2017 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選初賽 個人賽試題

________縣市________國民中學____年級 編號：________ 姓名：__________

作答時間: 二小時　　性別: □男 □女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；答案若為分數，請化為最簡分數)

1. 在 19、20、21、22、23 這五個數中，共有__________個數可以表示成兩個質數之和。

【參考解法】

$19=2+17$、$20=3+17$、$21=2+19$、$22=3+19$，而若能將23表示成兩個質數之和，這兩個質數必為一奇一偶，故偶質數必為2，因此奇質數為$23-2=21$，與21不是質數矛盾。

答：4 個

2. 已知在$\triangle ABC$中，$AB=AC$、$\angle ACB=80^\circ$。以 AC 為邊向外側作正方形 $ACDE$，連接 BE 與 AC 相交於點 F，如圖所示。則$\angle BFC$等於_______度。

【參考解法】

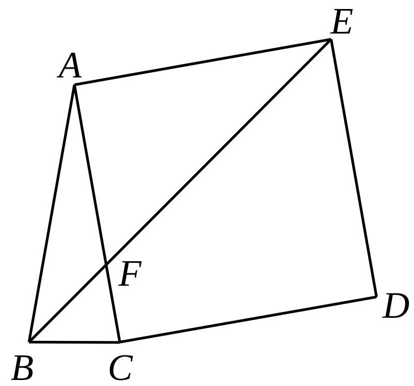
由$AB=AC$知$\angle ABC=\angle ACB=80^\circ$，故$\angle BAC=180^\circ-2\times80^\circ=20^\circ$。

由於 $ACDE$ 是正方形，故$AE=AC=AB$；

又$\angle BAE=90^\circ+20^\circ=110^\circ$，所以

$\angle AEB=\dfrac{180^\circ-110^\circ}{2}=35^\circ$，

因此$\angle BFC=\angle AFE=180^\circ-90^\circ-35^\circ=55^\circ$。



答：55°

3. 小虎與小亮都要郵寄一件包裹，郵局的收費標準為：不超出 10 kg 的包裹每 kg 的運費為 6 元，超出 10 kg 的部分每 kg 平均運費略低一些。若小虎郵寄的包裹比小亮郵寄的包裹重 20%，兩人的運費分別為 92 元、80 元，則超出 10 kg 部分比 10 kg 以內每 kg 的平均運費低了__________元。

【參考解法 1】

由題意知，前 10 kg 包裹的運費為 60 元，故小虎與小亮兩人的包裹都超過 10 kg。超出 10 kg 部分的運費，小虎為$92-60=32$元、小亮為$80-60=20$元。設小亮的包裹重為 x kg，則小虎的包裹重為$(1+20\%)x=1.2x$ kg，可得

$\dfrac{x-10}{1.2x-10}=\dfrac{20}{32}$，解方程知$x=15$。即超出 10 kg 部分每 kg 的平均運費為$20\div(15-10)=20\div5=4$元，故超出 10 kg 部分每 kg 平均運費比 10 kg 以內的低了$6-4=2$元。

【參考解法 2】

由題意知，前10 kg包裹的運費為60元，故小虎與小亮兩人的包裹都超過10 kg。超出10 kg部分的運費，小虎為$92-60=32$元、小亮為$80-60=20$元。若設超出10 kg部分每kg運費為x kg，則小虎的包裹重為$10+\dfrac{32}{x}$ kg、小亮的包裹重為$10+\dfrac{20}{x}$ kg，並由題意得$10+\dfrac{32}{x}=1.2\times(10+\dfrac{20}{x})$，解方程知$x=4$。即超出$10$ kg部分每kg的平均運費為4元，故超出10 kg部分每kg平均運費比10 kg以內的低了$6-4=2$元。

答：2元

4. 已知$A=3x^2+3x$、$B=-x^2+x+5$、$C=x^2+x-1$，請問將

$$4A-(B-2(2B-3C)+2A)-2B$$

的結果合併同類項並按x作降冪排列後，所得到的多項式為＿＿＿＿＿。

【參考解法】

$4A-(B-2(2B-3C)+2A)-2B=2A+B-6C=B+2(A-3C)=-x^2+x+11$。

答：$-x^2+x+11$

5. 小華的書架上放有文學書、數學書、歷史書與科普書。其中數學書的冊數是文學書的 5 倍、科普書的冊數是歷史書的 4 倍。在 21、23、26、29、30 這五個數中，共有＿＿＿＿＿個數不可能是書架上書的總冊數。

