2016年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選決賽試題

第一部分：填充題，每小題5分，共60分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1. 已知$3^1=3$、$3^2=9$、$3^3=27$、$3^4=81$、$3^5=243$、$3^6=729$、$3^7=2187$、$\cdots$，則$3^1+3^2+3^3+3^4+\cdots+3^{2016}$的個位數碼為__________。

【參考解法】

觀察可知，3 的冪次的個位數碼為 3、9、7、1 這 4 個數為循環週期依序重複出現，每一個週期的個位數碼之和為$3+9+7+1=20$，此和的個位數碼為 0。

因$2016=4\times504$，故此算式共恰有 504 個週期，所以此算式的個位數碼為 0。

答：　0

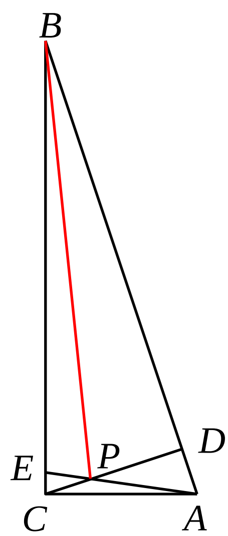
2. 已知 n 為正整數且$1\le n\le 2016$，若 n 分別除以 2、5、11 所得之餘數都為 1，則滿足上述條件的 n 共有__________個。

【參考解法】

可知$n-1$為 2、5、11 的公倍數且$0\le n-1\le 2015$。因 2、5、11 的最小公倍數為110，而$2015=110\times18+35$，且 0 也是 110 的倍數，故知滿足上述條件的 n 共有$18+1=19$個。

答：　19　個

3. 在$\triangle ABC$中，已知$\angle BCA=90°$，CD 為斜邊 AB 上的高，點 P 為線段 CD 上的一點使得$PD=2CP$，且 AP 直線交 BC 邊於點 E，如圖所示。若$BC=3AC$，則$\dfrac{CE}{BE}$之值為__________。



【參考解法 1】

令$AC=1$，則$BC=3$且可知$BA=\sqrt{10}$。因 CD 為直角三角形 ABC 斜邊 AB 上的高，故由母子相似性質可以得知$CD=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，且由勾股定理知$AD=\sqrt{1-\dfrac{9}{10}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，故$BD=\sqrt{10}-\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{9}{\sqrt{10}}$。連接 BP，則可得知三角形 PBD 與三角形 PAD 的面積比為 9：1。因 $PC：PD=1：2$，故若令三角形 PCA 的面積為 a，則三角形 PAD 的面積為 $2a$，且可得知三角形 PBD 的面積為$18a$，因此三角形 PBA 與三角形 PCA 的面積比為$18+2：1=20：1$，此即可得知$\dfrac{CE}{BE}=\dfrac{1}{20}$。

【參考解法 2】

觀察可知直線 AE 截三角形 BCD，故由梅氏定理可知 $\frac{BA}{DA}\times\frac{DP}{CP}\times\frac{CE}{BE}=1$，而由【參考解法 1】知 $AD=\frac{1}{\sqrt{10}}$、$BD=\frac{9}{\sqrt{10}}$，即 $\frac{BA}{DA}=\frac{9+1}{1}=10$，再由題意可知 $\frac{DP}{CP}=2$，所以 $10\times 2\times\frac{CE}{BE}=1$，故知 $\frac{CE}{BE}=\frac{1}{20}$。

答：$\underline{\qquad \frac{1}{20} \qquad}$

4. 已知 n 為大於 9 的正整數，且 n^2 的十位數碼為 0，則 n^2 的個位數碼總共有__________個不同的可能值。

【參考解法】

可知 n 至少為二位數，且可判斷出 n^2 的個位數碼只可能為 0、1、4、9、6 或 5 這六種可能。當 n^2 的個位數碼為 5 時，可判斷出 n^2 的十位數碼必為 2，故不合；當 n^2 的個位數碼為 6 時，可判斷出 n^2 的十位數碼必為奇數，故不合。而取 n 為 50、51、52、53，則 n^2 之值依序為 2500、2601、2704、2809，即 n^2 的十位數碼為 0，皆滿足題意。故知 n^2 的個位數碼只可能為 0、1、4、9，共 4 個不同的可能值。

