

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 [ccmp@seed.net.tw](mailto:ccmp@seed.net.tw)

**Notice:**

**Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.**

**Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN [ccmp@seed.net.tw](mailto:ccmp@seed.net.tw)**

# 2015 年青少年數學國際城市邀請賽

## 參賽代表遴選初賽個人賽試題

\_\_\_\_\_縣市\_\_\_\_\_國民中學\_\_\_\_\_年級 編號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

作答時間：二小時

性別：男 女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1. 設  $P = 77^{2015} + 33^{2015}$ ，則  $P$  的最末一位數碼為\_\_\_\_\_。

答：\_\_\_\_\_

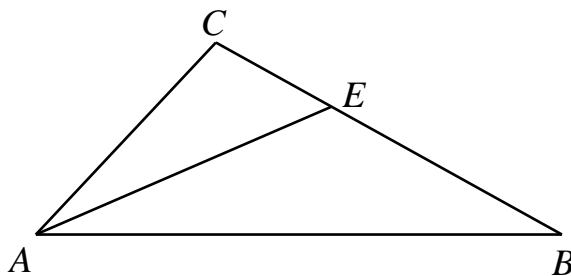
2. 有濃度為 2.6% 的糖水若干公克，加入  $n$  公克清水後，糖水濃度變成 2%。若再加入  $n$  公克清水後，則糖水濃度會變成\_\_\_\_\_%。(換算成百分比後，以四捨五入計算至小數點以下第二位)

答：\_\_\_\_\_ %

3. 設  $N = \overline{a2015b}$  為一個六位數，若  $N$  為 72 的倍數，則  $a \times b =$ \_\_\_\_\_。

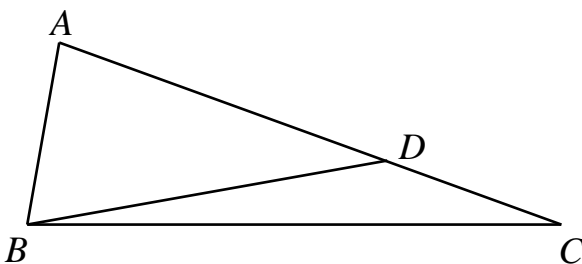
答：\_\_\_\_\_

4. 在  $\triangle ABC$  中，已知  $AC : AB = 1 : 2$ ， $\angle A$  的平分線交  $BC$  於  $E$ ，設  $\triangle ABC$  的面積為  $P$ ， $\triangle AEC$  的面積為  $Q$ ，則  $P : Q =$ \_\_\_\_\_ : \_\_\_\_\_。



答：\_\_\_\_\_ :

5. 如圖，已知  $\angle C = 20^\circ$ 、 $AC = BC$ 、 $CD = AB$ ，則  $\angle BDC$  的度數為\_\_\_\_\_。



答：\_\_\_\_\_

6. 設  $M = \overline{a_1a_2a_3a_4}$  為一正整數，且滿足  $5 \times \overline{4a_1a_2a_3a_4} = 9 \times \overline{2a_1a_2a_3a_4}5$ ，則正整數  $M =$  \_\_\_\_\_。

答： \_\_\_\_\_

7. 設  $a$ 、 $b$ 、 $c$  皆為正整數，且  $a \geq b \geq c$  並滿足  $a + b + c = 19$ ，則以  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為邊長的三角形共有 \_\_\_\_\_ 個。

答： \_\_\_\_\_ 個

8. 已知  $P$  為完全平方數，且  $P + 99$  也是完全平方數，若  $P$  所有可能的值之總和為  $Q$ ，則  $Q =$  \_\_\_\_\_。

答： \_\_\_\_\_

9. 設數列  $\langle a_n \rangle$  滿足  $a_1 = 1$ 、 $a_2 = 2$ 、 $a_3 = 6$ 、 $a_4 = 24$ 。若  $a_{n+2} \times a_{n-2} = a_{n+1}^2$ ，其中  $n$  為正整數且  $n \geq 3$ ，則  $\frac{a_{104}}{a_{103} \times a_{102} \times a_{101}} =$  \_\_\_\_\_。

答： \_\_\_\_\_

10. 設  $n$  為正整數，且  $3 \leq n \leq 20$ ，若  $\alpha_n$ 、 $\beta_n$  為二次方程  $x^2 + (n+1)x + n^2 = 0$  的兩個根，則  $\frac{1}{(\alpha_3+1)(\beta_3+1)} + \frac{1}{(\alpha_4+1)(\beta_4+1)} + \dots + \frac{1}{(\alpha_{20}+1)(\beta_{20}+1)}$  之值為 \_\_\_\_\_。

答： \_\_\_\_\_

11. 設  $k$  為整數。若二次方程  $10x^2 - 6(k+1)x + k^2 - 41 = 0$  有兩個相異的負整數根，則  $k =$  \_\_\_\_\_。

答： \_\_\_\_\_

12. 設直角三角形  $ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$  且  $BC > CA$ ，若  $s = \frac{BC}{AB}$  且  $t = \frac{CA}{AB}$ ，並且滿足  $\frac{st}{s+t-1} = \frac{15}{13}$ ，則  $s - 2t$  之值為 \_\_\_\_\_。

答： \_\_\_\_\_

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 請求出所有正實數  $a$  使得方程  $x^2 - 2ax + 8a = 0$  只有整數根。

答：

---

2. 已知正整數  $x_1, x_2, \dots, x_{17}$  滿足  $x_1 < x_2 < \dots < x_{17}$ ，且

$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{17}^2 \leq 20150$ ，請問  $x_{13} - x_8$  的最大值是什麼？

答：

---

3. 在 $\triangle ABC$ 的 $AB$ 邊上有 $K$ 與 $L$ 二個點，滿足 $KL = BC$ 及 $AK = LB$ 。已知點 $M$ 為 $AC$ 邊上的中點，請證明 $\angle KML = 90^\circ$ 。

