

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2016 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選決賽試題(初稿 2)

_____縣市_____國民中學_____年級 編號：_____ 姓名：_____

作答時間：二小時

性別：男 女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

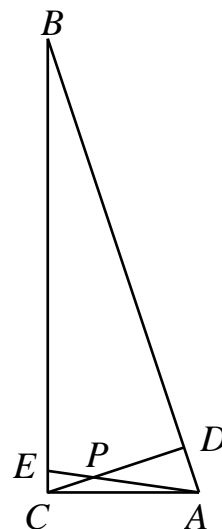
1. 已知 $3^1 = 3$ 、 $3^2 = 9$ 、 $3^3 = 27$ 、 $3^4 = 81$ 、 $3^5 = 243$ 、 $3^6 = 729$ 、 $3^7 = 2187$ 、 \dots ，則 $3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2016}$ 的個位數碼為_____。

答：_____

2. 已知 n 為正整數且 $1 \leq n \leq 2016$ ，若 n 分別除以 2、5、11 所得之餘數都為 1，則滿足上述條件的 n 共有_____個。

答：_____個

3. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle BCA = 90^\circ$ ， CD 為斜邊 AB 上的高，點 P 為線段 CD 上的一點使得 $PD = 2CP$ ，且 AP 直線交 BC 邊於點 E ，如圖所示。若 $BC = 3AC$ ，則 $\frac{CE}{BE}$ 之值為_____。



答：_____

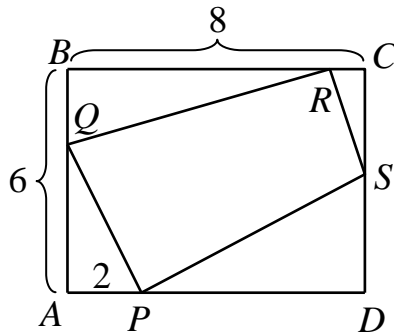
4. 已知 n 為大於 9 的正整數，且 n^2 的十位數碼為 0，則 n^2 的個位數碼總共有_____個不同的可能值。

答：_____個

5. 設 a 、 b 為非零實數，若 $(2a + 3b)^3 + a^3 + 3(a + b) = 0$ ，則 $\frac{a}{b}$ 之值為_____。

答：_____

6. 在矩形 $ABCD$ 中，已知 $AB=6\text{ cm}$ 、 $BC=8\text{ cm}$ 。若點 P 在邊 DA 上且 $AP=2\text{ cm}$ ，並在線段 AB 、 BC 、 CD 上分別取點 Q 、 R 、 S ，如圖所示，則四邊形 $PQRS$ 周長的最小值為_____ cm 。

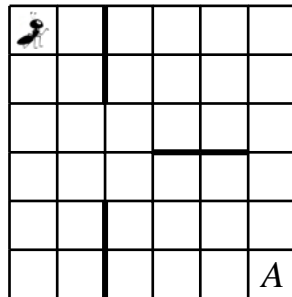


答：_____ cm

7. 有一個十位數 n ，它是由 10 個不同的數碼所組成，使得 $2n$ 之值也是由 10 個不同的數碼組成。則滿足上述條件最大的 n 值為_____。

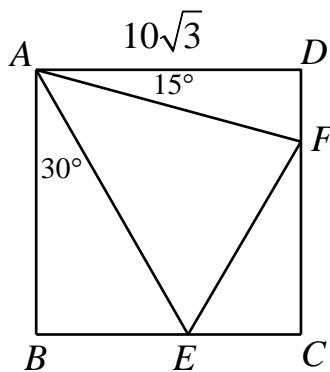
答：_____

8. 如圖所示，在 6×6 方格表左上角的小方格中有一隻螞蟻，它想爬到右下角的小方格 A 中。它每次只能沿著水平向右或鉛直向下的方向爬到相鄰的小方格中，並且表格中有三塊隔板（圖中加粗的線條）螞蟻不能從中穿過。則這隻螞蟻總共有_____條不同的路徑可到達方格 A 。



答：_____ 條

9. 已知正方形 $ABCD$ 的邊長為 $10\sqrt{3}\text{ cm}$ ，若點 E 、 F 分別在 BC 、 CD 邊上，且 $\angle BAE=30^\circ$ 、 $\angle DAF=15^\circ$ ，如下圖所示，則 $\triangle AEF$ 面積為_____ cm^2 。



答：_____ cm^2

10. 設 a 、 b 、 c 、 d 是四個實數，已知 $|a+b|$ 、 $|a-b|$ 、 $|c+d|$ 、 $|c-d|$ 之值分別等於 6、7、8、9，則 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ 的值等於_____。

答：_____

11. 給定八個正整數：1、3、9、27、81、243、729、2187。每次可從這八個數中取 1、2、3、4、5、6、7、8 個數求其和(每次每個數只能取一次)，如果將這些和從小到大依序排列，可得到一個數列 1、3、4、9、...、3280，則此數列的第 100 項上的數是_____。

答：_____

12. 已知 11 的數碼和為 2， $11 \times 11 \times 11$ 的數碼和為 8，而 111 的數碼和為 3， $111 \times 111 \times 111$ 的數碼和為 27。若 m 是一個數碼和為 4 的正整數，且使得 $m \times m \times m$ 數碼和為 64，則 m 的最小值為_____。

答：_____

13. 某銀行有七位經理，為了防弊，至少要有四位經理在場時才能開啟金庫，而少於四人時，則一定無法開啟金庫。假設金庫共有 N 道鎖，每道鎖可以配多支鑰匙分配給這七位經理持有，一把鑰匙可以開一道鎖，每位經理都持有 K 支鑰匙。若滿足上述條件， N 之最小值為 n ，而 K 之最小值為 k ，則 $n+k =$ _____。

答：_____

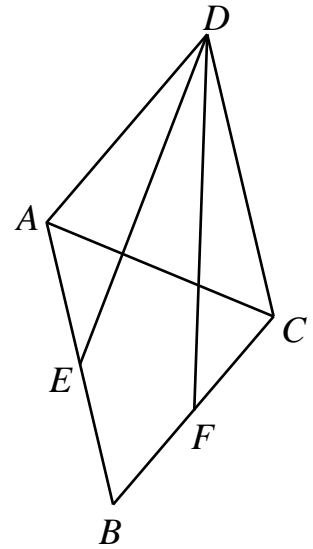
第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 已知 a 、 b 、 c 、 d 是兩兩相異的非零數碼，四位數 \overline{abcd} 與 \overline{acbd} 的最大公因數為 n ，請問 n 的最大可能值是多少？

答：_____

2. 在凸四邊形 $ABCD$ 的邊 AB 與 BC 上，分別取點 E 與 F ，使得線段 DE 與 DF 把對角線 AC 三等分，若 $\triangle ADE$ 與 $\triangle CDF$ 的面積都等於四邊形 $ABCD$ 面積的 $\frac{1}{4}$ ，求證四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。



3. 將正六邊形的某些邊與對角線塗上紅或藍之一種顏色，試證：
- (1) 如果共塗色 15 條線段時，則其中至少有兩個單色三角形(三個邊為同一種顏色的三角形稱為單色三角形)。
 - (2) 如果只塗色 14 條線段時，則不一定存在有單色三角形。