

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2014 年青少年數學國際城市邀請賽
 參賽代表遴選初賽個人賽解答

作答時間: 二小時

第一部分: 填充題, 每小題 5 分, 共 60 分

(注意: 請在每題試題後所附的空格上填入答案, 只需填寫答案。若答案為數值, 請用阿拉伯數字; 若答案為分數, 請化為最簡分數)

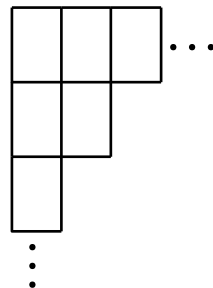
1. 設 $P = 2^{2016}$, 則 P 除以 13 的餘數為_____。

答: _____ **1**

2. 某校辦理三年級戶外教學時向每位同學都收取相同費用, 此費用為整數元。如果甲班有 $2m$ 位男生與 13 位女生、乙班有 7 位男生與 $2n$ 位女生, 其中 m 、 n 都是正整數。兩班收取費用的總數相等, 都是 $2mn + 7m + 13n + 84$ 元。則每一位同學收取的費用為_____元。

答: _____ **39元**

3. 阿哲有一副 52 張撲克牌, 每張牌都是長 6 cm、寬 4 cm。他想用這副撲克牌以長邊對長邊、短邊對短邊且不重疊地拼出一個最大的正方形(如圖所示), 則拼完最大的正方形後, 這副撲克牌還會剩下_____張牌。

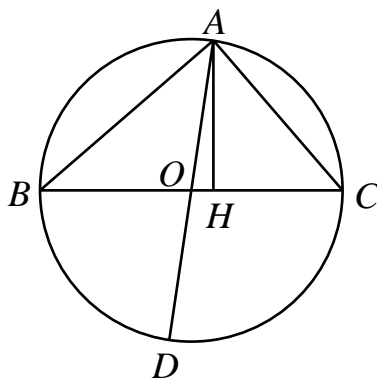


答: _____ **28張**

4. 設 $N = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 42^2 - 41^2$, 則 N 共有_____個不同的正質因數。

答: _____ **4個**

5. 三角形 ABC 內接於圓 O 中, 線段 AD 為圓 O 的直徑, 點 H 在線段 BC 上, 且 $AH \perp BC$, 如圖所示。已知 $AH = 32$ 、 $BH = 16\sqrt{5}$ 、 $CH = 2\sqrt{185}$, 則 $AD \times AH$ 之值為_____。



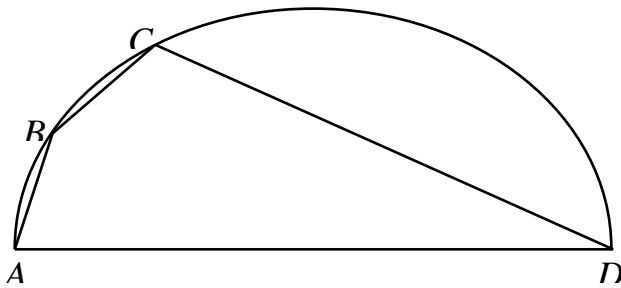
答: _____ **2016**

6. 將正整數依照下圖所示方式填入一個很大的方格表中，由左上至右下的對角線上的正整數分別是 1、3、7、13、 \dots ，則此對角線上第一個超過 50 的正整數為 _____。

1	2	9	10	\dots
4	3	8	11	
5	6	7	12	
16	15	14	13	\dots
\vdots			\vdots	

答：_____ **57**

7. 四邊形 $ABCD$ 內接於一圓， AD 為該圓的直徑其長度為 4 cm，如下圖所示。如果 AB 與 BC 的長度皆為 1 cm，則 CD 的長度為 _____ cm。

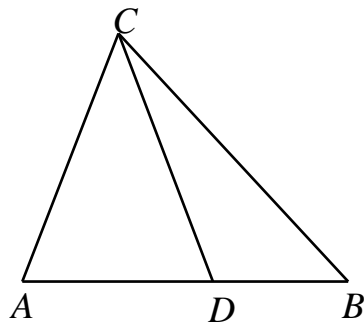


答：_____ **3.5 cm**

8. 已知 $a > 0$ ，且方程 $x^2 + ax + 1 = 0$ 的二根之差為 2，則 $a =$ _____。

答：_____ **$2\sqrt{2}$**

9. $AD = 6$ cm、 $\angle ACD = 2\angle DCB = \angle B = 45^\circ$ ，如下圖所示，則 BD 長度為 _____ cm。