【參考解法】

設文學書有x冊，歷史書有y冊，其中x、y為正整數，則書架上書的總冊數為$x+5x+y+4y=6x+5y$。當$x=1$、$y=3$時，$6x+5y=21$；當$x=3$、$y=1$時，$6x+5y=23$；當$x=1$、$y=4$時，$6x+5y=26$；當$x=4$、$y=1$時，$6x+5y=29$。而若$6x+5y=30$，則$6x$必為5的倍數，故x也是5的倍數，這將導致$6x\geq30$，即$5y\leq0$，矛盾。

答： 1 個

6. 將數 1、2、3、4 分別填入4×4方格表的小方格內，使得每一行、每一列上的四個數都不相同。如下圖所示，已在方格表的部分小方格內填入數，則圖中 A、B 位置上的數之和是＿＿＿＿＿。

	A	4	
B		1	
1	2	3	4
3	4	2	1

【參考解法】

A下方的空格不能填1、2、4，故只能填3，因此A格只能填1；B上方的空格不能填1、3、4，故只能填2，因此B格只能填4。故$A+B=1+4=5$，完整的填法如右圖所示。

答：5

2	1	4	3
4	3	1	2
1	2	3	4
3	4	2	1

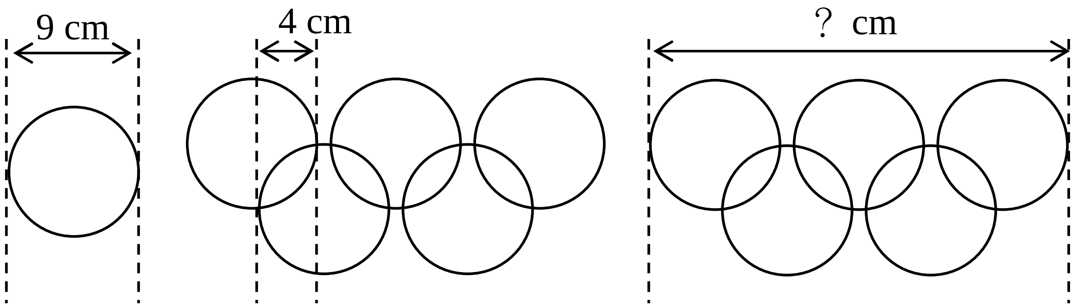
7. 一個三角形的兩條邊之長度分別是 6 cm 與 13 cm，已知第三條邊的長度也是整數 cm，則這個三角形的周長最小可能是__________cm。

【參考解法】

由三角形的兩邊之差必小於第三邊之長度，知第三邊的長度大於$13-6=7$ cm，故其長度至少為8 cm，因此周長最少為$13+6+8=27$ cm。

答： 27 cm

8. 下圖三是一個奧運五環的圖案，圖一顯示每一個圓的直徑為 9 cm，圖二顯示兩條都與圓相切的虛線之間的距離為 4 cm，則圖三顯示此奧運五環從左到右的總長度為__________cm。



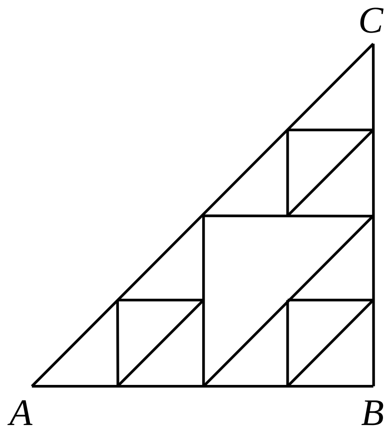
圖一　　圖二　　圖三

【參考解法】

奧運五環圖案的第一行有3個圓，根據圖一與圖二所示，相鄰兩個圓之間距為$9-4-4=1$cm，故圖三中此奧運五環從左到右的總長度為$3\times9+2\times1=29$ cm。