答：$\underline{\qquad 4 \qquad}$ 個

5. 設 a、b 為非零實數，若 $(2a+3b)^3+a^3+3(a+b)=0$，則 $\frac{a}{b}$ 之值為________。

【參考解法】

可利用因式分解將原式改寫：

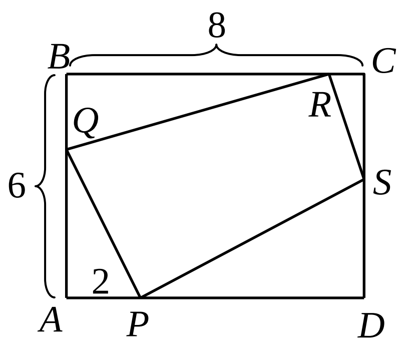
$$(2a+3b+a)((2a+3b)^2-a(2a+3b)+a^2)+3(a+b)=0$$
$$3(a+b)(4a^2+12ab+9b^2-2a^2-3ab+a^2)+3(a+b)=0$$
$$3(a+b)(3a^2+9ab+9b^2+1)=0$$

因 $3a^2+9ab+9b^2+1=\left[3(a^2+3ab+\frac{9}{4}b^2)+\frac{9}{4}b^2\right]+1=\left[3(a+\frac{3}{2}b)^2+\frac{9}{4}b^2\right]+1>0$，

故 $a+b=0$，即 $a=-b$，因此知 $\frac{a}{b}=-1$。

答：$\underline{\qquad -1 \qquad}$

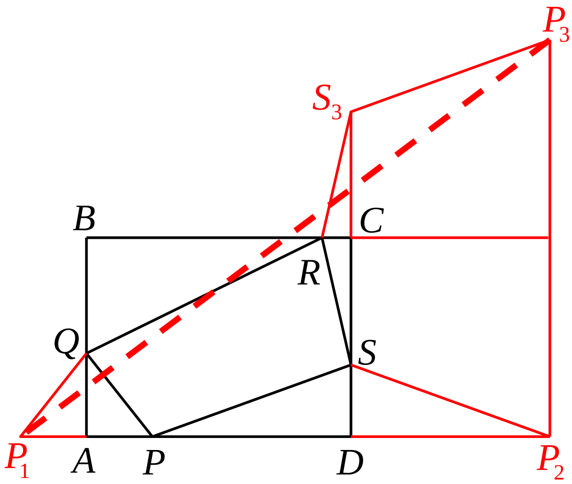
6. 在矩形 $ABCDE$ 中，已知 $AB=6$ cm、$BC=8\,\text{cm}$。若點 P 在邊 DA 上且 $AP=2\,\text{cm}$，並分別在線段 AB、BC、CD 上取點 Q、R、S，如圖所示，則四邊形 $PQRS$ 周長的最小值為__________ cm。



【參考解法】

以 AB 為對稱軸，作點 P 的對稱點 P_1；以 CD 為對稱軸，作點 P 的對稱點 P_2；再以 BC 為對稱軸，分別作 P_2、S 的對稱點 P_3、S_3，如圖所示。此時可知 $P_1P_2 = 2(AP+PD) = 16\text{ cm}$、$P_2P_3 = 2CD = 12\text{ cm}$，因此

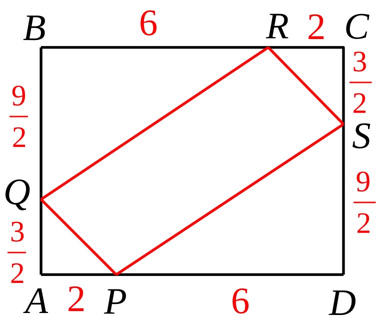
$$\begin{aligned}PQ+QR+RS+SP &= P_1Q+QR+RS_3+SP_2\\ &= P_1Q+QR+RS_3+S_3P_3\\ &\ge P_1P_3\\ &= \sqrt{16^2+12^2}\\ &= 20\end{aligned}$$