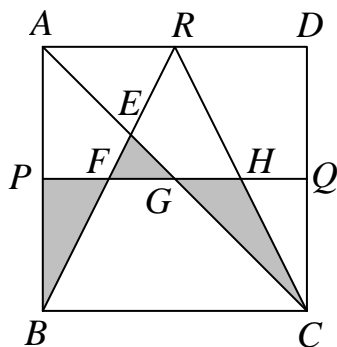


答：_____ **$3\sqrt{2}$ cm**

10. 已知 a_1 、 a_2 、 a_3 、 \dots 、 a_n 都是實數，且對於所有的正整數 n ，等式 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n = (n+1)^3$ 恆成立。則 $\frac{1}{a_1-1} + \frac{1}{2a_2-1} + \dots + \frac{1}{49a_{49}-1}$ 之值為 _____。

答：_____ **53/175**

11. 已知點 P 、 Q 、 R 分別為正方形 $ABCD$ 的 AB 、 CD 、 DA 邊之中點，若線段 BR 與 AC 、 PQ 分別交於點 E 、 F ，線段 PQ 與 AC 、 RC 分別交於 G 、 H 點，如下圖所示。令陰影區域之面積總和為 m 、正方形 $ABCD$ 的面積為 n ，則 $\frac{m}{n}$ 之值為_____。



答：_____ $\frac{7}{48}$

12. 將一些紅色珠子與藍色珠子排成一直線，且紅、藍色珠子都各至少有一顆，並使得若任意兩顆珠子之間恰有 6 顆或 9 顆珠子，則這兩顆珠子必須是同顏色的。請問這一排珠子最多能有多少顆？

答：_____ 15顆

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 設 a 、 b 為直角三角形的兩股長， c 為斜邊長，其中 $a \neq b$ 。若實數 x 、 y 滿足

$$\frac{x}{2a^2} + \frac{y}{c^2} = 1 \text{ 且 } \frac{x}{c^2} + \frac{y}{2b^2} = 1, \text{ 請證明 } x + y = 2c^2.$$

【參考解答 1】

以 $c^2 = a^2 + b^2$ 代入

$$\frac{x}{2a^2} + \frac{y}{c^2} = 1 \text{ 及 } \frac{x}{c^2} + \frac{y}{2b^2} = 1, \text{ 可得}$$

$$\frac{x}{a^2 + a^2} + \frac{y}{a^2 + b^2} = 1 \text{ 及 } \frac{x}{b^2 + a^2} + \frac{y}{b^2 + b^2} = 1 \text{ (給 2 分)}$$

由上述兩式可得知： a^2 及 b^2 為方程 $\frac{x}{t+a^2} + \frac{y}{t+b^2} = 1$ 的二根 (給 6 分)

$$t^2 + (a^2 + b^2 - x - y)t + a^2b^2 - xb^2 - ya^2 = 0 \text{ (給 6 分)}$$

$$a^2 + b^2 = x + y - a^2 + b^2,$$

所以 $x + y = 2c^2$ (給 6 分)

【參考解法 2】

由勾股定理知 $a^2 + b^2 = c^2$ ，故知

$$\frac{x}{2a^2} + \frac{y}{c^2} = \frac{x}{2a^2} + \frac{y}{a^2 + b^2} = 1, \quad \frac{x}{c^2} + \frac{y}{2b^2} = \frac{x}{a^2 + b^2} + \frac{y}{2b^2} = 1 \text{ (給 2 分)}$$

化簡可得：

$$\begin{cases} (a^2 + b^2)x + 2a^2y = 2a^2(a^2 + b^2) \\ 2b^2x + (a^2 + b^2)y = 2b^2(a^2 + b^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b^2(a^2 + b^2)x + 4a^2b^2y = 4a^2b^2(a^2 + b^2) \\ 2b^2(a^2 + b^2)x + (a^2 + b^2)^2y = 2b^2(a^2 + b^2)^2 \end{cases}$$