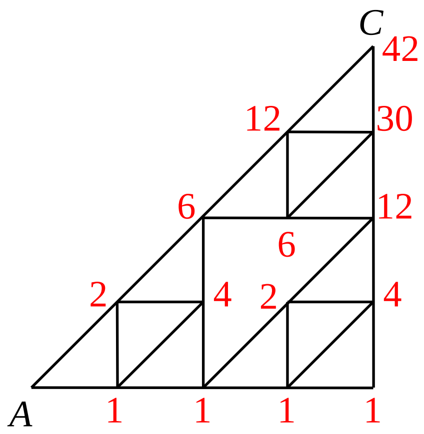
答：29 cm

9. 下圖是由一些等腰直角三角形拼成的圖形，若一隻螞蟻欲沿著三角形的邊從 A 點爬到 C 點，規定在爬行的過程中只能向右方、上方或者斜右上方爬行。則這隻螞蟻總共有__________條不同的爬行路徑。



【參考解法】

如圖所示，圖中各點的數即為螞蟻從起點到該點的不同路徑數：



故從A點爬到C點共有42條不同的爬行路徑。

答：42條

10. 在 1 到 1000 這 1000 個正整數中，總共有_________個正整數 n 使得 n^3+n^2+n 之值是 8 的倍數？

【參考解法】

由於 $n^3+n^2+n=n(n^2+n+1)$，而當 n 是正整數時，n^2 與 n 的奇偶性相同，所以 n^2+n+1 必為奇數，故 n^3+n^2+n 之值是8的倍數的充要條件為 n 是8的倍數，因此滿足條件的正整數 n 總共有 $\frac{1000}{8}=125$ 個。

答：125 個

11. 已知 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$，其中 a、b、c 為非零實數，則 $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$ 的值是_________。

【參考解法】

將已知等式展開整理得 $2(ab+bc+ca)=0$，即 $ab+bc+ca=0$。

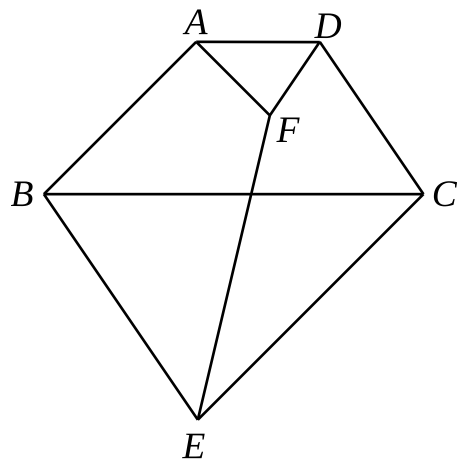
由於 a、b、c 為非零實數，故 $\frac{ab+bc+ca}{abc}=0$，即 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$，因此

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})-3=-3\text{。}$$

答：-3

【註】本題也可以使用代入特殊值的方法。

12. 在梯形 $ABCD$ 中，$AD//BC$。過 B 且平行於 CD 的直線與過 C 且平行於 AB 的直線交於點 E，點 F 為 $ABCD$ 內部的點使得 $\angle FAD=\angle ABC$、$\angle FDA=\angle DCB$，如下圖所示。若四邊形 $ABEF$ 的面積為 20 cm^2、並且四邊形 $DCEF$ 的面積為 16 cm^2，則梯形 $ABCD$ 的面積為_________cm^2？



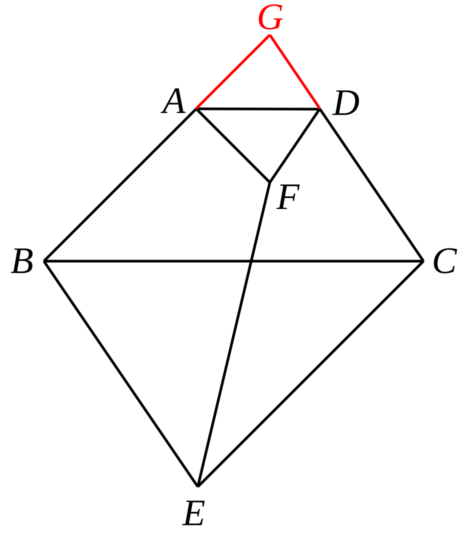
【參考解法】

延長 BA、CD 交於點 G，如圖所示。

顯然 $GBEC$ 是一個平行四邊形，故 $S_{GBEC}=2S_{GBC}$。由 $\angle FAD=\angle ABC=\angle GAD$、$\angle FDA=\angle DCB=\angle GDA$、$AD=AD$ 可以得知 $\triangle FDA\cong\triangle GDA$，故 $S_{FDA}=S_{GDA}$，因此 $S_{GAFD}=2S_{GDA}$。所以

