2016 年青少年數學國際城市邀請賽複賽試題詳解

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

1. 小明買了 6 支筆與 3 本筆記本，小華買了 3 支筆與 6 本筆記本，他們買的筆與筆記本款式都相同，付款時小明發現自己比小華多花了 6 元。則筆的售價比筆記本的售價貴________元。

【參考解法】

可知小明比小華多買了 3 支筆、少買了 3 本筆記本，且多花了 6 元，故可判斷出筆的售價比筆記本的售價貴 $6\div 3=2$ 元。

答案：2 元

2. 將 2016 的所有因數從大到小排成一列，設 2016 的第三個因數為 F_3，第四個因數為 F_4，則 $F_3-F_4=$________。

【參考解法】

因 $2016=2^5\times 3^2\times 7$，故知 2016 最小的四個因數依序為 1、2、3、$2^2=4$，

故 2016 第三大的因數 $F_3=2016\div 3=672$、$F_4=2016\div 4=504$，

所以 $F_3-F_4=672-504=168$。

答案：168

3. 若 $r=3x+2y$、$s=xy-x-y$，請問 $xr+ys$ 等於下面哪一項？

（A）$x^2y-x^2+2xy+2y^2$　（B）$xy^2+3x^2+xy-y^2$　（C）x^2y+2x^2+xy

（D）xy^2+2x^2+2xy　（E）x^2y^2+x+y

【參考解法】

$xr+ys=x(3x+2y)+y(xy-x-y)=3x^2+2xy+xy^2-xy-y^2=xy^2+3x^2+xy-y^2$。

答案：（B）

4. 設 n 為正整數，方程式 $x^2+(2n+1)x+n^2=0$ 的兩根為 α_n、β_n，則

$$\frac{1}{(\alpha_3+1)(\beta_3+1)}+\frac{1}{(\alpha_4+1)(\beta_4+1)}+\cdots+\frac{1}{(\alpha_{20}+1)(\beta_{20}+1)}$$ 的值等於________。

【參考解法】

因已知 α_n、β_n 為方程式 $x^2+(2n+1)x+n^2=0$ 的兩根，所以由根與係數的關係知 $\alpha_n+\beta_n=-(2n+1)$、$\alpha_n\beta_n=n^2$。而由 $(\alpha_n+1)(\beta_n+1)=\alpha_n\beta_n+\alpha_n+\beta_n+1=n^2-2n$，故可得知 $\frac{1}{(\alpha_n+1)(\beta_n+1)}=\frac{1}{n^2-2n}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n})$，因此

$$\frac{1}{(\alpha_3+1)(\beta_3+1)}+\frac{1}{(\alpha_4+1)(\beta_4+1)}+\cdots+\frac{1}{(\alpha_{20}+1)(\beta_{20}+1)}$$

$$=\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{18}-\frac{1}{20})]=\frac{1}{2}\times(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{19}-\frac{1}{20})=\frac{531}{760}$$

答案：$\frac{531}{760}$

5. 某社團共有 1082 位會員，他們要互選推出最高票的 14 個人代表社團參加國際會議。假設每人只能投一票且在沒有廢票的情形下，則至少要得_____張票才能保證當選此社團的代表。

【參考解法 1】

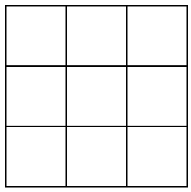
可假設至少需 x 張票才能一定當選代表，則 14 位當選的代表至少共得 $14x$ 張，即所有落選人共得 $1082-14x$ 張，故落選人中的最高票至多為 $1082-14x$ 張。因此可得 $1082-14x<x$，化簡得 $x>\frac{1082}{15}=72\frac{2}{15}$。因 x 必為正整數，所以 x 的最小值為 73。

【參考解法 2】

可把所有的落選人都視為同一個人所得的票，則可將題目視為 15 人中選出 14 位代表。此時落選人的票數必少於平均值。因 $\frac{1082}{15}=72\frac{2}{15}$，故落選人至多獲得 72 張票，即至少要獲得 73 張票才能保證當選。

答案：73 張

6. 在 3×3 的方格中選取 3 個方格分別塗黑、藍、紅三種顏色，每種顏色各塗一格，要求這三個方格中任意兩個方格不在同行也不在同列。則總共有_____種不同的塗色方法。