兩式相減可得：

$$\begin{aligned} [(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2]y &= 2b^2(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2(a^2 + b^2) \\ (a^2 - b^2)^2y &= 2a^4b^2 + 4a^2b^4 + 2b^6 - 4a^4b^2 - 4a^2b^4 \\ y &= \frac{2b^6 - 2a^4b^2}{(a^2 - b^2)^2} = \frac{2b^2(b^4 - a^4)}{(a^2 - b^2)^2} = \frac{2b^2(b^2 + a^2)}{(b^2 - a^2)} \end{aligned}$$

(給 8 分)

而若將 $\frac{x}{a^2 + b^2} + \frac{y}{2b^2} = 1$ 、 $\frac{x}{2a^2} + \frac{y}{a^2 + b^2} = 1$ 這兩式相減則可得：

$$\begin{aligned} \frac{x-y}{a^2 + b^2} + \left(\frac{y}{2b^2} - \frac{x}{2a^2}\right) &= 0 \\ \frac{x-y}{a^2 + b^2} &= \frac{x}{2a^2} - \frac{y}{2b^2} = \frac{b^2x - a^2y}{2a^2b^2} \\ 2a^2b^2x - 2a^2b^2y &= a^2b^2x - a^4y + b^4x - a^2b^2y \\ a^2b^2x - a^2b^2y &= b^4x - a^4y \\ b^2(b^2 - a^2)x &= a^2(a^2 - b^2)y \\ x &= -\frac{a^2}{b^2}y \end{aligned}$$

(給 8 分)

$$\text{故 } x + y = -\frac{a^2}{b^2}y + y = \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2}\right)y = \frac{(b^2 - a^2)}{b^2} \times \frac{2b^2(b^2 + a^2)}{(b^2 - a^2)} = 2(b^2 + a^2) = 2c^2 \text{ (給 2 分)}$$

2. 對於正整數 n ，設 $f(n)$ 表示 n 的數碼和。例如 $f(23) = 2 + 3 = 5$ 。若 n 是二位數，請問共有多少個正整數 n 會使得 $\frac{n}{f(n)}$ 的值大於 8？

解答：令此二位數為 $n = 10x + y$ ，且 $x \neq 0$ ， x 為 1~9 的任意正整數、 y 為 0~9 的任意

$$\text{正整數，則 } \frac{n}{f(n)} = \frac{10x + y}{x + y} = 10 - \frac{9y}{x + y} \text{ (給 2 分)}$$

$$\text{欲求 } \frac{n}{f(n)} > 8, \text{ 即求 } \frac{9y}{x + y} < 2 \Leftrightarrow 9y < 2(x + y) \Leftrightarrow 7y < 2x, \text{ (給 8 分)}$$

求得

(1) $(x, y) = (x, 0)$: x 為 1~9 的任意正整數, 有 9 個, 即 10, 20, ..., 90. (給 3 分)

(2) $(x, y) = (x, 1)$: x 為 4~9 的任意正整數, 有 6 個, 即 41, 51, 61, 71, 81, 91. (給 3 分)

(3) $(x, y) = (x, 2)$: x 為 8~9, 有 2 個, 即 82, 92. (給 2 分)

當 n 是二位數且 $\frac{n}{f(n)}$ 的值大於 8 的自然數 n 有 17 個. (給 2 分)

答： 17個

3. 在 6×6 的方格表中不重複地填入 1 至 36 的數，每個小方格內恰填一個數，並要求連續的兩個數必須填在有共同邊的相鄰兩個小方格內。請證明其中一條對角線上的六個數之和的最大可能值為 174 並找出一種填法。

【參考解法】

如圖，將 6×6 的方格表相間塗色。由填數規則知僅有共同頂點但沒有共同邊的小方格所填之數的差恆為偶數且至少為 2，因此若令左上角的灰色格子為偶數，則所有灰色格子都必為偶數、白色格子都是奇數。(給 2 分)