而當 $AQ = CS = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}\text{ cm}$、$CR = 2\text{ cm}$ 時，四邊形 $PQRS$ 的周長為

$$\begin{aligned}&PQ+QR+RS+SP\\ &= 2\times\sqrt{2^2+(\frac{3}{2})^2}+2\times\sqrt{6^2+(\frac{9}{2})^2}\\ &= 5+15 = 20\text{ cm}\end{aligned}$$

即四邊形 $PQRS$ 的周長恰為 20 cm 時的圖形如下：



答：20 cm

7. 有一個十位數 n，它是由 10 個不同的數碼所組成，使得 $2n$ 之值也是由 10 個不同的數碼組成。則滿足上述條件最大的 n 值為__________。

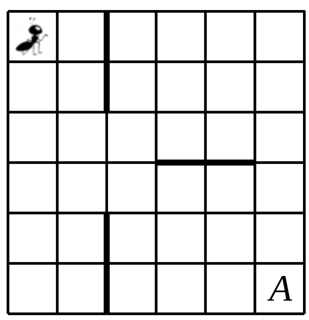
【參考解法】

可知最大的 n 值發生時，$2n$ 也會是最大值。

而 $2n$ 的最大可能值為 9876543210，此時 n 為 4938271605。

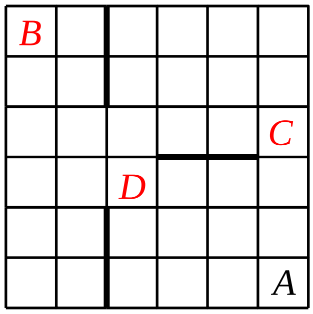
答：4938271605

8. 如圖所示，在 6×6 方格表左上角的小方格中有一隻螞蟻，它想爬到右下角的小方格 A 中。它每次只能沿著水平向右或鉛直向下的方向爬到相鄰的小方格中，並且表格中有三塊隔板（圖中加粗的線條）螞蟻不能從中穿過。則這隻螞蟻總共有__________條不同的路徑可到達方格 A。