【參考解法 1】

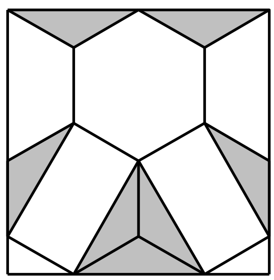
先選擇塗黑色的方格，有 9 種選擇的方式；再選擇藍色的方格，這時與黑格同行同列的格子都不能選取，故有 4 種選擇的方式；最後選擇紅色的方格，這時與黑格、藍格同行同列的格子都不能選取，故僅有 1 種選擇的方式。由乘法原理知共有 $9\times4\times1=36$ 種選擇的方式。

【參考解法 2】

可知選取三個方格中任意兩個方格不在同行也不在同列的選取方法共有 $3\times2\times1=6$ 種方法，而對於每一種方法的三個方格都分別不重複地塗上黑、藍、紅其中一種顏色都有 $3\times2\times1=6$ 種塗法，故知總共有 $6\times6=36$ 種塗色的方法。

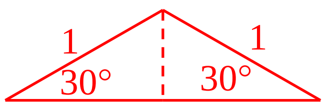
答案： 36 種

7. 一塊磁磚的圖案如圖所示，已知圖中每個正六邊形的邊長為 1 cm，則圖中所有塗上陰影部分的總面積為______cm^2。



【參考解法】

可知圖中陰影部份是由七個腰長為 1 cm、兩底角皆為 30° 的等腰三角形所構成。



而腰長為 1 cm、兩底角皆為 30° 的等腰三角形底邊上的高為 $\frac{1}{2}$ cm、底邊長度為 $2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ cm，故這樣的三角形之面積為 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ cm^2，因此圖中塗上陰

影部分的面積為$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 7=\frac{7\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$。

答案：$\frac{7\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$

8. 已知 P 為大於 3 的任意奇質數。若 a 為正整數且能整除P^2+695，則 a 的最大值為_____。

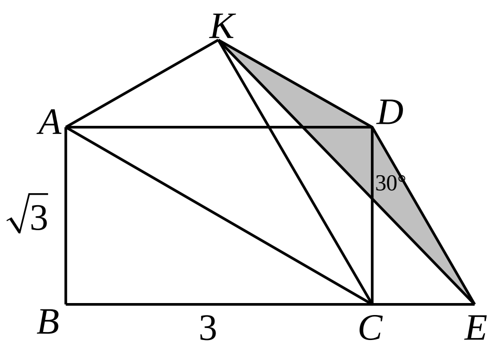
【參考解法】

可知$P^2+695=P^2-1+695+1=(P+1)(P-1)+696$且有$696=2^3\times 3\times 29$。

因$P-1$、$P+1$為連續的偶數，故其中必恰有一數為 4 的倍數，所以$(P+1)(P-1)$必為 8 的倍數；而$P-1$、P、$P+1$為連續的三個整數，故知其中必恰有一數為 3 的倍數，且再由$P\neq 3$可判斷出$(P+1)(P-1)$必為 3 的倍數。因此$(P+1)(P-1)$必為$8\times 3=2^3\times 3=24$的倍數，即可得知 a 的最大值為 24。

答案：24

9. 在一個長為 3 cm，寬為$\sqrt{3}$cm 的矩形 $ABCD$ 的 BC 邊延長線上取一點 E，使得$\angle CDE=30^\circ$，將點 B 沿著對角線 AC 翻摺後與 K 點重合，如圖所示，則三角形 KDE 的面積為_______cm^2。



【參考解法】

因$CD=AB=\sqrt{3}$cm 且$\angle CDE=30^\circ$，故$DE=2$cm；因$AB:BC=\sqrt{3}:3=1:\sqrt{3}$且$\angle ABC=90^\circ$，故可判斷出$\angle ACB=30^\circ$，所以$\angle ACK=30^\circ$，即可推得$\angle DCK=90^\circ-30^\circ-30^\circ=30^\circ$，因此知$KC\,//\,DE$，所以三角形 KDE 在 DE 邊上的高即為點 C 至線段 DE 的距離，再由$CD=\sqrt{3}$cm 可得知點 C 至線段 DE 的距離為$\frac{\sqrt{3}}{2}$cm，故三角形 KDE 的面積為$\frac{1}{2}\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2$。