$$S_{ABEF}+S_{DCEF}=S_{GBEC}-S_{GAFD}$$
$$=2(S_{GBC}-S_{GDA})=2S_{ABCD}$$

故得知 $S_{ABCD}=\frac{20+16}{2}=18\,\text{cm}^2$。



答： 18 cm^2

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

1. 在一個四位數中，若恰好出現 2、0、1、7 這四個數碼中的三個(重複出現的數碼只算一個)，則稱這個四位數是一個「好數」。例如，8712 與 7200 都是「好數」，而 2017 與 7175 都不是「好數」。請問在所有的四位數中總共有多少個「好數」？

【參考解法 1】

我們分五種情況計算「好數」的個數。(每種情況各給 3 分)

情況 1：四位數的四個數碼都不相同且沒有 0。

則其中三個數碼必為 2、1 或 7，另一個數碼需選自 3、4、5、6、8、9，共有六種選擇方式。而當這四個數碼被選定後，它們有 $4\times3\times2\times1=24$ 種排列方式，故此情況下共有 $6\times24=144$ 個「好數」；

情況 2：四位數的四個數碼都不相同且有 0。

則另有兩個數碼選自 2、1 或 7，最後一個數碼需選自 3、4、5、6、8、9，故有 $3\times6=18$ 種選擇方式。而當這四個數碼被選定後，因為首位數碼不得為 0，它們有 $3\times3\times2\times1=18$ 種排列方式，故此情況下共有 $18\times18=324$ 個「好數」；

情況 3：四位數有一個重複數碼，且四個數碼沒有 0。

則所有數碼必須為 2、1 或 7。從 2、1、7 中選擇一個重複的數碼有 3 種方式。而當這四個數碼被選定後，它們有 $\frac{4\times3\times2\times1}{2}=12$ 種排列方式，故此情況下共有 $3\times12=36$ 個「好數」；

情況 4：四位數有一個重複數碼，且四個數碼中恰有一個 0。

則在 2、1 或 7 中選擇一個數碼出現 2 次，另一個數碼出現 1 次，故有 $3\times2=6$ 種選擇方式。而當這四個數碼被選定後，因首位數碼不得為 0，它們有 $\frac{3\times3\times2\times1}{2}=9$ 種排列方式，故此情況下共有 $6\times9=54$ 個「好數」；

情況 5：四位數有一個重複數碼，且四個數碼中恰有兩個 0，則需在 2、1、7 中選擇兩個數碼，故有 3 種選擇方式。當這四個數碼被選定後，因首位數碼不為 0，它們有 $\frac{2\times3\times2\times1}{2}=6$ 種排列方式，故此情況下共 $3\times6=18$ 個「好數」。

綜上所述，共有 $144+324+36+54+18=576$ 個「好數」。(給出正確答案 5 分)

【參考解法 2】

我們先求出所有可能的數碼排列的個數，最後刪除掉 0 為首位數碼的情況數。

若四個數碼兩兩不同，則其中三個數碼選自 2、0、1、7，另一個數碼選自 3、4、5、6、8、9，共有 $4\times6\times4\times3\times2\times1=576$ 個排列。在這類情況下，0 為首位數碼時，後面必然是 2、1、7 中的兩個數碼與 3、4、5、6、8、9 中的一個數碼，共有 $3\times6\times3\times2\times1=108$ 個排列是以 0 為首位數碼。(5 分)