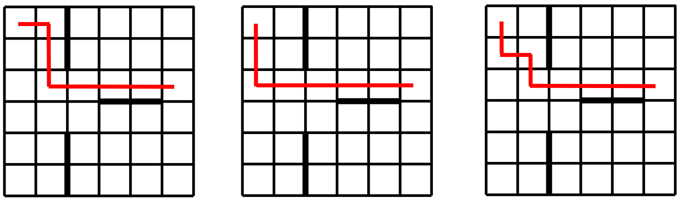
【參考解法 1】

如圖所示，設螞蟻開始所在的小方格為 B，可把螞蟻的路徑分為兩類，第一類是由 B 經過 C 到達 A，第二類是由 B 經過 D 到達 A。

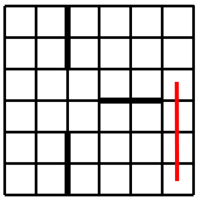


第一類路徑：

由 B 到 C，共有 3 條路徑：



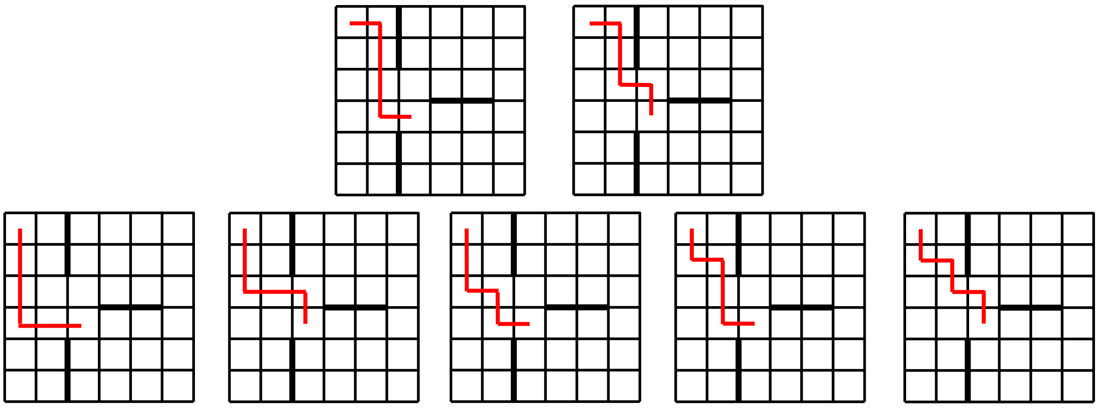
由 C 到 A，共有 1 條路徑：



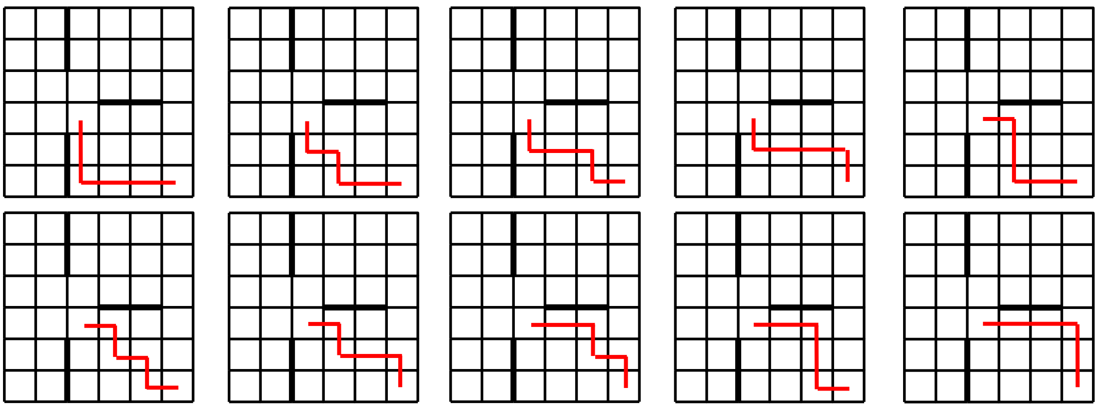
這一類路徑共有 $3\times1=3$ 條。

第二類路徑：

由 B 到 D，共有 7 條路徑：



由 D 到 A，共有 10 條路徑。

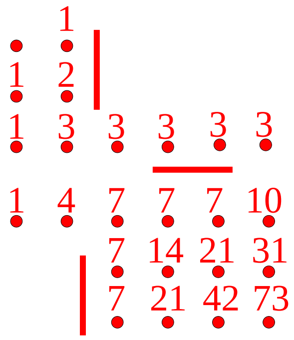


所以這一類路徑共有 $7\times10=70$ 條。

綜上所述，這隻螞蟻總共有 $3+70=73$ 條不同的路徑到達 A。

【參考解法 2】

畫出螞蟻可能通過的小方格之中心，如圖所示，圖中各點上方的數即為螞蟻從起點到該點的不同路徑數：

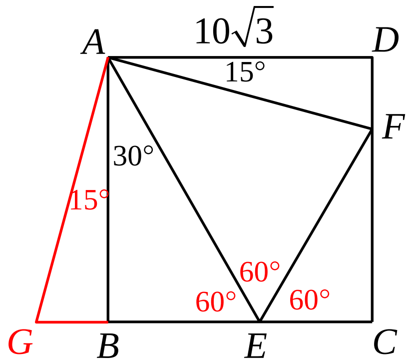


故可得知共有 73 條不同的路徑到達 A。

答：　73　條

9. 已知正方形 $ABCD$ 的邊長為 $10\sqrt{3}$ cm，若點 E、F 分別在 BC、CD 邊上，且 $\angle BAE = 30°$、$\angle DAF = 15°$，如下圖所示，則 $\triangle AEF$ 面積為__________ cm^2。