答案：$\frac{\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2$

10. 在算式$(((10\,\square\,2)\,\square\,2)\,\square\,2)\,\square\,2$的四個$\square$中填入加、減、乘、除四個運算符號（每個符號都恰只使用一次），則可以得到_______個不同的值。

【參考解法 1】

將除以 2 改寫為乘以$\frac{1}{2}$，然後將整個式子用乘法分配律打開，即變為 10、2 與-2各乘一個係數再相加，其中 10 的係數只能是$2\times\frac{1}{2}=1$，若乘以 2 在乘以$\frac{1}{2}$之前，則 2 與-2的係數只能是 1 或$\frac{1}{2}$，結果只能為 9、10、11 之一；若乘以 2 在乘以$\frac{1}{2}$之後，則 2 與-2的係數只能是 1 或 2，結果只能為 8、10、12 之一。綜上，共有 5 種不同的運算結果。

【參考解法 2】

$(((10+2)-2)\times 2)\div 2=10$、$(((10+2)-2)\div 2)\times 2=10$、$(((10+2)\times 2)-2)\div 2=11$、$(((10+2)\times 2)\div 2)-2=10$、$(((10+2)\div 2)\times 2)-2=10$、$(((10+2)\div 2)-2)\times 2=8$、$(((10-2)+2)\times 2)\div 2=10$、$(((10-2)+2)\div 2)\times 2=10$、$(((10-2)\times 2)+2)\div 2=9$、$(((10-2)\times 2)\div 2)+2=10$、$(((10-2)\div 2)\times 2)+2=10$、$(((10-2)\div 2)+2)\times 2=12$、$(((10\times 2)-2)+2)\div 2=10$、$(((10\times 2)-2)\div 2)+2=11$、$(((10\times 2)+2)-2)\div 2=10$、$(((10\times 2)+2)\div 2)-2=9$、$(((10\times 2)\div 2)+2)-2=10$、$(((10\times 2)\div 2)-2)+2=10$、$(((10\div 2)-2)\times 2)+2=8$、$(((10\div 2)-2)+2)\times 2=10$、$(((10\div 2)\times 2)-2)+2=10$、$(((10\div 2)\times 2)+2)-2=10$、$(((10\div 2)+2)\times 2)-2=12$、$(((10\div 2)+2)-2)\times 2=10$，故知共可算出 8、9、10、11、12 共五個不同的值。

【參考解法 3】

由交換律可知當加號與減號同時填入相鄰的□時，若將此二個相鄰的□填法互換，則值不會改變，而乘號與除號也有相同的性質。因 $(((10+2)-2)\times 2)\div 2=10$，故只需觀察加號與減號不同時填入相鄰的□，以及乘號與除號不同時填入相鄰的□的取值：$(((10+2)\times 2)-2)\div 2=11$、$(((10+2)\div 2)-2)\times 2=8$、$(((10-2)\times 2)+2)\div 2=9$、$(((10-2)\div 2)+2)\times 2=12$、$(((10\times 2)-2)\div 2)+2=11$、$(((10\times 2)+2)\div 2)-2=9$、$(((10\div 2)-2)\times 2)+2=8$、$(((10\div 2)+2)\times 2)-2=12$，故知共可算出 8、9、10、11、12 共五個不同的值。

答案： 5 個

11. 已知實數 a、b、c 滿足 $(a+2)(b+2)(c+2)=53$、$(a+1)(b+1)(c+1)=16$、$abc=1$，則 $(a-1)(b-1)(c-1)$ 的值是________。

