊伍的最前端，然後立即返回隊伍的最尾端。已知該傳令兵以勻速來回，且在來回的期間內此隊伍共前進了 100 m。則該傳令兵在來回的期間內共行走了 ________________ m。(註: 所謂勻速就是保持固定速度行進)

【參考解法】

若令傳令兵的速度為 a、部隊的速度為 b 且傳令兵從最尾端前進至隊伍的最前端所花費的時間為 x、傳令兵從最前端移動至隊伍的最尾端所花費的時間為 y，則知

$$\begin{cases}(a-b)x=50 & \cdots\cdots(1)\\(a+b)y=50 & \cdots\cdots(2)\\b(x+y)=100 & \cdots\cdots(3)\end{cases}$$

而所求即為 $a(x+y)$。由(1)、(2)知 $x=\dfrac{50}{a-b}$ 、 $y=\dfrac{50}{a+b}$ ，代回(3)式可得

$$\frac{50b}{a-b}+\frac{50b}{a+b}=100$$

$$50b(a+b)+50b(a-b)=100(a^2-b^2)$$

$$50ab+50b^2+50ab-50b^2=100a^2-100b^2$$

$$100a^2-100ab-100b^2=0$$

$$a^2-ab-b^2=0$$

因速度恆為正數，故知 $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}b$ ，即 $a(x+y)=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}b(x+y)=50+50\sqrt{5}$ m。

答：$50+50\sqrt{5}$ m

12. 已知 a、b 為正整數，滿足 $104\le a+b\le 108$ 且滿足 $0.91<\dfrac{a}{b}<0.92$ 。

則 $2a+b=$ ________ 。

【參考解法】

由 $0.91<\dfrac{a}{b}<0.92$ 可知 $0.91b<a<0.92b$ ，即 $1.91b<a+b<1.92b$ ，再由 $104\le a+b\le 108$ 可推知 $104<1.92b$ 且 $1.91b<108$ ，化簡後可知 $54.16<b<56.55$ ，故 $b=55$ 或 56。若 $b=55$ ，則 $0.91\times 55=50.05<a<0.92\times 55=50.6$ ，此時 a 不為正整數，矛盾，故知 $b=56$ 。再由 $0.91\times 56=50.96<a<0.92\times 56=51.52$ 可以得知 $a=51$ ，因此 $2a+b=158$ 。

答：158

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在試卷上作答，須詳列過程及說明理由)

1. 從 1、2、3、⋯、2015 共 2015 個正整數中，請問最多能取出多少個數使得這些取出來的正整數中，任意三個數 a、b、c $(a<b<c)$ 都滿足 $ab\ne c$ ？

【參考解法】

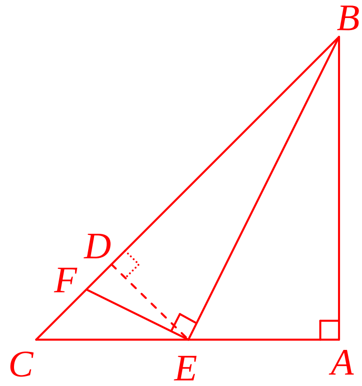
觀察可知$44\times45=1980<2015<45\times46=2070$，故若不取2、3、4、…、44而取出剩下的1、45、46、47、…、2015這1972個數，則這1972個數滿足所要求的條件。現驗證1972為可取出的數之個數最大值。從以下43組的三元數中，每一組都至少有一個數不能取，否則無法滿足條件：(44, 45, 1980)、(43, 46, 1978)、(42, 47, 1974)、…、$(44-k,\ 45+k,\ 1980-k^2-k)$、…、(2, 87, 174)，即至少有43個不能取，故最多可取出$2015-43=1972$個數。

答：1972 個

2. 在等腰直角三角形 ABC 中，已知$AB=4\sqrt{3}$ cm、$\angle BAC=90°$且點 E 為 AC 的中點、點 F 在 BC 上。若 $FE\perp BE$，請問$\triangle CEF$ 的面積為多少 cm^2？

【參考解法一】

由點 E 往 BC 作垂線交 BC 於點 D，如圖所示。



因$AB=4\sqrt{3}$ cm，故由勾股定理知$BC=4\sqrt{6}$ cm；而因點 E 為 AC 的中點，故知$AE=CE=2\sqrt{3}$ cm，且再由勾股定理可知$BE=2\sqrt{15}$ cm。再因三角形 BCE 面積為三角形 ABC 面積的一半，故可得

$$\frac{1}{2}\times BC\times DE=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times AB^2$$