【參考解法】



可知 $\angle FAE = 90° - 30° - 15° = 45°$、$BE = 10$ cm、$EC = 10\sqrt{3} - 10$ cm。

在 BC 的沿長線上取一點 G 使得 $BG = DF$。

連接 AG，則因 $BG = DF$、$AB = AD$ 且 $\angle ABG = \angle ADF = 90°$ 可知 $\triangle ABG \cong \triangle ADF$，

故 $AG = AF$、$\angle GAB = \angle FAD = 15°$，

因此 $\angle GAE = 45° = \angle FAE$，再因 $AE = AE$，故可知 $\triangle AEG \cong \triangle AEF$，所以 $GE = EF$、$\angle AEB = \angle AEF = 60°$，因此 $\angle FEC = 60°$，

再由 $\angle ECF = 90°$ 可得知 $EF = 2EC = 2(10\sqrt{3} - 10)$，故 $\triangle AEG$ 面積為

$\frac{1}{2} \times AB \times GE = \frac{1}{2} \times 10\sqrt{3} \times 2(10\sqrt{3} - 10) = 300 - 100\sqrt{3}$ cm^2，此即 $\triangle AEF$ 面積。

答：　$300 - 100\sqrt{3}$ cm^2

10. 設 a、b、c、d 是四個實數，已知 $|a+b|$、$|a-b|$、$|c+d|$、$|c-d|$ 之值分別等於 6、7、8、9，則 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ 的值等於__________。

【參考解法】

可知 $(a+b)^2 = (|a+b|)^2 = 6^2 = 36$、$(a-b)^2 = (|a-b|)^2 = 7^2 = 49$，

故 $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}((a+b)^2 + (a-b)^2) = \frac{1}{2} \times (36 + 49)$；

可知 $(c+d)^2 = (|c+d|)^2 = 8^2 = 64$、$(c-d)^2 = (|c-d|)^2 = 9^2 = 81$，

故 $c^2 + d^2 = \frac{1}{2}((c+d)^2 + (c-d)^2) = \frac{1}{2} \times (64 + 81)$；

因此 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{1}{2} \times (36 + 49) + \frac{1}{2} \times (64 + 81) = \frac{1}{2} \times 230 = 115$。

答：　115

11. 給定八個正整數：1、3、9、27、81、243、729、2187。每次可從這八個數中取 1、2、3、4、5、6、7、8 個數求其和(每次每個數只能取一次)，如果將這些和從小到大依序排列，可得到一個數列 1、3、4、9、…、3280，則此數列的第 100 項上的數是__________。

【參考解法】

可知這八個正整數依序為 $3^0=1$、$3^1=3$、$3^2=9$、$3^3=27$、$3^4=81$、$3^5=243$、$3^6=729$、$3^7=2187$，因此可把所算出的和視為三進制裡的數；再因每一個數在每一項的計算中都只能用一次或是不用，即在三進制中的每一位數都是 1 或 0，故第 100 項的表示法即為將 100 表示成二進制的表法。因 $100=(1100100)_2$，故第 100 項的數為 $(1100100)_3$，即 $1\times3^6+1\times3^5+1\times3^2=729+243+9=981$。

答： 981

12. 已知 11 的數碼和為 2，$11\times11\times11$ 的數碼和為 8，而 111 的數碼和為 3，$111\times111\times111$ 的數碼和為 27。若 m 是一個數碼和為 4 的正整數，且使得 $m\times m\times m$ 數碼和為 64，則 m 的最小值為__________。

【參考解法】

因要找出 m 的最小值，故可假設 m 的個位數碼不為 0。而因 m 的數碼和為 4，故組成 m 的非零數碼僅可能為 4、3+1、2+2、2+1+1、1+1+1+1。透過觀察可知，在計算三次方的過程中，不可有進位的情況發生，否則數碼和會變小，而每一個數碼都會有自乘三次的情況，因此 m 的最小值發生時，組成 m 的非零數碼之三次方必小於 10，即組成 m 的非零數碼只可能為 1 或 2。

若組成 m 的非零數碼為 2、2，則 m 必可寫成 $2\times10^a+2$ 的形式，

而 $(2\times10^a+2)^3=2^3\times10^{3a}+3\times2^3\times10^{2a}+3\times2^2\times10^a+2^3$，其數碼和至多為