【參考解法】

由 $(a+1)(b+1)(c+1)=abc+ab+ac+bc+a+b+c+1$ 可知

$ab+ac+bc+a+b+c=16-abc-1=14$；

由 $(a+2)(b+2)(c+2)=abc+2ab+2ac+2bc+4a+4b+4c+8$ 可知

$ab+ac+bc+2a+2b+2c=\dfrac{53-abc-8}{2}=22$；

兩式相減即可得知 $a+b+c=22-14=8$，故 $ab+ac+bc=14-8=6$。

所以知 $(a-1)(b-1)(c-1)=abc-ab-ac-bc+a+b+c-1=1-6+8-1=2$。

答案： 2

12. 三角形 ABC 的面積為 120 cm^2，BC 邊的長為 16 cm，則三角形 ABC 周長的最小值是________cm。

【參考解法】

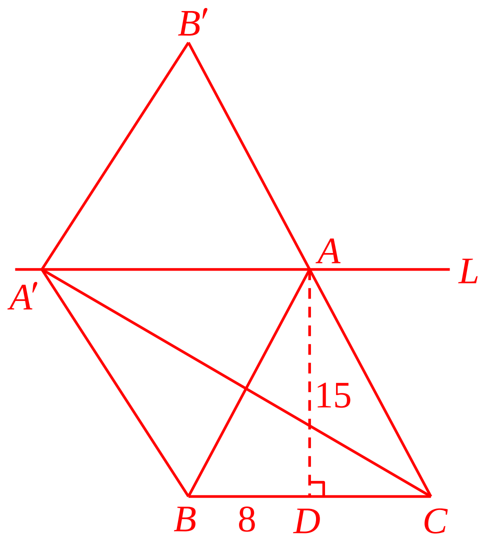
可知 BC 邊上的高為 $\dfrac{120\times 2}{16}=15$ cm，因此點 A 必在一條與 BC 的距離為 15 cm 的直線 L 上。現驗證當 $AB=AC$ 時，三角形 ABC 的周長最小。如圖，令點 A 在直線 L 上使得 $AB=AC$，且點 A' 是在直線 L 上異於點 A 的點。以直線 L 為對稱軸作點 B 的對稱點 B' 並連接 $A'B'$、AB'，可知 $A'B'=A'B$、$AB'=AB$ 以及 $\angle BAA'=\angle B'AA'$。

由 $\angle BAA' = \angle B'AA'$ 可知 C、A、B' 三點共線，因此 $B'C = AB' + AC = AB + AC$。而在三角形 $CA'B'$ 中，恆有 $A'B' + A'C > B'C$，故得

$$A'B + A'C = A'B' + A'C > B'C = AB + AC$$。

所以可判斷出三角形 $A'BC$ 的周長大於三角形 ABC 的周長。

而當 $AB = AC$ 時，可令 BC 邊的中點為點 D，則由 BC 邊上的高 $AD = 15\,\text{cm}$、$BD = 8\,\text{cm}$ 知 $AB = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17\,\text{cm}$，此時三角形 ABC 的周長為 $16 + 17 + 17 = 50\,\text{cm}$。



答案： 50 cm

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

1. 設 $n = \overline{abcd}$ 為四位數，其中 a、b、c、d 為四個相異的數碼，且 $a \neq 0$。若 n 為 180 的倍數，請問滿足這些條件的 n 共有多少個？

【參考解法】

可知 180 的倍數之個位數碼必為 0、十位數碼必為 8 的倍數之個位數碼，故 $d = 0$ 且 $c = 2$、4、6 或 8。(3 分)

再由 n 必為 9 的倍數知：

(1)若 $c = 2$，即 $n = \overline{abcd} = \overline{ab20}$，其數碼和為 $a + b + 2$ 必為 9 的倍數，故：

(i) $a + b + 2 = 9$，即 $a + b = 7$，因此 $(a, b) = (1, 6)$、$(3, 4)$、$(4, 3)$、$(6, 1)$，共 4 種可能；(2 分)

(ii) $a + b + 2 = 18$，即 $a + b = 16$，因此 $(a, b) = (7, 9)$、$(9, 7)$，共 2 種可能。(2 分)

(2)若 $c = 4$，即 $n = \overline{abcd} = \overline{ab40}$，其數碼和為 $a + b + 4$ 必為 9 的倍數，故：

(i) $a + b + 4 = 9$，即 $a + b = 5$，因此 $(a, b) = (2, 3)$、$(3, 2)$，共 2 種可能；(2 分)

(ii) $a + b + 4 = 18$，即 $a + b = 14$，因此 $(a, b) = (5, 9)$、$(6, 8)$、$(8, 6)$、$(9, 5)$，共 4 種可能。(2 分)

(3)若 $c = 6$，即 $n = \overline{abcd} = \overline{ab60}$，其數碼和為 $a + b + 6$ 必為 9 的倍數，故：