不妨設六個數之和的最大可能值發生在左上至右下的這條對角線上，並假設此對角線上最小的數為 m ，則同樣由填數規則可以判斷出所有小於 m 的數都會同時落在此對角線右上方的區域(不含此對角線)或是左下方的區域(不含此對角線)。不失一般性，可假設所有小於 m 的數都會同時落在此對角線右上方的區域(不含此對角線)，且因為此區域中共有 6 個灰色格子，故至多有 6 個偶數小於 m ，即 m 至多為 14，因此可以得知在左上至右下的這條對角線上六個數之和的最大可能值為

$$36 + 34 + 32 + 30 + 28 + 14 = 174。$$

(給 10 分)

若定義由左至右為第 1 行至第 6 行、由上至下為第 1 列至第 6 列，則由填數規則可判斷出任意兩個數之間的差即為這兩個數所在行數的差之絕對值與所在列數的差之絕對值的和。現因 36、34、32、30、28 之間的公差為 2，故知這五個數必在左上至右下的這條對角線上有共同頂點的連續五個方格，因此有以下兩種情況：

36					
35	34				
	33	32			
		31	30		
			29	28	15
					16

36					
	34				
		32			
			30		
				28	
					14

14					
	36				
		34			
			32		
				30	
					28

現觀察 29、31、33、35 的位置：

- (i) 若這四個數都在同一側，不妨假設為都在對角線右上方的區域，則此區域僅能再填入 $15 - 4 = 11$ 個數，因此可判斷出比 14 小的 13 個數都在對角線左下方的區域，也由此可得知 15 必填在對角線右上方的區域：

36	35				
	34	33			
		32	31		
			30	29	
				28	15
				13	14

14	15				
13	36	35			
		34	33		
			32	31	
				30	29
					28

此時可發現其餘比 15 大的數必填在對角線右上方的區域，但 27 必填在對角線左下方的區域，故不可能完成；

- (ii) 若這四個數有三個數都在同一側，不妨假設為在對角線右上方的區域，則此區域僅能再填入 $15 - 3 = 12$ 個數，因此可判斷出比 14 小的 13 個數都在對角線左下方的區域，也由此可得知 15 必填在對角線右上方的區域：

36	35				
	34	33			
		32	31		
			30		
			29	28	15
				13	14

14	15				
13	36	35			
		34	33		
			32	31	
				30	
				29	28

36	35				
	34	33			
		32			
		31	30	29	
				28	15
				13	14

14	15				
13	36	35			
		34	33		
			32		
			31	30	29
				28	15
					28

36	35				
	34				
	33	32	31		
			30	29	
				28	15
				13	14

14	15				
13	36	35			
		34			
		33	32	31	
				30	29
					28

36					
35	34	33			
		32	31		
			30	29	
				28	15
				13	14

14	15				
13	36				
		35	34	33	
			32	31	
				30	29
					28

此時 15 至 28 之間的 12 個數都須填入對角線右上方的區域內的 11 個空格，故不合；

- (iii) 若這四個數有二個數在同一側、另二個數在另一側：

(a) 若是 29、31 在同一側，33、35 在另一側，即：

36					
35	34				
	33	32	31		
			30	29	
				28	
					14

14					
	36				
	35	34			
		33	32	31	
				30	29
					28

此時可知 15 與 27 都必須在同一側，因此可得：

36					
35	34				
		33	32	31	
				30	29
				27	28
				15	14

14						
15	36					
		35	34			
			33	32	31	
					30	29
					27	28

此時可發現左上表中，位於 35 下方、33 左方的格子無法填入任何一個介於 15 與 27 之間的數；而右上表中，位於 29 上方、31 右方的格子僅有填入 1 才能符合填數規則，但此處須填偶數，故不合；

(b) 若是 29、33 在同一側，31、35 在另一側，即：

36					
35	34	33			
			32		
			31	30	29
					28
					14

14						
	36					
		35	34	33		
				32		
				31	30	29
						28

此時可知 15 與 27 都必須在同一側，因此可得：

36					
35	34	33			
			32		
			31	30	29
				27	28
				15	14

14						
15	36					
		35	34	33		
				32		
				31	30	29
						28

接著利用填數規則可得知部分數字的唯一填法，如下二表：

36	1	2	3		
35	34	33			
22	23	32			11
21	24	31	30	29	12
20	25	26	27	28	13
19	18	17	16	15	14