$8+2+4+2+4+8=28$，不合；

若組成 m 的非零數碼為 2、1、1，則 m 必可寫成 $2\times10^a+10^b+1$ 或 10^a+10^b+2 的形式，而 $(2\times10^a+10^b+1)^3=2^3\times10^{3a}+10^{3b}+1+3\times2^2\times10^{2a+b}+3\times2^2\times10^{2a}$ $+3\times10^{2b}+3\times2\times10^{a+2b}+3\times2\times10^{2b}+3\times10^b+6\times2\times10^{a+b+c}$，其數碼和至多為

$8+1+1+1+2+1+2+3+6+6+3+1+2=37$，不合；

故可得知組成 m 的非零數碼為 1、1、1、1。

若 m 為四位數，則 $m=1111$，但 $1111^3=1371330631$，其數碼和為 28，故不合；

若 m 為五位數，則由 $10111^3=1033670997631$，其數碼和為 55；

$11011^3=1334996994331$，其數碼和恰為 64 可得知 m 的最小值為 11011。

答： 11011

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 已知 a、b、c、d 是兩兩相異的非零數碼，四位數 $\overline{abcd}$ 與 $\overline{acbd}$ 的最大公因數為 n，請問 n 的最大可能值是多少？

【參考解法】

可知二個數的公因數必是此二個數之差的因數，所以 n 為 $\overline{abcd}-\overline{acbd}$ 的因數，且由 $d\neq 0$ 可判斷出 n 的個位數碼不為 0，即 n 不能同時有質因數 2 與質因數 5。不失一般性，可令 $b>c$，則 $\overline{abcd}-\overline{acbd}=90(b-c)$。

若 n 沒有質因數 2，則 n 為 $\dfrac{90(b-c)}{2}=45(b-c)$ 的因數，再由 $b-c\leq 9-1=8$ 知 n 至多為 $45\times 7=315$。若 $n=315$，則由 n 的個位數碼為 5 知 $d=5$、由 $b-c=7$ 知 $b=8$、$c=1$，或者 $b=9$、$c=2$，再由 315 為 9 的倍數知 $\overline{abcd}$ 必為 4815 或 2925 之一，但兩者均不能被 315 整除，故不合。n 的下一個可能值為 $45\times 5=225$，而當 $\overline{abcd}=4725=225\times 21$、$\overline{acbd}=4275=225\times 19$ 時，$n=225$。

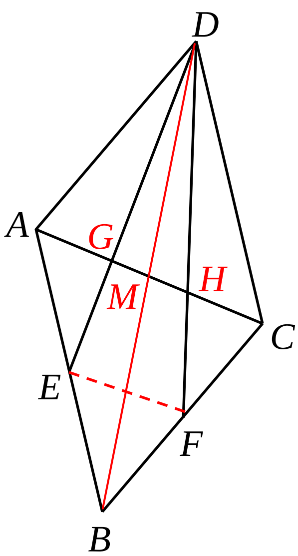
若 n 沒有質因數 5，則 n 為 $\dfrac{90(b-c)}{5}=18(b-c)$ 的因數，其值至多為 $18\times 8=144$。

綜上所述，n 的最大可能值是 225。

答：225

2. 在凸四邊形 $ABCD$ 的邊 AB 和 BC 上，取點 E 和 F，使線段 DE 和 DF 把對角線 AC 三等分，若△ADE 和△CDF 的面積都等於四邊形 $ABCD$ 面積的 $\dfrac{1}{4}$，求證四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。