(i) $a + b + 6 = 9$，即 $a + b = 3$，因此 $(a, b) = (1, 2)$、$(2, 1)$，共 2 種可能；(2 分)

(ii) $a + b + 6 = 18$，即 $a + b = 12$，因此 $(a, b) = (3, 9)$、$(4, 8)$、$(5, 7)$、$(7, 5)$、$(8, 4)$、$(9, 3)$，共 6 種可能。(2 分)

(4)若 $c = 8$，即 $n = \overline{abcd} = \overline{ab80}$，其數碼和為 $a + b + 8$ 必為 9 的倍數，故：

(i) $a + b + 8 = 9$，即 $a + b = 1$，再由 $a \neq 0$ 知 $b = 0$，與 $d = 0$ 矛盾，故不合；(2 分)

(ii) $a + b + 8 = 18$，即 $a + b = 10$，因此 $(a, b) = (1, 9)$、$(3, 7)$、$(4, 6)$、$(6, 4)$、$(7, 3)$、$(9, 1)$，共 6 種可能。(2 分)

因此，滿足這些條件的 n 共有 $4 + 2 + 2 + 4 + 2 + 6 + 6 = 26$ 個。(1 分)

答案： 26 個

- 說明$a+b+c$必為 9 的倍數，2 分；說明$a+b+c$的值為 9 或 18，3 分。
- 未說明(a, b)的可能取值而直接得到各情況的解數，至多 16 分。
- 在以上證法中：
  (i)　若未排除數碼相同的情況，至多 8 分
  (ii)　若未排除 c 為奇數的情況，至多 8 分
  若同時犯(i)、(ii)的錯誤，0 分。
- 若使用窮舉法列出全部的 26 個數，全對給 20 分，漏列或多列則不給分。

2. 圖 1 為一個6×6的方格表，圖 2 為一個 L-形四方塊，它是由四個邊長為 1 的小正方形組成的。將方格表的某些小方格塗上黑色，使得 L-形四方塊沿著格線無論如何放入方格表內都至少會蓋住一個黑色的小方格，L-形四方塊可以旋轉或翻轉。請問至少要將幾個小方格塗黑？請找出一種滿足您的答案之塗法。(在下圖中將滿足你答案的小方格塗黑)。

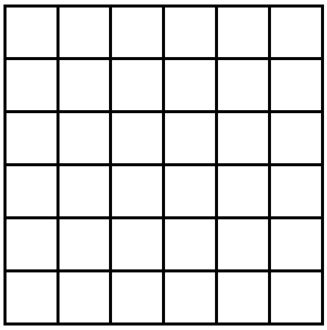


圖 1

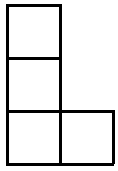
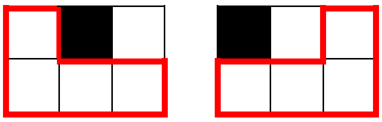
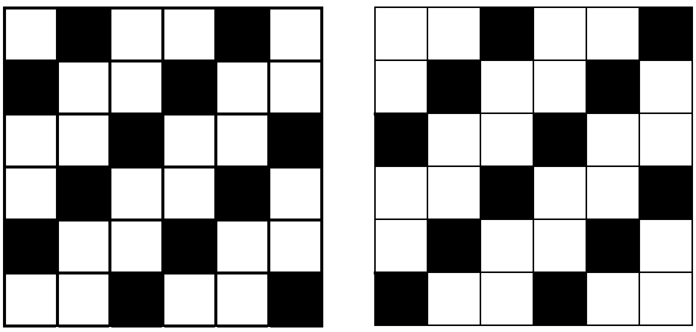


圖 2

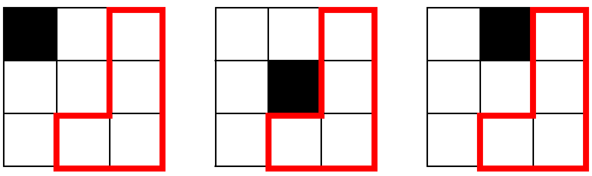
【參考解法 1】
在2×3的方格表中，若只塗黑一個小方格，則一定可放入一個 L-形四方塊而不蓋住此塗黑的方格：