若四個數碼有兩個數碼相同，則它們必然全部選自 2、0、1、7，先選一個數碼出現二次(有 4 種選法)，再選兩個數碼各出現一次(有 3 種選法)。而當這四個數

碼被選定後，它們有$\dfrac{4\times3\times2\times1}{2}=12$種排列方式，故此情況下共有$6\times24=144$個排列。(5 分)然而在這類情況下，四個數碼均選自 2、0、1、7，每個數碼在每個位置上都有四分之一的情況，故 0 為首位數碼的情況有$\dfrac{144}{4}=36$個。(5 分)
綜上所述，共有$576-108+144-36=576$個「好數」。(給出正確答案5分)

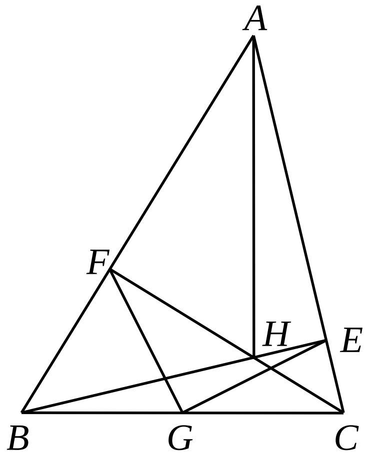
答： 576 個

【評分標準備註】

若考生計數方法不同且未求得正確數目，依以下規則酌予給分：

- 若分類方式可行但每一類都計數錯誤，3 分
- 若分類計數時，每一類的計算中未排除重複計數或未完整討論此類所有的情況，3 分。
- 若分成 n 類，每計算出正確數目的一類，$\dfrac{20}{n}$ 分。

2. 在$\triangle ABC$中，點 G 是 BC 的中點，$BE\perp AC$ 、$CF\perp AB$，BE 與 CF 相交於點 H，如圖所示。 已知$\angle EGF=90^\circ$，請證明 $AH=BC$ 。



【參考解法】

由於 $BE\perp AC$ 、$CF\perp AB$，點 G 是 BC 的中點，故 $GB=GC=GE=GF$ 。(5 分)

故$\angle FCG=\dfrac{180^\circ-\angle FGC}{2}$ 、$\angle ECG=\dfrac{180^\circ-\angle EGC}{2}$，所以

$$\begin{aligned}\angle ECF&=\frac{180^\circ-\angle EGC}{2}-\frac{180^\circ-\angle FGC}{2}\\&=\frac{\angle FGC-\angle EGC}{2}=\frac{\angle EGF}{2}=45^\circ\end{aligned}$$ (5 分)

又 $CF\perp AB$，故 AFC 為等腰直角三角形，即 $AF=CF$ 。(5 分)

由點 H 是$\triangle ABC$之垂心，可得知 $AH\perp BC$ ，$\angle FAH=90^\circ-\angle ABC=\angle FCB$，又$\angle AFH=90^\circ=\angle CFB$ 、 $AF=CF$ ，故$\triangle AFH\cong\triangle CFB$，因此 $AH=BC$ 。(5 分)

3. 若k為整數且$k>1$，已知不定方程$x^2+(x+k)^2=y^2$有滿足x、y互質的正整數解(x,y)，請問正整數k之最小值是什麼？

【參考解法】

當$k=7$時，不定方程有解$(5, 13)$，下面證明$k=7$就是最小值。(5 分)

首先注意到x與k必須互質，否則若它們有公共質因數p，則$p\mid y^2$，故$p\mid y$，與x、y互質互質相矛盾。

若k是偶數，則x必須是奇數，但此時x^2與$(x+k)^2$均被 4 除餘 1，故y^2被 4 除餘 2，但不存在這樣子的y，故不合。(5 分)

若$3\mid k$，則x不是 3 的倍數，但此時x^2與$(x+k)^2$均被 3 除餘 1，故y^2被 3 除餘 2，但不存在這樣子的y，故不合。(5 分)

若$5\mid k$，則x不是 5 的倍數，但此時x^2與$(x+k)^2$被 5 除的餘數相同且為 1 或 4，故y^2被 5 除餘 2 或 3，但不存在這樣子的y，故不合。

綜上所述，k不能是 2、3、5 的倍數，又$k>1$，故$k=7$就是最小值。(5 分)

【註】給出$k=7$時的一組解並宣稱最小k為 7 可得 5 分，證明k不能是 2、3、5 中某一個數的倍數得 5 分。