【參考解法 1】



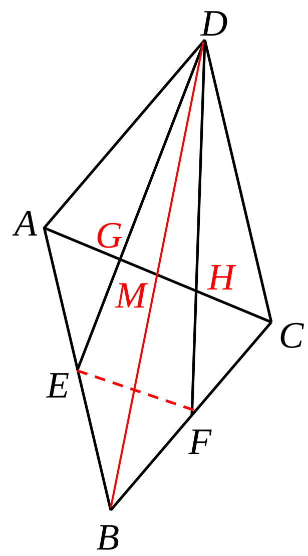
連接 BD，並令 ED、BD、FD 分別交 AC 於點 G、M、H。再連接 EF。可知 G、H 為 AC 的三等分點，故三角形 AGD 與三角形 CHD 的面積相等，再由三角形 ADE 與三角形 CDF 的面積相等可得知三角形 AGE 與三角形 CHF 的面積相等，由於 $AG=CH$，故 $EF//AC$，即有 $\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{BF}{CF}$。若用[*]表示三角形*的面積，則知 $\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{[\triangle BDE]}{[\triangle ADE]}$、$\dfrac{BF}{CF}=\dfrac{[\triangle BDF]}{[\triangle CDF]}$；再因三角形 ADE 與三角形 CDF 的面積相等，故可判斷出三角形 BDE 與三角形 BDF 的面積相等，且三角形 BDE、三角形 BDF、三角形 ADE 與三角形 CDF 的面積都是四邊形 $ABCD$ 面積的 $\dfrac{1}{4}$，故：

(i) 三角形 ABD 與三角形 CBD 的面積都是四邊形 $ABCD$ 面積的 $\dfrac{1}{2}$，因此由共邊定理知 $AM=CM$，因此 $AG=\dfrac{1}{3}AC=\dfrac{2}{3}AM$、$GM=\dfrac{1}{3}AM$，即 $AG=2GM$；

(ii) 三角形 ADE 與三角形 BDE 的面積相等，故 $AE=EB$，即 E 為 AB 邊的中點。

由(i)、(ii)可判斷出 AM 為 BD 邊上的中線，所以 $DM=BM$。此時可發現四邊形 $ABCD$ 的對角線互相平分，所以四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。

【參考解法 2】



連接 BD，並令 ED、BD、FD 依序分別交 AC 於點 G、M、H。再連接 EF。可知 G、H 為 AC 的三等分點，故三角形 AGD 與三角形 CHD 的面積相等，再由三角形 ADE 與三角形 CDF 的面積相等可得知三角形 AGE 與三角形 CHF 的面積相等，故 $EF//AC$，即有 $\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{BF}{CF}$。

可觀察出 DE 截三角形 BAM，並交 BM 的延長線於點 D，故由梅氏定理得知 $\dfrac{BE}{AE}\times\dfrac{MD}{BD}\times\dfrac{AG}{MG}=1$；同樣 DF 截三角形 BCM，並交 BM 的延長線於點 D，故由梅氏定理得知 $\dfrac{BF}{CF}\times\dfrac{MD}{BD}\times\dfrac{CH}{MH}=1$，即 $\dfrac{BE}{AE}\times\dfrac{MD}{BD}\times\dfrac{AG}{MG}=\dfrac{BF}{CF}\times\dfrac{MD}{BD}\times\dfrac{CH}{MH}$。

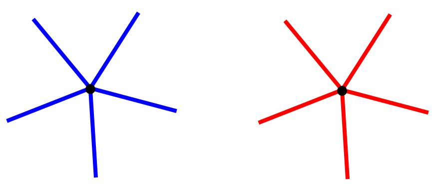
由 $\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{BF}{CF}$ 可得知 $\dfrac{AG}{MG}=\dfrac{CH}{MH}$，再因 $AG=CH$，故 $MG=MH$，即 $AM=CM$。
此時知 M 為 AC 中點，故三角形 ABD 與三角形 CBD 的面積都是四邊形 $ABCD$ 面積的 $\dfrac{1}{2}$，再因三角形 ADE 與三角形 CDF 的面積都是四邊形 $ABCD$ 面積的 $\dfrac{1}{4}$，所以三角形 BDE、三角形 BDF、三角形 ADE 與三角形 CDF 的面積都是四邊形 $ABCD$ 面積的 $\dfrac{1}{4}$，故 $AE=BE$、$CF=BF$，再由 $\dfrac{BE}{AE}\times\dfrac{MD}{BD}\times\dfrac{AG}{MG}=1$ 知 $\dfrac{MD}{BD}=1$，即 $BM=DM$，故四邊形 $ABCD$ 的對角線互相平分，所以四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。