14	13	12	9	8	
15	36	11	10		
16	35	34	33		
17			32		
			31	30	29
		25	26	27	28

以上二表中的空白區域都有二種填法、紅色區域有四種填法，故可得以下 $2 + 2 \times 4 = 10$ 種滿足題意的填法：

36	1	2	3	8	9
35	34	33	4	7	10
22	23	32	5	6	11
21	24	31	30	29	12
20	25	26	27	28	13
19	18	17	16	15	14

36	1	2	3	4	5
35	34	33	8	7	6
22	23	32	9	10	11
21	24	31	30	29	12
20	25	26	27	28	13
19	18	17	16	15	14

14	13	12	9	8	1
15	36	11	10	7	2
16	35	34	33	6	3
17	18	19	32	5	4
22	21	20	31	30	29
23	24	25	26	27	28

14	13	12	9	8	7
15	36	11	10	1	6
16	35	34	33	2	5
17	18	19	32	3	4
22	21	20	31	30	29
23	24	25	26	27	28

14	13	12	9	8	7
15	36	11	10	5	6
16	35	34	33	4	1
17	18	19	32	3	2
22	21	20	31	30	29
23	24	25	26	27	28

14	13	12	9	8	7
15	36	11	10	5	6
16	35	34	33	4	3
17	18	19	32	1	2
22	21	20	31	30	29
23	24	25	26	27	28

14	13	12	9	8	1
15	36	11	10	7	2
16	35	34	33	6	3
17	22	23	32	5	4
18	21	24	31	30	29
19	20	25	26	27	28

14	13	12	9	8	7
15	36	11	10	1	6
16	35	34	33	2	5
17	22	23	32	3	4
18	21	24	31	30	29
19	20	25	26	27	28

14	13	12	9	8	7
15	36	11	10	5	6
16	35	34	33	4	1
17	22	23	32	3	2
18	21	24	31	30	29
19	20	25	26	27	28

14	13	12	9	8	7
15	36	11	10	5	6
16	35	34	33	4	3
17	22	23	32	1	2
18	21	24	31	30	29
19	20	25	26	27	28

(c) 若是 29、35 在同一側，31、33 在另一側，即：

36	35				
	34				
	33	32			
		31	30	29	
				28	
					14

14					
	36	35			
		34			
		33	32		
			31	30	29
					28

此時可知 15 與 27 都必須在同一側，因此可得：

36	35				
	34				
	33	32			
		31	30	29	
			27	28	
				15	14

14					
15	36	35			
		34			
		33	32		
			31	30	29
				27	28

此時可發現左上表中，位於 36 下方、34 左方的格子無法填入任何一個介於 15 與 27 之間的數；而右上表中，利用填數規則可得知部分數字的唯一填法，如下表：

14	13	12	11		
15	36	35			
16	17	34			
19	18	33	32		
20	23	24	31	30	29
21	22	25	26	27	28

上表中空白區域有八種填法，即以下 8 種滿足題意的填法：

14	13	12	11	10	9
15	36	35	6	7	8
16	17	34	5	4	1
19	18	33	32	3	2
20	23	24	31	30	29
21	22	25	26	27	28

14	13	12	11	10	9
15	36	35	6	7	8
16	17	34	5	4	3
19	18	33	32	1	2
20	23	24	31	30	29
21	22	25	26	27	28

14	13	12	11	10	9
15	36	35	2	3	8
16	17	34	1	4	7
19	18	33	32	5	6
20	23	24	31	30	29
21	22	25	26	27	28

14	13	12	11	10	9
15	36	35	2	1	8
16	17	34	3	4	7
19	18	33	32	5	6
20	23	24	31	30	29
21	22	25	26	27	28

14	13	12	11	10	1
15	36	35	8	9	2
16	17	34	7	6	3
19	18	33	32	5	4
20	23	24	31	30	29
21	22	25	26	27	28