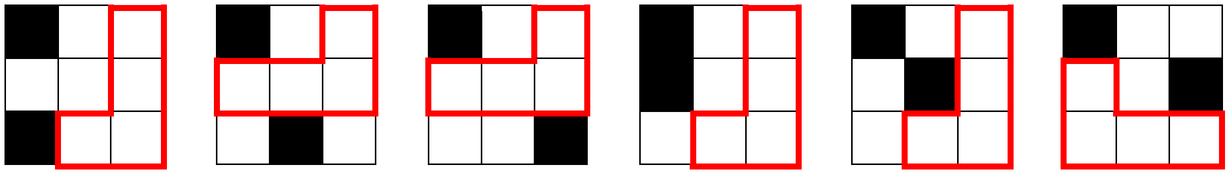
故知在2×3的方格表中，至少要塗黑二個小方格。(10 分)
因6×6的方格表可分成六個2×3的方格表，故知至少要將$2\times 6=12$個小方格塗黑。(5 分) 如圖所示的二種塗色法，都是將 12 個小方格塗黑而使得 L-形四方塊無論如何放入方格表內都至少會蓋住一個黑色的小方格的塗色方式。(5 分)

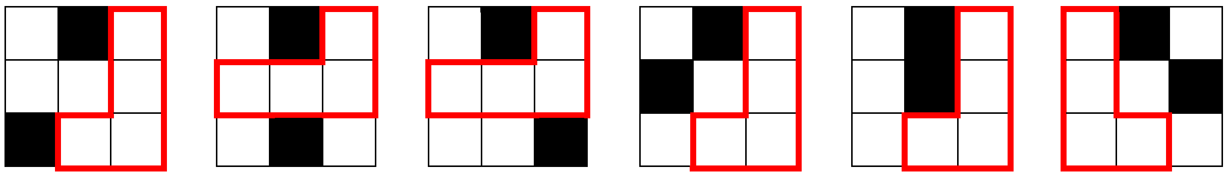


【參考解法 2】
在3×3的方格表中，若只塗黑一個小方格，則無論黑色小方格是在角落、邊、或是中央，都一定可放入一個 L-形四方塊而不蓋住此塗黑的方格：



在3×3的方格表中，若只塗黑二個小方格，則無論這二個小方格是在同一行上，或是不同行上，都一定可放入一個 L-形四方塊而不蓋住此塗黑的方格：



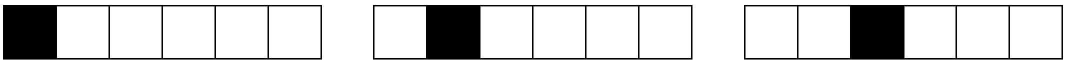


故知在3×3的方格表中，至少要塗黑三個小方格。(10 分)

因6×6的方格表可分成四個3×3的方格表，故知至少要將$3\times4=12$個小方格塗黑。(5 分)

【參考解法 3】

因 L-形四方塊在同一行或同一列上沿著格線至多會佔有連續三個小方格，因此知必須在連續的三個小方格上至少塗黑一個。因每一行、每一列都有 6 個小方格，若僅將其中一個塗黑，則無論黑色小方格是在邊或是中間，都一定會有三個連續空白小方格：



即每一行、每一列都必須至少塗黑二個小方格。(10 分)

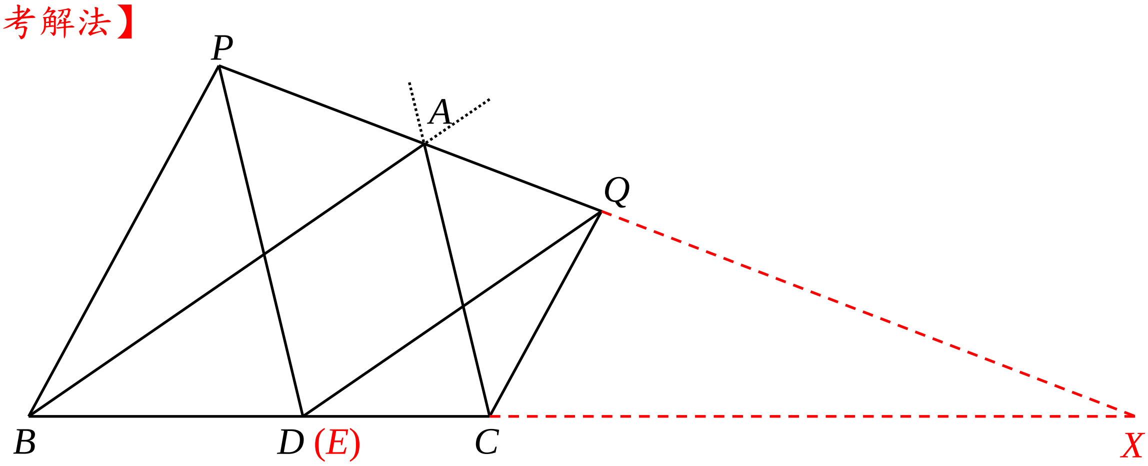
因6×6的方格表共有 6 列，故知至少要將$6\times2=12$個小方格塗黑。(5 分)

