2015 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選初賽個人賽試題

________縣市________國民中學____年級　編號：________　姓名：_________

作答時間: 二 小 時　　　　　　　　　　　　　　　　性別: □男 □女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1.　設 $P=77^{2015}+33^{2015}$，則 P 的最末一位數碼為__________。

答：__________

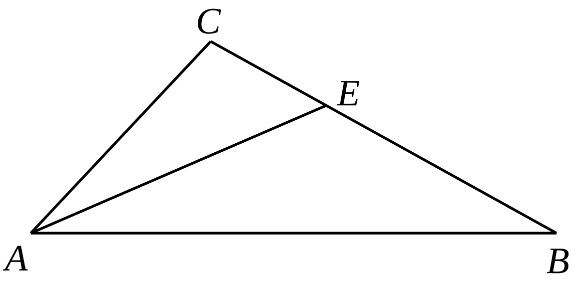
2.　有濃度為 2.6%的糖水若干公克，加入 n 公克清水後，糖水濃度變成 2%。若再加入 n 公克清水後，則糖水濃度會變成__________%。(換算成百分比後，以四捨五入計算至小數點以下第二位)

答：__________%

3.　設 $N=\overline{a2015b}$ 為一個六位數，若 N 為 72 的倍數，則 $a\times b=$__________。

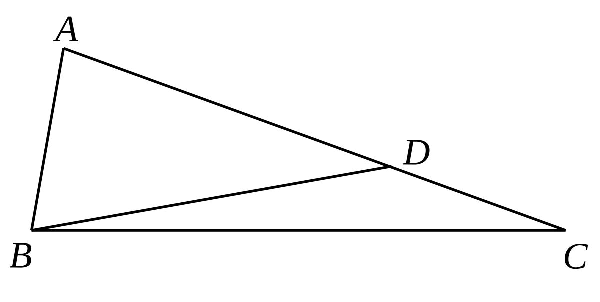
答：__________

4.　在△ABC 中， 已知 AC：AB = 1：2，$\angle A$的平分線交 BC 於 E，設△ABC 的面積為 P，△AEC 的面積為 Q，則 P：Q = _____：_____。



答：_____：_____

5.　如圖，已知 $\angle C=20°$、$AC=BC$、$CD=AB$，則 $\angle BDC$ 的度數為 ______。



答：__________°

6. 設$M=\overline{a_1a_2a_3a_4}$為一正整數，且滿足$5\times\overline{4a_1a_2a_3a_4 1}=9\times\overline{2a_1a_2a_3a_4 5}$，則正整數$M=$__________。

答：__________

7. 設a、b、c皆為正整數，且$a\ge b\ge c$並滿足$a+b+c=19$，則以a、b、c為邊長的三角形共有__________個。

答：__________個

8. 已知P為完全平方數，且$P+99$也是完全平方數，若P所有可能的值之總和為Q，則$Q=$__________。

答：__________

9. 設數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_1=1$、$a_2=2$、$a_3=6$、$a_4=24$。若$a_{n+2}\times a_{n-2}=a_{n+1}^2$，其中$n$為正整數且$n\ge 3$，則$\dfrac{a_{104}}{a_{103}\times a_{102}\times a_{101}}=$__________。

答：__________

10. 設n為正整數，且$3\le n\le 20$，若α_n、β_n為二次方程$x^2+(n+1)x+n^2=0$的兩個根，則$\dfrac{1}{(\alpha_3+1)(\beta_3+1)}+\dfrac{1}{(\alpha_4+1)(\beta_4+1)}+\cdots+\dfrac{1}{(\alpha_{20}+1)(\beta_{20}+1)}$之值為__________。

答：__________

11. 設k為整數。若二次方程$10x^2-6(k+1)x+k^2-41=0$有兩個相異的負整數根，則$k=$________。

答：__________

12. 設直角三角形ABC中，$\angle C=90^\circ$且$BC>CA$，若$s=\dfrac{BC}{AB}$且$t=\dfrac{CA}{AB}$，並且滿足$\dfrac{st}{s+t-1}=\dfrac{15}{13}$，則$s-2t$之值為____________。

答：__________

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 請求出所有正實數 a 使得方程 $x^2-2ax+8a=0$ 只有整數根。

答：______________________

2. 已知正整數 x_1 、 x_2 、$\cdots$、 x_{17} 滿足 $x_1<x_2<\cdots<x_{17}$ ，且 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{17}^2\le 20150$ ，請問 $x_{13}-x_8$ 的最大值是什麼？

答：______________________

3. 在$\triangle ABC$的AB邊上有K與L二個點，滿足$KL = BC$及$AK = LB$。已知點M為AC邊上的中點，請證明$\angle KML = 90°$。