14	13	12	11	2	3
15	36	35	10	1	4
16	17	34	9	8	5
19	18	33	32	7	6
20	23	24	31	30	29
21	22	25	26	27	28

14	13	12	11	2	1
15	36	35	10	3	4
16	17	34	9	8	5
19	18	33	32	7	6
20	23	24	31	30	29
21	22	25	26	27	28

14	13	12	11	6	5
15	36	35	10	7	4
16	17	34	9	8	3
19	18	33	32	1	2
20	23	24	31	30	29
21	22	25	26	27	28

故共有 $10 + 8 = 18$ 種滿足題意的填法：

36	1	2	3	8	9
35	34	33	4	7	10
22	23	32	5	6	11
21	24	31	30	29	12
20	25	26	27	28	13
19	18	17	16	15	14

36	1	2	3	4	5
35	34	33	8	7	6
22	23	32	9	10	11
21	24	31	30	29	12
20	25	26	27	28	13
19	18	17	16	15	14

14	13	12	9	8	1
15	36	11	10	7	2
16	35	34	33	6	3
17	18	19	32	5	4
22	21	20	31	30	29
23	24	25	26	27	28

14	13	12	9	8	7
15	36	11	10	1	6
16	35	34	33	2	5
17	18	19	32	3	4
22	21	20	31	30	29
23	24	25	26	27	28

14	13	12	9	8	7
15	36	11	10	5	6
16	35	34	33	4	1
17	18	19	32	3	2
22	21	20	31	30	29
23	24	25	26	27	28

14	13	12	9	8	7
15	36	11	10	5	6
16	35	34	33	4	3
17	18	19	32	1	2
22	21	20	31	30	29
23	24	25	26	27	28

14	13	12	9	8	1
15	36	11	10	7	2
16	35	34	33	6	3
17	22	23	32	5	4
18	21	24	31	30	29
19	20	25	26	27	28

14	13	12	9	8	7
15	36	11	10	1	6
16	35	34	33	2	5
17	22	23	32	3	4
18	21	24	31	30	29
19	20	25	26	27	28

14	13	12	9	8	7
15	36	11	10	5	6
16	35	34	33	4	1
17	22	23	32	3	2
18	21	24	31	30	29
19	20	25	26	27	28

14	13	12	9	8	7
15	36	11	10	5	6
16	35	34	33	4	3
17	22	23	32	1	2
18	21	24	31	30	29
19	20	25	26	27	28

14	13	12	11	10	9
15	36	35	6	7	8
16	17	34	5	4	1
19	18	33	32	3	2
20	23	24	31	30	29
21	22	25	26	27	28

14	13	12	11	10	9
15	36	35	6	7	8
16	17	34	5	4	3
19	18	33	32	1	2
20	23	24	31	30	29
21	22	25	26	27	28

14	13	12	11	10	9
15	36	35	2	3	8
16	17	34	1	4	7
19	18	33	32	5	6
20	23	24	31	30	29
21	22	25	26	27	28

14	13	12	11	10	9
15	36	35	2	1	8
16	17	34	3	4	7
19	18	33	32	5	6
20	23	24	31	30	29
21	22	25	26	27	28

14	13	12	11	10	1
15	36	35	8	9	2
16	17	34	7	6	3
19	18	33	32	5	4
20	23	24	31	30	29
21	22	25	26	27	28

14	13	12	11	2	3
15	36	35	10	1	4
16	17	34	9	8	5
19	18	33	32	7	6
20	23	24	31	30	29
21	22	25	26	27	28

14	13	12	11	2	1
15	36	35	10	3	4
16	17	34	9	8	5
19	18	33	32	7	6
20	23	24	31	30	29
21	22	25	26	27	28

14	13	12	11	6	5
15	36	35	10	7	4
16	17	34	9	8	3
19	18	33	32	1	2
20	23	24	31	30	29
21	22	25	26	27	28

(任給出一個例子即可共得 8 分)

評分參考:1.能呈現對角線 6 個數相加等於 174(給 2 分)

2.提出解題策略並加以論證者(給 10 分)

3.寫出一種正確填法(給 8 分)