答案： 至少要將 12 個小方格塗黑

- 若僅給出 12 個小方格的塗法，10 分；塗色格數大於 12 個，一律不給分。
- 在驗證至少需塗黑 12 個小方格的過程中：
  - (i) 若僅說明2×3的方格表至少要塗黑二個小方格而未解釋不能更少，5 分
  - (ii) 若僅說明3×3的方格表至少要塗黑三個小方格而未解釋不能更少，5 分
  - (iii) 若僅說明同一列或同一行二個塗黑色格子間至多有 2 個空白，2 分

3. 在三角形 ABC 中，點 P、Q 在$\angle BAC$的外角平分線上且在直線 AB 的異側，使得$BP//CQ$，點 D 在 BC 上使得$DP=DQ$。請證明$AB//DQ$。

【參考解法】



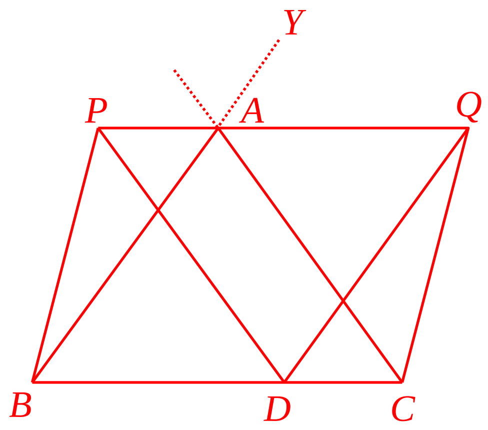
首先假設 $AB > AC$，延長 PQ、BC 交於點 X。(3 分) 令點 E 是 BC 上的點使得 QE 平行 AB (4 分)，如圖所示。則可得 $\dfrac{XQ}{XA}=\dfrac{XE}{XB}$ 與 $\dfrac{XQ}{XP}=\dfrac{XC}{XB}$，即 $XA\times XE = XB\times XQ = XP\times XC$，所以 $\dfrac{XA}{XP}=\dfrac{XC}{XE}$，可得知 $AC//PE$。(3 分)

又知 $\angle EPQ=\angle CAQ=\angle PAB=\angle EQP$，可得 $EP=EQ$，此即點 E 與點 D 重合，故證得 $AB//DQ$。(5 分)

當 $AB=AC$，可知 $PQ//BC$，即上述作法的點 X 不存在。此時可知四邊形 $PQCB$ 為平行四邊形，因此三角形 ABC 與三角形 DQP 為底邊長相同、面積相同的兩個等腰三角形，故可判斷出三角形 ABC 與三角形 DCP 為全等三角形，若令 BA 延長線上的一點 Y，如右圖所示，即有

$\angle PQD=\angle ACB=\angle CAQ=\angle QAY$，

故 $AB//DQ$。(5 分)



- 繪出正確的輔助線，3 分
- 說明 $\angle DPQ=\angle DQP$，1 分；說明 $\angle PAB=\angle QAC$，1 分
- 提到或意圖證明 $\angle DPQ=\angle PAB$ (或 $\angle DQP=\angle QAC$)，3 分
- 利用其它的證明手法時，直接令 $\angle DPQ=\angle PAB$ 成立而未驗證(或 $\angle DPQ=\angle PAB$ 的等價條件)，且其餘的證明過程沒有錯誤，5 分；若有錯誤，0 分。