3. 將正六邊形的某些邊與對角線塗上紅或藍之一種顏色，試證：
   (1) 如果共塗色 15 條線段時，則圖中至少有兩個單色三角形(三個邊為同一種顏色的三角形稱為單色三角形)。
   (2) 如果只塗色 14 條線段時，則不一定存在有單色三角形。

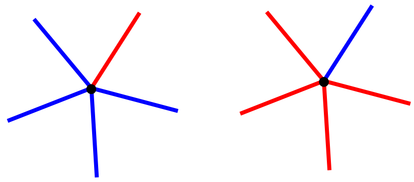
(1)
【參考解法 1】

將 15 條線段塗色即為將正六邊形的邊與全部的對角線都塗色，因此圖中的三角形可視為從六個頂點中任取三點所形成的三角形，此共有 $C^6_3=20$ 個三角形。現將三角形中，一個點若與其他二點的連線同色，則記為 S 角；一個點若與其他二點的連線異色，則記為 D 角。可知如果一個三角形的三邊若不全為同色，則必有二個 D 角、一個 S 角。現假設有 x 個異色三角形，y 個單色三角形，則知 $x+y=20$ 且共有 $2x$ 個 D 角。而觀察可知每一點所畫出的線段顏色比可能是 5：0，4：1 或是 3：2。

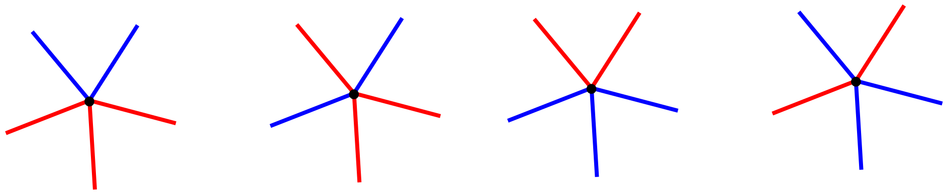
若是 5：0，則共有 $C^5_3=10$ 個 S 角、沒有 D 角：



若是 4：1，則共有 $C_2^4=6$ 個 S 角、$10-6=4$ 個 D 角：



若是 3：2，則共有 $C_2^3+C_2^2=4$ 個 S 角、$10-4=6$ 個 D 角：



因此一個點最多代表 6 個 D 角，所以六個頂點最多有 $6\times 6=36$ 個 D 角，故可得知 $2x\le 36$，即 $x\le 18$，因此 $y\ge 2$，此即為所求。

【參考解法 2】

將 15 條線段塗色即為將正六邊形的邊與全部的對角線都塗色，因此圖中的三角形可視為從六個頂點中任取三點所形成的三角形。不妨設這六個點為 A、B、C、D、E、F，則由點 A 出發的線段共有 5 條線，由抽屜原理知其中至少有三條線是同色的，不妨令 AB、AC、AD 為紅色線段。若三角形 BCD 是單色三角形，則單色三角形存在；若三角形 BCD 不是單色三角形，則至少有一條邊為紅色，不妨設為 BC，則三角形 ABC 為單色三角形。故知單色三角形必存在。

若三角形 DEF 也是單色三角形，則整個圖中至少有二個單色三角形；若三角形 DEF 不是單色三角形，則至少有一條邊為藍色，不妨設為 DE，則：

(i) 若從點 D 往點 A、B、C 連的三條線段中，至少有二條紅線，不妨設為 AD、BD，則三角形 ABD 為單色三角形，即整個圖中至少有二個單色三角形；

(ii) 若從點 D 往點 A、B、C 連的三條線段中，至多有一條紅線，則利用(i)的想法可判斷出從點 E 往點 A、B、C 連的三條線段中，也至多有一條紅線，否則仍可得到二個單色三角形。因此 A、B、C 三點中，至少有一個點與 D、E 都是由藍色線段相連，不妨設為 A，則三角形 ADE 為單色三角形，即整個圖中至少有二個單色三角形。

(2) 如以右之方式塗色 14 條線段時，則不存在單色三角形：