$$4\sqrt{6}DE=24$$

$$DE=\sqrt{6}\ \text{cm}$$

接著再由勾股定理知$BD=\sqrt{BE^2-DE^2}=\sqrt{60-6}=3\sqrt{6}$ cm。

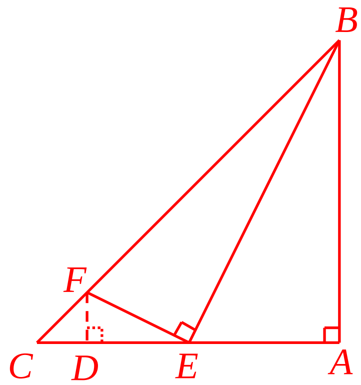
現因$\angle FBE=\angle EBD$、$\angle FEB=90°=\angle EDB$，故有$\triangle FBE\sim\triangle EBD$，即可得知$\frac{BF}{BE}=\frac{BE}{BD}$，此即$\frac{BF}{2\sqrt{15}}=\frac{2\sqrt{15}}{3\sqrt{6}}$，化簡後即知$BF=\frac{10}{3}\sqrt{6}$ cm，所以三角形 CEF 的面積為$\frac{1}{2}\times CF\times DE=\frac{1}{2}\times(4\sqrt{6}-\frac{10}{3}\sqrt{6})\times\sqrt{6}=2\ \text{cm}^2$。

【參考解法二】由點 F 往 AC 作垂線交 AC 於點 D，如圖所示。因 $\angle FDE=90°=\angle EAB$、

$$\angle FED=90°-\angle BEA=\angle EBA,$$

故有$\triangle DEF\sim\triangle ABE$，即可得知$\frac{DF}{DE}=\frac{AE}{AB}$。

因$\triangle CDF$ 也是等腰直角三角形，故令$DF=DC=x$ cm 時，則可知$DE=2\sqrt{3}-x$ cm，且由 E 為 AC 中點知$\frac{AE}{AB}=\frac{1}{2}$。所以有$\frac{x}{2\sqrt{3}-x}=\frac{1}{2}$，化簡後得$x=\frac{2}{3}\sqrt{3}$，



所以$\triangle CEF$ 的面積為$\frac{1}{2}\times CE\times DF=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\frac{2}{3}\sqrt{3}=2\ \text{cm}^2$。

答：$2\ \text{cm}^2$

3. 已知$a=2+\sqrt{3}$、$b=2-\sqrt{3}$，設$M=a^{2015}+b^{2015}$且M是一個正整數，請問正整數M的個位數碼是什麼?

【參考解法】

因$a=2+\sqrt{3}$、$b=2-\sqrt{3}$的無理部份都是$\sqrt{3}$且有理部份的係數相同、無理部份的係數互為相反數，故可判斷知a^n與b^n的無理部份也都是$\sqrt{3}$且有理部份的係數也相同、無理部份的係數也互為相反數。

故可令$a^n=p_n+q_n\sqrt{3}$、$b^n=p_n-q_n\sqrt{3}$。

現觀察以下各數：

$$a=2+\sqrt{3}$$

$$a^2=(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=(2\times2+3\times1)+(2\times1+2\times1)\sqrt{3}=7+4\sqrt{3}$$

$$a^3=(7+4\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=(2\times7+3\times4)+(7\times1+2\times4)\sqrt{3}=26+15\sqrt{3}$$

$$a^4=(26+15\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=(2\times26+3\times15)+(26\times1+2\times15)\sqrt{3}=97+56\sqrt{3}$$

$$\vdots$$

故可得知$p_n=2p_{n-1}+3q_{n-1}$、$q_n=p_{n-1}+2q_{n-1}$，此可用數學歸納法證明：

$n=2$時，$p_2=2p_1+3q_1=2\times2+3\times1=7$、$q_2=p_1+2q_1=1+2\times1=3$。

假設$n=k$時，$p_k=2p_{k-1}+3q_{k-1}$、$q_k=p_{k-1}+2q_{k-1}$成立，

則$n=k+1$時，因$a^k=p_k+q_k\sqrt{3}$，可得

$$a^{k+1}=a^k\times a=(p_k+q_k\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=(2p_k+3q_k)+(p_k+2q_k)\sqrt{3}，$$

即可得知$p_{k+1}=2p_k+3q_k$、$q_{k+1}=p_k+2q_k$。

因此$p_n=2p_{n-1}+3q_{n-1}$、$q_n=p_{n-1}+2q_{n-1}$成立。接著利用此遞迴關係式分別觀察p_n、q_n的個位數碼，如下表所示：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\cdots$
p_n的個位數碼	2	7	6	7	2	1	2	7	6	7	2	1	2	$\cdots$
q_n的個位數碼	1	4	5	6	9	0	1	4	5	6	9	0	1	$\cdots$

可得知p_n、q_n的個位數碼所形成的數列都是以周期為6循環重複出現的。現因$2015=6\times335+5$，故p_{2015}、q_{2015}的個位數碼分別與p_5、q_5的個位數碼相同，即p_{2015}、q_{2015}的個位數碼分別為2、9。因a^n與b^n的有理部份的係數相同、無理部份的係數互為相反數，故可得知$a^{2015}+b^{2015}$為一個有理數，且其個位數碼為$2p_{2015}$=4。

答：4